Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2005. Ґ4(34)

УДК 517.934

© **Л.С. Чиркова**
lmvstk@lmvstk.udm.ru

УКЛОНЕНИЕ ОТ ГРУППЫ ИНЕРЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ

Ключевые слова: групповое преследование, фазовые ограничения, уклонение от встречи

Abstract. It is proved the possibility of an escape of the group of pursuers from an evader in the third order differential game with the condition when all participants have same dynamic and inertial possibility.

Введение

В 1976 году Б.Н. Пшеничным в работе [1] были получены необходимые и достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего в задаче простого преследования с равными возможностями всех участников. Было показано, что поимка происходит тогда и только тогда, когда вектор начальных позиций убегающего принадлежит внутренности выпуклой оболочки начальных позиций преследователей. В работах [2,3,4] рассматривалась задача преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что все участники обладают равными возможностями, а закон движения каждого из участников - дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. В работах [2,3] было получено достаточное условие уклонения от встречи при условии дискриминации преследователей. В работе [4] было получено достаточное условие поимки убегающего при условии его дискриминации. В данной работе получены достаточные условия уклонения от встречи при условии, что все участники обладают равными возможностями, преследователи дискриминированы, закон движения каждого из участников – дифференциальное уравнение третьего порядка.

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающий E. Закон движения каждого из преследователей имеет вид:

$$\begin{array}{lll} \dddot{x}_i = u_i, & \|u_i\| \leqslant 1, & \\ x_i(0) = x_i^0, & \dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0, & \ddot{x}_i(0) = \ddot{x}_i^0. \end{array} \tag{1.1}$$

Закон движения убегающего имеет вид:

$$\begin{array}{lll} \dddot{y} = v, & \|v\| \leqslant 1, & \\ y(0) = y^0, & \dot{y}(0) = \dot{y}^0, & \ddot{y}(0) = \ddot{y}^0. \end{array} \tag{1.2}$$

Вместо систем (1.1), (1.2) рассмотрим систему:

$$\begin{array}{ll} \dddot{z}_i = u_i - v, & z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0, \\ \dot{z}_i(0) = \dot{z}_i^0 = \dot{x}_i^0 - \dot{y}^0, & \ddot{z}_i(0) = \ddot{z}_i^0 = \ddot{x}_i^0 - \ddot{y}^0, \end{array} \tag{1.3}$$

полученную заменой $z_i = x_i - y$.

Пусть $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел , $\mathbb{N}_q = \{1, \dots, q\}$, $Q_m^r = \{r+1, \dots, r+m\}$. Обозначим через $\mathrm{Int}X$, ∂X, $\mathrm{co}X$ соответственно внутренность, границу и выпуклую оболочку множества $X \subset \mathbb{R}^k$.

Пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leqslant 1\}$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Говорят, из начального состояния $z^0 = (z_1^0, \dot{z}_1^0, \ddot{z}_1^0, \dots, z_n^0, \dot{z}_n^0, \ddot{z}_n^0)$ в дифференциальной игре (1.3) возможно убегание, если по любым измеримым функциям $u_i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant +\infty$, $u_i(t) \in S$, $i \in \mathbb{N}_n$, можно построить такую измеримую функцию $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant +\infty$, $v(t) \in S$, что $\|z_i(t)\| \neq 0$ для всех $i \in \mathbb{N}_n$, $t \geqslant 0$. При этом в момент $t \geqslant 0$ управление убегающего формируется на основе информации о состоянии $z^0 = (z_1(s), \dot{z}_1(s), \ddot{z}_1(s), \dots, z_n(s), \dot{z}_n(s), \ddot{z}_n(s))$

при $s \leqslant t$ и о значениях $u_i(t)$, $i \in \mathbb{N}_n$ в тот же момент времени. Управление преследователей в момент $t \geqslant 0$ формируется на основе информации о состоянии $z(t)$ дифференциальной игры (1.3).

Обозначим данную игру через Γ.

