Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2006. №2(36)

УДК 517.911

© **Д. А. Короткий**
Dimkorot@rambler.ru

СИСТЕМЫ С ОПЕРЕЖЕНИЕМ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ: ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ[1]

Ключевые слова: краевая задача, принцип сжимающих отображений, устойчивость, дискретизация, итерационные методы решения.

Abstract. We study linear system of differential equation with advance and delay. For this system we formulate the boundary value problem and investigate the questions of existence and uniqueness for solution. Also we develop numerical methods for solving this problem.

Введение

В работе изучаются линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с опережением и запаздыванием. Для таких систем формулируется краевая задача на конечном промежутке времени, исследуется вопрос о существовании и единственности решения краевой задачи, предлагаются методы приближенного нахождения этого решения. Системы с запаздыванием изучены уже достаточно хорошо [1-5], однако системы с опережением и запаздыванием изучены еще достаточно слабо [6].

Разрешимость задачи доказана с помощью принципа сжимающих отображений. Проведено численное моделирование. Исходная задача аппроксимировалась по явной разностной схеме Эйлера. Соответствующая система линейных алгебраических уравнений решалась тремя различными итерационными методами: методом Гаусса–Зейделя, методом сопряженных градиентов, методом минимальных невязок [7]. Описаны результаты моделирования.

[1]Работа поддержана РФФИ (проект № 05-01-00330).

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с опережением и запаздыванием следующего вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + C(t)x(t+\tau) + D(t) \ , \qquad (1.1)$$

$$a \leqslant t \leqslant b \ ,$$

где $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ — заданные непрерывные матрицы-функции (матрицы размерности $n \times n$), определенные на заданном отрезке $[a,b]$ числовой прямой $\mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$; $D(\cdot)$ — известная непрерывная n-мерная вектор-функция, определенная на том же отрезке; τ — величина запаздывания и опережения (величины запаздывания и опережения считаются одинаковыми). Задано также начальное значение $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и непрерывные n-мерные вектор-функции $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$, определенные на промежутках $[a-\tau, a)$ и $(b, b+\tau]$ соответственно. Будем считать, что вектор-функция $\varphi(\cdot)$ имеет конечный односторонний предел в точке $t = a$, а вектор-функция $\psi(\cdot)$ имеет конечный односторонний предел в точке $t = b$.

Под решением системы (1.1) будем понимать кусочно-непрерывную n-мерную вектор-функцию

$$x = x(t), \quad a - \tau \leqslant t \leqslant b + \tau,$$

которая непрерывна на отрезке $[a,b]$, почти во всех точках этого отрезка дифференцируема и удовлетворяет системе (1.1), а также удовлетворяет граничным соотношениям:

$$x(t) = \varphi(t), \ a - \tau \leqslant t < a; \ \ x(a) = x_0; \qquad (1.2)$$

$$x(t) = \psi(t), \ b < t \leqslant b + \tau \ .$$

Требуется исследовать вопрос о существовании и единственности решения краевой задачи (1.1)–(1.2), а также разработать методы приближенного нахождения этого решения.

§ 2. Существование и единственность решения

Т е о р е м а 2.1. *Если при некотором* $\lambda > 0$ *выполняется условие*

$$\|A\|_C \cdot \frac{1-e^{-\lambda l}}{\lambda} + \|B\|_C \cdot \frac{e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(l+\tau)}}{\lambda} + \tag{2.1}$$
$$+\|C\|_C \cdot \frac{e^{\lambda\tau} - e^{\lambda(\tau-l)}}{\lambda} < 1 \ ,$$

то краевая задача (1.1)–(1.2) имеет единственное решение.

Доказательство основано на применении принципа сжимающих отображений. Выполнение неравенства (2.1) существенно для справедливости теоремы.

§ 3. Численное моделирование решения

Дискретизируем исходную задачу, используя явную схему Эйлера. Для простоты будем считать, что $b - a = k\tau$, $k \in \mathbb{N}$. В схеме Эйлера будем использовать постоянный шаг дискретизации Δ , пусть для простоты он входит целое число раз в величину запаздывания, т.е. $\Delta = \tau/m$, где $m \in \mathbb{N}$.

Аппроксимация дифференциального уравнения имеет вид

$$u^{i+1} = u^i + \Delta \left[\ A^i u^i + B^i u^{i-m} + C^i u^{i+m} + D^i \ \right] , \quad i = 0, \ldots, p-1 \ .$$

Отсюда получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных u^i, $i = 1, ..., p$:

$$\begin{cases} u^{-m} = \varphi^{-m} \ , \cdots \ , \ u^{-1} = \varphi^{-1} \ , \ u^0 = x_0 \ , \\ \Delta \ B^i \ u^{i-m} + (1 + \Delta \ A^i) \ u^i - u^{i+1} + \Delta \ C^i \ u^{i+m} = -\Delta \ D^i \ , \\ i = 0, ..., p-1 \ , \\ u^{p+1} = \psi^{p+1} \ , \cdots \ , \ u^{p+m} = \psi^{p+m} \ . \end{cases}$$

Матрица системы является блочной четырёхдиагональной. Все блоки имеют размерность $n \times n$. При выполнении условия (2.1) сеточное решение сходится к точному при $\Delta \to 0$.

При проведении численных расчетов система алгебраических уравнений предварительно симметризовалась методом Гаусса и затем эта симметризованная система решалась следующими итерационными методами: методом Гаусса–Зейделя, методом сопряженных градиентов, методом минимальных невязок [7].

Численный эксперимент проведен на тестовом примере в двумерном случае. При выполнении условия (2.1) наблюдалась сходимость всех трех типов приближений к точному решению, в противном случае сходимости не наблюдалось.

Автор благодарит В.Г.Пименова за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференцальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
2. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
3. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
4. Ким А.В., Пименов В.Г. i-гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 256 с.
5. Каменский Г.А., Скубачевский А.Л. Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. М.: Изд-во МАИ, 1992. 192 с.
6. Baotong C. Functional differential equations mixed type in Banach spaces // Rend. Sem.Univ. Padova. 1995. Vol. 94. P. 47–54.
7. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2005. 840 с.