Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2006. №2(36)

УДК 517.929

© **С. И. Солодушкин**
solodushkin_s@mail.ru

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАНЕНИЯХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ключевые слова: идентификация параметров, функционально–дифференциальные уравнения, восстановление параметров

Abstract. We consider linear time-delay differential equations with multiple delays and unknown parameters. There are some no interference observations. It is necessary to identify parameters, using this incoming information

§ 1. Постановка задачи

Задачи идентификации параметров возникают во многих приложениях, в частности при моделировании иммунного ответа или процессов гибели и размножения микроорганизмов. Как правило математическим аппаратом таких моделей являются дифференциальные уравнения с запаздыванием.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\dot{x} = \sum_{i=0}^{n} a_i \, x(t - \tau_i)$$

С начальными условиями:

$$x(t_0) = x^0; \qquad x(s) = y^0, \, t_0 - \max\{\tau_i\} \leqslant s < t_0.$$

$$\tau_0 = 0, \qquad \tau_i > 0, \; i = \overline{1, n}$$

Пусть известны идеальные (без помех) результаты наблюдений в узловых точках.

$$\{t_j; x_j\}_{j=0}^{k}$$

Пусть также известны начальные условия x^0, y^0.
Требуется восстановить вектор параметров $(a_0, ..., a_n)$, породивший данный выход.

Изберем следующий простой, но эффективный метод решения. Производную приближаем по двум узлам.

$$\dot{x}_j \approx \frac{x(t_{j+1}) - x(t_j)}{\delta} =: d_j$$

В матричной форме получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} x(t_0 - \tau_0) & ... & x(t_0 - \tau_n) \\ x(t_1 - \tau_0) & ... & x(t_1 - \tau_n) \\ ... & ... & ... \\ x(t_{k-1} - \tau_0) & ... & x(t_{k-1} - \tau_n) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ ... \\ d_{k+1} \end{pmatrix}$$

§ 2. Проблемы

При решении задачи идентификации мы сталкиваемся с естественно возникающими проблемами.

2.1. Существование и единственность

Если $k < n + 1$, то система решается неоднозначно. Если $k > n+1$, то система, вообще говоря, несовместна и под решением мы понимаем псевдорешение. Возможно, что $rank(X) < n + 1$, и тогда система имеет бесконечно много решений.

2.2. Сходимость метода

Сходится ли метод при стремлении к нулю временного интервала между наблюдениями.

2.3. Неоднозначность восстановления

Разный набор входных параметров a_i может породить одинаковый выход. Такого рода примеры мы приведем в дальнейшем.

§ 3. Основная теорема

Если

$$rank \begin{pmatrix} x(t_0-\tau_0) & ... & x(t_0-\tau_n) \\ \dot{x}(t_0-\tau_0) & ... & \dot{x}(t_0-\tau_n) \\ ... & ... & ... \\ x^{(n)}(t_0-\tau_0) & ... & x^{(n)}(t_0-\tau_n) \end{pmatrix} = n+1,$$

то система уравнений

$$\begin{pmatrix} x(t_0-\tau_0) & ... & x(t_0-\tau_n) \\ x(t_0-\tau_0+\delta) & ... & x(t_0-\tau_n+\delta) \\ ... & ... & ... \\ x(t_0-\tau_0+n\delta) & ... & x(t_0-\tau_n+n\delta) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ ... \\ d_n \end{pmatrix}$$

имеет единственное решение, причем при стремлении к нулю временного интервала между наблюдениями вектор параметров стремится к вектору входных параметров, то есть

$$\delta \to 0, \qquad \|\widetilde{a} - a\| \to 0.$$

§ 4. Иллюстрация к теореме

Проиллюстрируем идею, лежащую в основе теоремы на примере задачи идентификации двух параметров

$$\begin{pmatrix} x(t_0-\tau_0) & x(t_0-\tau_n) \\ x(t_0-\tau_0+\delta) & x(t_0-\tau_n+\delta) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t_0-\tau_0) & x(t_0-\tau_n) \\ x(t_1-\tau_0+\delta) & x(t_1-\tau_n+\delta) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x(t_0-\tau_0) & x(t_0-\tau_1) \\ x(t_0-\tau_0)+\Delta x(t-\tau_0) & x(t_0-\tau_1+\Delta x(t-\tau_1) \end{pmatrix}$$

$$\frac{x(t_0-\tau_0)+\Delta x(t_0-\tau_0)}{x(t_0-\tau_0)} = \frac{x(t_0-\tau_1)+\Delta x(t_0-\tau_1)}{x(t_0-\tau_1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\dot{x}(t_0-\tau_0)*\delta+o(\delta)}{x(t_0-\tau_0)} = \frac{\dot{x}(t_0-\tau_1)*\delta+o(\delta)}{x(t_0-\tau_1)}$$

$$\delta \to 0 \quad \frac{\dot{x}(t_0-\tau_0)}{x(t_0-\tau_0)} = \frac{\dot{x}(t_0-\tau_1)}{x(t_0-\tau_1)}$$

$$rank\begin{pmatrix} x(t_0-\tau_0) & x(t_0-\tau_n) \\ x(t_1-\tau_0+\delta) & x(t_1-\tau_n+\delta) \end{pmatrix} =$$

$$rank\begin{pmatrix} x(t_0-\tau_0) & x(t_0-\tau_1) \\ \dot{x}(t_1-\tau_0) & \dot{x}(t_1-\tau_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = a_0\,x + a_1\,x(t-1), \\ x(s) = 1, -1 \leqslant s \leqslant 0 \end{cases}$$

При $a_0 = 1,\ a_1 = 1$ на $[0;1]$ методом шагов находим аналитическое решение $x(t) = 2e^t - 1$.

$$\{\delta j;\quad 2e^{\delta j}-1\}_{j=0}^{k} \qquad [0;1]$$

$$rank\begin{pmatrix} x(t_0-\tau) & x(t_0-\tau) \\ \dot{x}(t_0-\tau) & \dot{x}(t_0-\tau) \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} 2e^t-1 & 1 \\ 2e^t & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{pmatrix} x(t_0-\tau_0) & x(t_0-\tau_n) \\ x(t_0-\tau_0+\delta) & x(t_0-\tau_n+\delta) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2e^{\delta}-1 & 1 \\ 2e^{2\delta}-1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2e^{\delta}(e\delta-1)}{\delta} \\ \frac{2e^{2\delta}(e\delta-1)}{\delta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Автор выражает благодарность А.В. Киму и В.Г. Пименову за помощь и поддержку при подготовке статьи.