2. Решение задачи

Т е о р е м а 2.1. *Пусть*

$$0 \,\overline{\in}\, \mathrm{co}\{\bigcup_{i=1}^{n} \dddot{z}_i^0 \}.$$

Тогда в игре Γ *из начального состояния*

$$z^0 = (z_1^0, \dot{z}_1^0, \ddot{z}_1^0, \ldots, z_n^0, \dot{z}_n^0, \ddot{z}_n^0)$$

возможно убегание.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 \,\overline{\in}\, \mathrm{co}\{ \bigcup\limits_{i=1}^{n} \ddot{z}_i^0 \}$.

На основании теоремы об отделимости выпуклых множеств существуют вектор $p \in \partial S$ и число $\epsilon > 0$ такие, что

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} (\ddot{z}_i^0, p) \leqslant -2\epsilon. \tag{2.1}$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered} \eta_1(t) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (\|z_i(t)\|), \quad \eta_2(t) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (\|\dot{z}_i(t)\|), \\ \delta = \min\{1, \epsilon, \sqrt{\eta_1(0)}, \sqrt{\eta_2(0)}\}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Случай 1. Пусть $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (z_i^0, p) \leqslant 0$, $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$. Зададим управление убегающего следующим образом $v(t) = p$,

$t \in [0, +\infty)$. Тогда

$$z_i(t) = z_i^0 + t \cdot \dot{z}_i^0 + \frac{t^2}{2} \cdot \ddot{z}_i^0 + \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^3}{3!} \cdot (u_i(\tau) - p) d\tau,$$

$$(z_i(t), p) = (z_i^0, p) + t \cdot (\dot{z}_i^0, p) + \frac{t^2}{2} \cdot (\ddot{z}_i^0, p) + \qquad (2.3)$$

$$+ \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^3}{3!} \cdot (u_i(\tau) - p, p) d\tau < 0,$$

так как $(z_i^0, p) \leqslant 0$ и $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ в силу предположения, $(\ddot{z}_i^0, p) \leqslant -2\epsilon$ в силу неравенства (2.1), $(u_i(\tau) - p, p) \leqslant 0$ из определения вектора p .

В случае 1 убегание доказано.

Случай 2. Предположим, что $(\dot{z}_l^0, p) > 0$ для некоторого $l \in N_n$ и $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in N_n \setminus \{l\}$. При этом $\max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} (z_i^0, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0 .

Пусть

$$\tau_1 = \frac{\delta}{2^2}, \ \delta_1 = \delta \frac{\tau_1}{2} + \frac{(\tau_1)^3}{2 \cdot 3!}. \qquad (2.4)$$

Справедливы неравенства $\eta_1(0) > \delta_1$, $\eta_2(0) > \delta_1$. Положим $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 либо момент, в который $\|\dot{z}_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(\dot{z}_l(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$. Пусть $t_1 < +\infty$, тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление $v(s)$ будем выбирать специальным образом, а при $t \geqslant t_1 + \tau_1$ опять положим равным p . При так выбранном управлении убегающего E преследователь P_i , $i \in N_n \setminus \{l\}$, по существу не влияет на исход игры. Действительно, из определения числа τ_1 и неравенства (2.1) следеут, что

$$(z_i(t), p) = (z_i^0(t), p) + t \cdot (\dot{z}_i^0(t), p) +$$

$$+\frac{t^2}{2}\cdot(\ddot{z}_i^0,p)+\int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^3}{3!}\cdot(u_i(\tau)-v(\tau),p)d\tau=$$

$$=(z_i^0,p)+t\cdot(\dot{z}_i^0(t),p)+$$

$$+\frac{t^2}{2}\cdot(\ddot{z}_i^0,p)+\int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^3}{3!}\cdot(u_i(\tau)-p,p)d\tau<0$$

при любом $t \geqslant 0$ и любых управлениях $u_i(s)$, $s\in[0,+\infty)$, $v(s)$, $s\in[t_1,t_1+\tau_1)$. На основе рассуждений, приведенных в случае 1, заключаем, что $\|z_i(t)\|\neq 0$ при $t\geqslant 0$, $i\in N_n\setminus\{l\}$.

