Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2005. Ѓ4(34)

УДК 517.934

© **И.Н. Баранова**
ibaranova@udm.ru

# К ПРИМЕРУ Л.С. ПОНТРЯГИНА [1]

**Ключевые слова**: дифференциальная игра, преследователь, убегающий.

**Abstract**. The paper gives a sufficient condition of capture by group of the same inertial objects of one escaping, in linear differential game, provided that one of roots of the characteristic equation is positive.

## Введение

В 1976 году Б.Н. Пшеничным [1] были получены необходимые и достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего в задаче простого преследования с равными возможностями всех участников. Естественным обобщением данной задачи является пример Л.С. Понтрягина [2].

В случае, если все корни характеристического уравнения имеют неположительные вещественные части задача рассматривалась в работе [3], если корни чисто мнимые, — в статье [4].

В данной работе рассматривается пример Л.С. Понтрягина со многими участниками при условии, что среди корней характеристического уравнения есть положительный. Получены достаточные условия поимки.

[1]Работа выполнена при поддержке программы ґУниверситеты РоссииЄ(грант 34126).

## 1. Постановка задачи

В пространстве $R^k$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma$ $n+1$ лиц: $n$ преследователей $P_1,\ldots,P_n$ и убегающий $E$.

Движение каждого из преследователей $P_i$ описывается уравнением

$$\times_i^{(l)}+a_{l-1}x_i^{(l-1)}+\cdots+a_2\ddot{x}_i+a_1\dot{x}_i+a_0x_i=u_i,\ \|u_i\|\leqslant 1. \quad (1.1)$$

Закон движения убегающего $E$ имеет вид

$$y^{(l)}+a_{l-1}y^{(l-1)}+\cdots+a_2\ddot{y}+a_1\dot{y}+a_0y=v,\ \|v\|\leqslant 1. \quad (1.2)$$

Здесь $x_i,y,u_i,v\in R^k$, $a_0,\ldots,a_{l-1}\in R^1$. При $t=0$ заданы начальные позиции преследователей

$$x_i(0)=x_i^0,\ \dot{x}_i(0)=x_i^1,\ldots,x_i^{(l-1)}(0)=x_i^{l-1}$$

и убегающего

$$y(0)=y_0,\ \dot{y}(0)=y_1,\ldots,y^{(l-1)}(0)=y_{l-1},$$

причём $x_i^0\neq y_0$ для всех $i$.

Пусть $z_i^0=x_i^0-y_0, z_i^1=x_i^1-y_1,\ldots,z_i^{l-1}=x_i^{l-1}-y_{l-1}$.

Определение 1.1. Будем говорить, что в игре $\Gamma$ происходит поимка, если существуют $T>0$, функции $u_i(t)=u_i(t,z_i^0,\ldots,z_i^{l-1},v_t(\cdot))$ такие, что $\|u_i(t)\|\leqslant 1$, и для любой измеримой функции $v$ ($\|v(t)\|\leqslant 1$ для всех $t$) найдутся момент $\tau\in[0,T]$ и номер $q$ такие, что

$$x_q(\tau)=y(\tau).$$

Здесь $v_t(\cdot)=\{v(s),s\in[0,t]\}$.

## 2. Решение задачи

В системах (1.1), (1.2) сделаем замену $z_i = x_i - y$.

Получим систему

$$z_i^{(l)} + a_{l-1} z_i^{(l-1)} + \cdots + a_2 \ddot{z}_i + a_1 \dot{z}_i + a_0 z_i = u_i - v. \qquad (2.1)$$

$$z_i(0) = z_{i0}^0, \ldots, z_i^{(l-1)}(0) = z_{il-1}^0.$$

Обозначим через $\varphi_q(t), q = 0, 1, \ldots, l-1$ решения уравнения

$$w^{(l)} + a_1 w^{(l-1)} + \cdots + a_l w = 0$$

с начальными условиями

$$w(0) = 0, \ldots, w^{(q-1)}(0) = 0, w^{(q)}(0) = 1,$$
$$w^{(q+1)}(0) = 0, \ldots, w^{(l-1)}(0) = 0.$$

П р е д п о л о ж е н и е 2.1. Уравнение

$$\lambda^l + a_1 \lambda^{l-1} + \cdots + a_l = 0$$

имеет корень с положительной вещественной частью.

П р е д п о л о ж е н и е 2.2. Для всех $t > 0$ справедливо неравенство $\varphi_{l-1}(t) \geqslant 0$.

Из предположения 2.2 следует, что среди корней с максимальной вещественной частью существует вещественный корень, который будем обозначать $\lambda_s$, а его кратность $k_s$.