Так как $(\dot{z}_l(t_1),p)>0$, $(\ddot{z}_l(t_1),p)<-\delta$, то при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t_1,t_1+\tau_1]$:

$$(z_l(t_1+\tau_1),p)=(z_l(t_1),p)+\tau_1\cdot(\dot{z}_l(t_1),p)+$$

$$+\frac{\tau_1^2}{2}\cdot(\ddot{z}_l(t_1),p)+\int\limits_{t_1}^{t_1+\tau_1}\frac{(t_1+\tau_1-\tau)^3}{3!}(u_l(\tau)-v(\tau),p)d\tau<$$

$$<\delta_1\tau_1-\delta\frac{\tau_1^2}{2}-\frac{(t_1+\tau_1-t_1)^4}{2\cdot 3!}=0.$$

Следовательно, в момент $t=t_1+\tau_1$ состояние дифференциальной игры (1.3) соответсвует рассмотренному выше случаю 1. Таким образом, если по любому управлению $u_l(s)$ можно построить управление $v(s)$, $s\in[t_1,t_1+\tau_1)$, такое, что $\|z_l(t)\|\neq 0$ при $t\in[t_1,t_1+\tau_1]$, то разрешимость задачи убегания из начального состояния z^0 будет доказана.

Предположим, что

$$(z_l(t_1),\dot{z}_l(t_1))=-\|z_l(t_1)\|\cdot\|\dot{z}_l(t_1)\|. \tag{2.5}$$

Векторы $z_l(t_1)$, $\dot{z}_l(t_1)$ линейно зависимы, поэтому существует вектор $\psi\in\partial S$ такой, что

$$(z_l(t_1),\psi)=(\dot{z}_l(t_1),\psi)=0.$$

Пусть $\epsilon_1 \in (0, \tau_1)$ - некоторое число такое, что при произвольных управлениях $u_l(s)$, $v(s)$, $s \in [t_1, t_1 + \epsilon_1]$, справедливо неравенство $(\dot{z}_l(t_1 + \epsilon_1), p) > 0$. Покажем, что если на отрезке $[t_1, t_1 + \epsilon_1]$ управление $v(s)$ выбирать так, чтобы

$$(v(s), \psi) = \begin{cases} \quad 1, & \text{если } (u_l(s), \psi) \leqslant 0, \\ -1, & \text{если } (u_l(s), \psi) > 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

то существует такое число $\gamma_1 \in [0, \epsilon_1)$, что

$$(z_l(t_1 + \gamma_1), \dot{z}_l(t_1 + \gamma_1)) \neq -\|z_l(t_1 + \gamma_1)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_1 + \gamma_1)\|. \tag{2.7}$$

При $t \geqslant t_1$ введем в рассмотрение функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и

$$f_3(t) = (\ddot{z}_l(t), \psi) = \int\limits_{t_1}^{t} (u_l(s) - v(s), \psi) ds. \tag{2.8}$$

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \epsilon_1$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{gathered} \dot{f}_1(t) = f_2(t), \quad \dot{f}_2(t) = f_3(t), \\ \dot{f}_3(t) = (u_l(t) - v(t), \psi). \end{gathered} \tag{2.9}$$

Причем $f_1(t_1) = f_2(t_1) = f_3(t_1) = 0$. Из уравнений (2.9) следует, что $f_3(t) \not\equiv 0$ на отрезке $[t_1, t_1 + \epsilon_1]$. Множество $G = \{t \in (t_1, t_1 + \epsilon_1) \ f_3(t) \neq 0\}$ непусто и открыто, поэтому представимо в виде $G = \bigcup\limits_j (\alpha_j, \beta_j)$, где $\{(\alpha_j, \beta_j)\}$ - взаимно не пересекающаяся не более чем счетная система интервалов. Пусть (α_j, β_j) - некоторый интервал из этой системы. Тогда $f_3(\alpha_j) = f_3(\beta_j) = 0$, $f_3(t) \neq 0$ на (α_j, β_j). Если $f_2(\alpha_j) \neq 0$, то $\dot{f}_2(t) = f_3(t) \neq 0$ (в силу определения управления v) на (α_j, β_j) и $f_2(\beta_j) \neq 0$.

Следовательно, соотношение (2.7) выполнено при $t_1 + \gamma_1 = \beta_j$.

Если

$$(z_l(t_1), \dot{z}_l(t_1)) \neq -\|z_l(t_1)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_1)\|,$$

то полагаем $\gamma_1 = 0$.

Итак, управление $v(s)$ убегающего E на $[t_1, t_1+\gamma_1)$ выбираем в соответсвии с правилом (2.6) и в момент $t_1+\gamma_1$ выполнено (2.7). Далее полагаем $v(s) = u_l(s)$ при $s \in [t_1+\gamma_1, t_1+\tau_1)$. Тогда

$$z_l(t) = z_l(t+\gamma_1) + \int\limits_0^{t-t_1-\gamma_1} \dot{z}_l(t_1+\gamma_1) ds.$$

при $t_1 \leqslant t \leqslant t_1+\tau_1$, следовательно, $\|z_l(t)\| \neq 0$.

Таким образом, по любой измеримой функции $u_l(s), u_l(s) \in S$, можно построить такую измеримую функцию $v(s) \in S$, что $\|z_l(t)\| \neq 0$ при $t \in [t_1, t_1+\tau_1]$. Возможность убегания в случае 2 доказана.

Случай 3. Предположим, что $(z_l^0, p) > 0$ для некоторого $l \in N_n$ и $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in N_n \setminus \{l\}$. При этом $\max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} (\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

Пусть

$$\tau_1 = \frac{\delta}{2^2},\ \delta_1 = \delta\frac{\tau_1^2}{2} + \frac{(\tau_1)^4}{2 \cdot 3!}. \tag{2.10}$$

Справедливы неравенства $\eta_1(0) > \delta_1$, $\eta_2(0) > \delta_1$. Положим $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 либо момент, в который $\|z_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(z_l(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$. Пусть $t_1 < +\infty$, тогда на полуинтервале $[t_1, t_1+\tau_1)$ управление $v(s)$ будем выбирать специальным образом, а при $t \geqslant t_1+\tau_1$ опять положим равным p. При так выбранном управлении убегающего E преследователь P_i, $i \in N_n \setminus \{l\}$, по существу не влияет на исход игры. Это показано в случае 2.

Так как $(z_l(t_1), p) > 0$, $(\dot{z}_l(t_1), p) < 0$, то при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t_1, t_1+\tau_1]$ имеет место

$$(z_l(t_1+\tau_1), p) = (z_l(t_1), p) + \tau_1 \cdot (\dot{z}_l(t_1), p) +$$

$$+\frac{\tau_1^2}{2}\cdot(\ddot{z}_l(t_1),p)+\int\limits_{t_1}^{t_1+\tau_1}\frac{(t_1+\tau_1-\tau)^3}{3!}(u_l(\tau)-v(\tau),p)d\tau<$$

$$\delta_1-\delta\cdot\frac{\tau_1^2}{2}-\frac{\tau_1^4}{2\cdot 3!}=0.$$

Следовательно, в момент $t=t_1+\tau_1$ состояние дифференциальной игры (1.3) соответствует рассмотренному выше случаю 1. Таким образом, если по любому управлению $u_l(s)$ можно построить управление $v(s)$, $s\in[t_1,t_1+\tau_1)$, такое, что $\|z_l(t)\|\neq 0$ при $t\in[t_1,t_1+\tau_1]$, то разрешимость задачи убегания из начального состояния z^0 будет доказана.

Построим управление $v(s)$, $s\in[t_1,t_1{+}\tau_1)$, таким же образом, как в случае 2. Все рассуждения при построении управления убегающего E в данном случае аналогичны.

Случай 4a. Предположим, что $(z_l^0,p)>0$ для некоторого $l\in N_n$ и $(z_i^0,p)\leqslant 0$ для любого $i\in N_n\setminus\{l\}$. При этом $(\dot{z}_j^0,p)>0$ для некоторого $j\in N_n\setminus\{l\}$ и $(\dot{z}_i^0,p)\leqslant 0$ для любого $i\in N_n\setminus\{j\}$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0. Пусть

$$\tau_1=\frac{\delta}{2^2},\ \delta_1=\delta\frac{\tau_1^2}{2}+\frac{(\tau_1)^4}{2\cdot 3!},\tau_2=\frac{\delta}{2^4},\ \delta_2=\delta\frac{\tau_1}{2}+\frac{(\tau_1)^3}{2\cdot 3!}. \qquad (2.11)$$

Справедливы неравенства $\eta_{1,2}(0)>\delta_1$, $\eta_{1,2}(0)>\delta_2$.