Пусть $\gamma = k_s - 1$, $D_1(0) = \{z | \|z\| \leqslant 1\}$. Определим функцию $\lambda : D_1(0) \to R^1$ вида

$$\lambda(\xi, v) = \sup\{\lambda | \lambda \geqslant 0, -\lambda\xi \in D_1(0) - v\},$$

где $\xi$ фиксированный ненулевой вектор $R^k$. Пусть далее

$$\hat{z}_i(t) = \varphi_0(t) z_{i0}^0 + \varphi_1(t) z_{i1}^0 + \cdots + \varphi_{l-1}(t) z_{il-1}^0,$$
$$\xi_i(t) = e^{-\lambda_s t} \hat{z}_i(t)/(t+1)^\gamma.$$

Л е м м а 2.1. *Существует $a > 0$ такое, что*

$$\int\limits_0^t \frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)e^{-\lambda_s t}}{(t+1)^\gamma} d\tau \to a > 0$$

*при $t \to \infty$.*

Доказательство леммы проводится непосредственным интегрированием.

Л е м м а 2.2. *Пусть вектор-функции $\eta_i : [0, \infty) \to R^k$, $i = 1, \ldots, n$ таковы, что $\eta_i(t) \neq 0$ для всех $t \geqslant 0$, и*

$$\delta = \inf_t \min_{\|v\| \leqslant 1} \max_i \lambda(\eta_i(t), v) > \frac{n}{a}.$$

*Тогда существует момент $T_0$ такой, что для любой измеримой функции $v : [0, \infty) \to D_1(0)$ найдется номер $j$, что $h_j(T_0) \leqslant 0$. Здесь*

$$h_i(t) = 1 - e^{-\lambda_s t} \int\limits_0^t \frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma} \lambda(\eta_i(t), v(\tau)) d\tau.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функции $h_i$ непрерывны,

$$h_i(0) = 1$$

и

$$\sum_{i=1}^n h_i(t) = n - \sum_{i=1}^n e^{-\lambda_s t} \int\limits_0^t \frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma} \lambda(\eta_i(t), v(\tau)) d\tau =$$

$$= n - \int\limits_0^t e^{-\lambda_s t} \frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma} \sum_{i=1}^n \lambda(\eta_i(t), v(\tau)) d\tau \leqslant$$

$$\leqslant n - \delta \int\limits_0^t e^{-\lambda_s t} \frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma} d\tau,$$

так как $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda(\eta_i(t),v(\tau)) \geqslant \max\limits_i \lambda(\eta_i(t),v(\tau)) \geqslant \delta > 0$ для всех $v,\tau$.

При $t\to\infty$

$$\int\limits_0^t e^{-\lambda_s t}\frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma}d\tau \to a.$$

Следовательно,

$$n-\delta\int\limits_0^t e^{-\lambda_s t}\frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma}d\tau \to n-\delta a<0$$

в силу условия. Поэтому существует $T_0$ такой, что $h_j(T_0)\leqslant 0$ при некотором $j$. Лемма доказана.

Пусть далее

$$T_0=\min\left\{t\geqslant 0: \inf_{v_t(\cdot)}\max_i\int\limits_0^t \frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma}\lambda_i(\xi_i(t),v(\tau))d\tau\geqslant 1\right\}.$$

В силу леммы 2 $T_0<\infty$.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть выполнены предположения 2.1, 2.2 и выполнено неравенство*

$$\inf_t\min_{\|v\|\leqslant 1}\max_i\lambda(\xi_i(t),v)>\frac{n}{a}.$$

*Тогда в игре* $\Gamma$ *происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(t), t\in[0,T_0]$ – произвольное допустимое управление убегающего $E$, $t_1$ – наименьший положительный корень функции $h$ вида

$$h(t)=1-\max_i\int\limits_0^t \frac{\varphi_{l-1}(T_0-\tau)}{(T_0+1)^\gamma}\lambda_i(\xi_i(T_0),v(\tau))d\tau.$$

Зададим управление преследователей $P_i$ следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda_i(\xi_i(T_0), v(t))\xi_i(T_0),\ \ t \in [0, T_0].$$

Считаем, что $\lambda_i(\xi_i(T_0), v(t)) = 0$ при $t \in [t_1, T_0]$. Подставляя $u_i$ в систему (2.1), получим

$$\frac{e^{-\lambda_s T_0} z_i(T_0)}{(T_0+1)^\gamma} = \xi_i(T_0) - \int\limits_0^{T_0} \frac{\varphi_{l-1}(T_0-\tau)}{(T_0+1)^\gamma} \lambda_i(\xi_i(T_0), v(\tau))\xi_i(T_0) d\tau =$$

$$= \xi_i(T_0)\left(1 - \int\limits_0^{T_0} \frac{\varphi_{l-1}(T_0-\tau)}{(T_0+1)^\gamma} \lambda_i(\xi_i(T_0), v(\tau)) d\tau\right) =$$

$$= \xi_i(T_0)\left(1 - \int\limits_0^{t_1} \frac{\varphi_{l-1}(T_0-\tau)}{(T_0+1)^\gamma} \lambda_i(\xi_i(T_0), v(\tau)) d\tau\right).$$

Из леммы 2 следует, что $z_i(T_0) = 0$ при некотором $i$. Теорема доказана.