Определим $v(t)=p$, $t\in[0,t_1)$, где t_1 либо момент, в который $\|z_l(t_1)\|=\delta_1$ и $(z_l(t_1),p)>0$, либо $+\infty$. Пусть $t_1<+\infty$, тогда на полуинтервале $[t_1,t_1{+}\tau_1)$ управление $v(s)$ будем выбирать специальным образом и с учетом поведения преследователя P_j. Если на полуинтервале $[t_1,t_1+\tau_1)$ не выполнено равенство $\|\dot{z}_j(t)\|=\delta_2$, то управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 3. Затем положим $v(s)=p$, $s\geqslant t_1+\tau_1$, до тех пор, пока $s<t_2$, где t_2 - момент, в который выполнено равенство $\|\dot{z}_j(t_2)\|=\delta_2$, $t_2<+\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, что и в случае 2. Только вместо δ_1 нужно взять δ_2 . Далее положить $v(s) = p$, $s \geqslant t_2 + \tau_1$.

Рассмотрим ситуацию, когда сближение с j -тым преследователем происходит раньше, чем с l -тым. Положим $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 либо момент, в который $\|\dot{z}_j(t_1)\| = \delta_2$ и $(\dot{z}_j(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$. Пусть $t_1 < +\infty$, тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление $v(s)$ будем выбирать специальным образом и с учетом поведения преследователя P_l . Если на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ не выполнено равенство $\|z_l(t)\| = \delta_1$, то управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 2. Затем положим $v(s) = p$, $s \geqslant t_1 + \tau_1$, до тех пор, пока $s < t_2$, где t_2 - момент, в который выполнено равенство $\|z_l(t_2)\| = \delta_1$, $t_2 < +\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, что и в случае 3. Только вместо δ_1 нужно взять δ_2 . Далее положить $v(s) = p$, $s \geqslant t_2 + \tau_1$.

Пусть $t_2 \in (t_1, t_1 + \tau_1)$. Полагаем $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 либо момент, в который $\|z_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(z_l(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$. Пусть $t_1 < +\infty$, тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление $v(s)$ будем выбирать специальным образом и с учетом поведения преследователя P_j . Сначала на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 3, до тех пор, пока $s < t_2$, где t_2 - момент, в который выполнено равенство $\|\dot{z}_j(t_2)\| = \delta_3$, $t_2 < +\infty$ и $(\dot{z}_j(t_2), p) > 0$. Управление v после того, как настал момент t_2 нужно выбирать таким же образом, что и в случае 2. Только вместо δ_1 нужно взять δ_3 . $\delta_3 = \delta\frac{\tau_2}{2} + \frac{{\tau_2}^3}{2 \cdot 3!}$. Далее, когда встречи с j -м преследователем удалось избежать, выбрать управление v в соответствии со случаем 3, что позволит избежать поимки l -тым преследователем. Затем положить равным p .

По ходу доказательства ясно, что если j и l поменяем местами, то все маневры по обходу j -того преследователя нужно делать сначала в соответствии со случаем 2. Затем за период τ_2 нужно ґобойтиЄ l -того преследователя. Для этого надо поступать в соответсвии со случаем 3, но вместо δ_1 взять

$\delta_4 = \delta\frac{\tau_2{}^2}{2} + \frac{\tau_2{}^4}{2\cdot 3!}$. А после того, как маневр с l-преследователем будет завершен, выбирать управление как в случае 3. Затем положить равным p.

Покажем маневр уклонения в случае $t_1 = t_2$. Полагаем $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 момент, в который $\|z_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(z_l(t_1), p) > 0$. Сначала на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 3, до тех пор, пока не наступит момент t_2', такой, что $\|\dot{z}_j(t_2')\| = \delta_5$. Управление v после того, как настал момент t_2' нужно выбирать таким же образом, что и в случае 2. Только вместо δ_1 нужно взять δ_5, $\delta_5 = \delta \cdot \frac{\tau_2'}{2} + \frac{\tau^3_{2'}}{2\cdot 3!}$, а сам маневр осуществим за время $\tau_2' = \frac{\tau_2}{4}$. Далее, когда встречи с j-м преследователем удалось избежать, выбрать управление v в соответствии со случаем 3, что позволит избежать поимки l-тым преследователем. Затем положить равным p.

Остальные преследователи, кроме l-того и j-того, при так выбранном управлении не влияют на исход игры.

Случай 4б. Начальные условия здесь такие же, что и в предыдущем случае, только $l = j$. Пусть вначале управление $v(t) = p$, $t < t_1 = t_2$. Для доказательства убегания в данном случае возьмем такие δ_1, δ_2, что

$$\tau_1 = \frac{\delta}{2^2},\ \delta_1 = \frac{1}{2}(\delta\frac{\tau_1^2}{2} + \frac{(\tau_1)^4}{2\cdot 3!}),\ \delta_2 = \frac{1}{2}(\delta\frac{\tau_1}{2} + \frac{(\tau_1)^3}{2\cdot 3!}). \qquad (2.12)$$

Тогда на интервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ выполнено

$$(z_l(t_1 + \tau_1), p) = (z_l(t_1), p) + \tau_1 \cdot (\dot{z}_l(t_1), p) +$$

$$+\frac{\tau_1^2}{2} \cdot (\ddot{z}_l(t_1), p) + \int\limits_{t_1}^{t_1+\tau_1} \frac{(t_1 + \tau_1 - \tau)^3}{3!}(u_l(\tau) - v(\tau), p)d\tau <$$

$$< \delta_1 + \delta_2 \cdot \tau_1 - \delta \cdot \frac{\tau_1^2}{2} - 2 \cdot \frac{\tau_1^4}{4!} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\delta \cdot \frac{\tau_1^2}{2} + \frac{\tau_1^4}{2\cdot 3!} + (\delta \cdot \frac{\tau_1^2}{2} + \frac{\tau_1^3}{2\cdot 3!}) \cdot \tau_1) - \delta \cdot \frac{\tau_1^2}{2} - \frac{\tau_1^4}{2\cdot 3!} = 0.$$

В случае $t_1 \neq t_2$ применим маневр, описанный в случае 2 или 3, в зависимости от того, какой момент наступит раньше, t_1 или t_2. Доказательство убегания здесь будет такое же как и в случае 4а.

При так выбранном управлении убегающего E преследователь P_i, $i \in N_n \setminus \{l\}$, по существу не влияет на исход игры. Это показано в случае 2.

Далее имеет смысл ввести функции:

$$\Delta_1(\tau) = \delta \cdot \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{2 \cdot 3!}, \quad \Delta_2(\tau) = \delta \cdot \frac{\tau}{2} + \frac{\tau^3}{2 \cdot 3!}. \tag{2.13}$$

Случай 5. Предположим, что $(z_i^0, p) > 0$ для некоторого $i \in N_r$, $1 < r \leqslant n$ и $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in N_n \setminus N_r$. При этом $\max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} (\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j = 1, \ldots, q$, $q \leqslant r$, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q-1$, причем, если в момент $t' > 0$ для некоторого $l \in N_r$ $\|z_l(t')\| = \delta_j$, $(z_l(t'), p) > 0$, то $(z_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$, при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_1(t) = \delta_i$ и существует $l \in N_r$ такой, что $\|z_l(t_i)\| = \delta_i$, $(z_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-того сближения.

Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ выполнено $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(z_i(t_i), p) > 0$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим.

Положим

$$v(t) = p, \ t \in [0, +\infty) \ \setminus \ \bigcup_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i). \tag{2.14}$$

При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$

следующим образом:

$$\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}}, \quad \delta_1^i = \Delta_1(\tau_1^i). \tag{2.15}$$

Числа $\tau_i,\ i = 1, \ldots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \ldots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 = \sum_{i=1}^{q} \Big(\frac{\delta \cdot (\tau_1^i)^2}{2} + \frac{(\tau_1^i)^4}{2 \cdot 3!} \Big) < \frac{\delta^3}{8} + \frac{\delta^4}{192}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$ на отрезке $[0, t]$ и $v(s)$ на множестве $[0, t] \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i))$ справедливы неравенства $(\ddot{z}_i(t), p) < -\delta$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, n$, следовательно, сближение с преследователем P_i, $i \in N_n \setminus N_r$, не может произойти. Не ограничивая общности, далее считаем, что $q = n$, то есть сближение наступает с каждым преследователем. Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in N_n$ выполняются соотношения $\|z_i(t')\| = \delta_1^i$, $(z_i(t'), p) > 0$, $(\ddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$ $(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i - \delta \frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{(\tau_1^i)^4}{2 \cdot 3!} = 0$.