П р и м е р 2.1. Пусть $k = 2$, $n = 3$, система (2.1) имеет вид $(b > 0)$

$$z_i^{(3)} - b\ddot{z}_i = 0.$$

Тогда $\varphi_0(t) = 1$, $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = \frac{e^{bt}-bt-1}{b^2}$, $\lambda_s = b$, $k_s = 1$.

$$\xi_i(t) = e^{-bt}\left(\varphi_0(t)z_{i0}^0 + \varphi_1(t)z_{i1}^0 + \varphi_2(t)z_{i2}^0\right) =$$
$$= \frac{z_{i2}^0}{b^2} + te^{-bt}\left(z_{i1}^0 - \frac{z_{i2}^0}{b}\right) - e^{-bt}\left(z_{i0}^0 - \frac{z_{i2}^0}{b^2}\right).$$

$$a = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \varphi_2(t-\tau)e^{-bt} d\tau = \frac{1}{b^3}.$$

У т в е р ж д е н и е 2.1. *Пусть* $b = \left(0, \frac{1}{3}\right)$,

$$z^0_{12} = (0,1),\ z^0_{22} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right),\ z^0_{32} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$z^0_{i1} = \frac{z^0_{i2}}{b},\ z^0_{i0} = \frac{z^0_{i2}}{b^2}.$$

*Тогда в игре* $\Gamma$ *происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В нашем случае $\xi_i(t) = \frac{z^0_{2i}}{b^2}$,

$$\delta = \inf_i \min_v \max_i \lambda(\xi_i(t), v) = b^2,$$

и поэтому выполнено условие теоремы $\delta > \frac{n}{a}$.

У т в е р ж д е н и е 2.2. *Пусть* $b > 1$,

$$z^0_{12} = (0,1),\ z^0_{22} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right),\ z^0_{32} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$z^0_{i1} = \frac{z^0_{i2}}{b},\ z^0_{i0} = \frac{z^0_{i2}}{b^2}.$$

*Тогда в игре* $\Gamma$ *происходит уклонение от встречи.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим управление убегающего следующим образом: $v(t) = 0,\ t \in [0, \infty)$. Тогда

$$b^2 e^{-bt} z_2(t) = z^0_{i2} + e^{-bt} \int_0^t \varphi_2(t-\tau) u_i(\tau) d\tau.$$

Поэтому

$$\|b^2 e^{-bt} z_i(t)\| \geqslant \|z^0_{i2}\| - b^2 e^{-bt} \int_0^t \varphi_2(t-\tau) d\tau =$$

$$= 1 - b^2 e^{-bt} \int_0^t \varphi_2(t-\tau) d\tau. \tag{2.2}$$

Пусть

$$f(t)=b^2e^{-bt}\int\limits_0^t \varphi_2(t-\tau)d\tau=$$

$$=b^2e^{-bt}\int\limits_0^t\left(\frac{e^{b(t-\tau)}-b(t-\tau)-1}{b^2}\right)d\tau=$$

$$=\frac{1-e^{-bt}}{b}-\frac{bt^2e^{-bt}}{2}-te^{-bt}.$$

$$f(0)=0,\ \lim_{t\to\infty}f(t)=\frac{1}{b},\ f'(t)=\frac{b^2t^2e^{-bt}}{2}>0$$

для всех $t>0$. Следовательно $f$ – монотонно возрастающая функция. Отсюда $0\leqslant f(t)<\frac{1}{b}<1$ (т.к. $b>1$) для всех $t\geqslant 0$. Из последнего неравенства и (2.2) следует, что $\|b^2e^{-bt}z_i(t)\|>0$ для всех $t>0$ и всех $i=1,2,3$. Значит $z_i(t)\neq 0$, что и доказывает утверждение.

## Список литературы


1. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами// Кибернетика. 1976. Ѓ3. С. 145-146.
2. Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. М.:Наука, Т.2. 1988.
3. Петров Н. Н. Теория игр. Ижевск. Изд-во Удм. ун-та, 1997.
4. Благодатских А. И. Об одном колебательном конфликтно управляемом процессе со многими участниками// Известия РАН. Теория и системы управления. 2005. Ѓ2. С. 43-45.