Положим $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$. Отметим, что $t_1 > 0$. Маневр уклонения определим рекуррентным образом. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены следующие соотношения $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$, $(z_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{+\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{+\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будут ґобходитьсяЄ преследователи $P_i, \ldots, P_n$.

Допустим, что $(z_i(t_i), \dot{z}_i(t_i)) = -\|z_i(t_i)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i)\|$. Тогда существует число $0 < \epsilon_i < \tau_i$ такое, что при произвольных $u_l(s)$, $l = i, \ldots, n$, $v(s)$, $s \in [t_i, t_i + \epsilon_i]$, справедливы неравенства

$$\min_{\tau \in [0, \epsilon_i]} \|z_l(t_i + \tau)\| > \delta_i^{i+1}\ \forall\ l \in N_n \setminus N_r,\ (z_i(t_i + \epsilon_i), p) > 0.$$

Векторы $z_i(t_i)$, $\dot{z}_i(t)$ линейно зависимы, поэтому существует вектор $\psi_i \in \partial S$ такой, что $(z_i(t_i), \psi_i) = (\dot{z}_i(t_i), \psi_i) = 0$. На полуинтервале $[t_i, t_i + \gamma_i)$ управление $v(s)$ выбираем так, чтобы

$$(v(s), \psi_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } (u_l(s), \psi_i) \leqslant 0, \\ -1, & \text{если } (u_l(s), \psi_i) > 0. \end{cases}$$

Здесь $t_i + \gamma_i$ - некоторый момент из отрезка $[t_i, t_i + \epsilon_i]$, в который $(z_i(t_i + \gamma_i), \dot{z}_i(t_i + \gamma_i)) \neq -\|z_i(t_i + \gamma_i)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i + \gamma_i)\|$. Если же $(z_i(t_i), \dot{z}_i(t_i)) \neq -\|z_i(t_i)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i)\|$, то полагаем $\gamma_i = 0$.

Управление убегающего $v(s)$ на полуинтервале $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ необходимо положить равным $u_i(s)$. Однако если $i < n$, то на $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ возможны сближения с преследователями P_l, $l = i + 1, \ldots, n$. Поэтому

$$v(s) = u_l(s), \ s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup_{j=i+1}^{n} [t_j, t_j + \tau_j),$$

если $i < n$, и $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$, если $i = n$.

Предположим, что $i < n$ и $v(s) = u_i(s)$, $t_l \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$, $l = i + 1, \ldots, n$. Убегающий будет сближаться с преследователями P_l, $l = i+1, \ldots, n$ настолько близко и ґобходитьЄ их за столь малое время, чтобы для траектории $z_i(t)$ на отрезке $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ при любом управлении $u_i(s)$, $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$, выполнялись следующие соотношения:

$$(z_i(t_i + \tau), \dot{z}_i(t_i + \tau)) \neq -\|z_i(t_i + \tau)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i + \tau)\| \qquad (2.16)$$

для любого $\tau \in [\gamma_i, \tau_i]$,

$$\min_{t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]} \|z_i(t)\| > \delta_{i+1}. \qquad (2.17)$$

Из (2.17) следует, что сближение убегающего с каждым преследователем может наступать не более одного раза.

Обозначим через $H_i(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, параболу, заданную параметрически $x(\tau) = z_i(t_i + \gamma_i) + \dot{z}_i(t_i + \gamma_i)\tau + \ddot{z}_i(t_i + \gamma_i)\frac{\tau^2}{2}$ и

$y(\tau) = \dot{z}_i(t_i + \gamma_i) + \ddot{z}_i(t_i + \gamma_i)\tau$. Можно считать, что функция $f(\tau) = \min\limits_{x \in H_i(\tau)} \|x\| > 0$.

Функция $f(\tau) : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ непрерывна. В момент $t = t_i + \gamma_i$ определим число

$$\beta_i = \min\{\delta_i^{i+1}, \min_{\tau \in [0, \tau_i]} f(\tau)\}. \tag{2.18}$$

Если $v(s) = u_i(s)$, $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$, то соответствующая траектория при $t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ задается как $z_i^0(t) = x(t - t_i - \gamma_i)$, $\dot{z}_i^0(t) = y(t - t_i - \gamma_i)$. Для любого $t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ справедливы неравенства

$$\|z_l^0(t)\| \geqslant \beta_i, \ \|\dot{z}_l^0(t)\| \geqslant \beta_i \ \ \forall\, t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]. \tag{2.19}$$

Теперь предположим, что на множестве $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ задана такая счетная система полуинтервалов $[t^r, t^r + \tau^r)$, $r = 1, 2, \dots$, что

$$\begin{gathered} \sum_{r=1}^{\infty} \tau^r < \xi_{i+1}, \\ \Lambda_i = \left(\tfrac{\tau_i^3}{27} + \tfrac{\beta_i}{4} + \sqrt{\tfrac{\tau_i^3 \beta_i}{108} + \tfrac{(\beta_i)^2}{16}}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ \Omega_i = \left(\tfrac{\tau_i^3}{27} + \tfrac{\beta_i}{4} - \sqrt{\tfrac{\tau_i^3 \beta_i}{108} + \tfrac{(\beta_i)^2}{16}}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ \xi_{i+1} = \min\left\{\Lambda_i + \Omega_i + \tfrac{2\tau_i}{3}, \ -\tau_i + \sqrt{\tau_i^2 + \tfrac{\beta_i}{2}}, \ \tfrac{\beta_i}{4}\right\}. \end{gathered} \tag{2.20}$$

Далее покажем, что если управление $v(s) = u_l(s)$, при $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} [t^r, t^r + \ \tau^r)$, а на множестве $\bigcup\limits_{r=1}^{\infty} [t^r, t^r + \tau^r)$ управление убегающего произвольно, то соответствующая траектория $z_i^l(t)$, $t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ такова, что

$$\|z_i^l(t) - z_i^0(t)\| < \frac{\beta_i}{2}, \tag{2.21}$$

и, кроме того,

$$\|\dot{z}_i^l(t) - \dot{z}_i^0(t)\| \leqslant \frac{\beta_i}{2}, \tag{2.22}$$

для любого управления $u_i(s)$ $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$.

Пусть $l = 1$. Понятно, что $z_i^1(t^1) = z_i^0(t^1)$. В точке $t = t^1 + \tau^1$ $\|z_i^1(t^1 + \tau^1) - z_i^0(t^1 + \tau^1)\| \leqslant (\tau^1)^3$. Тогда при $t \in [t^1 + \tau^1 t_i + \tau_i]$ выполнено $\|z_i^1(t) - z_i^0(t)\| \leqslant (\tau^1)^3 + 2(\tau^1)^2\tau_i + \tau^1\tau_i^2$. Поэтому для всех t из $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ справедливо неравенство

$$\|z_i^1(t) - z_i^0(t)\| < (\tau^1)^3 + 2(\tau^1)^2\tau_i + \tau^1\tau_i^2.$$

Проводя аналогичные рассуждения, нетрудно убедиться, что для натуального l, $t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ справедливо неравенство $\|z_i^l(t) - z_i^0(t)\| < (\xi_{i+1})^3 + 2\xi_{i+1}^2\tau_i + \xi_{i+1}(\tau_i)^2 \leqslant \frac{\beta_i}{2}$.

Таким образом, неравенство (2.21) доказано. Неравенство (2.22) сразу следует из определения числа ξ_{i+1}.

Покажем теперь, что для всех $\tau \in [\gamma_i, \tau_i]$

$$(z_i^l(t_i + \tau), \dot{z}_i^l(t_i + \tau)) \neq -\|z_i^l(t_i + \tau)\| \cdot \|\dot{z}_i^l(t_i + \tau)\|. \qquad (2.23)$$

Предположим противное. Пусть существуют $\tau_0 \in [\gamma_i, \tau_i]$, $q > 0$ такие, что

$$z_i^l(t_i + \tau_0) = -q \cdot \dot{z}_i^l(t_i + \tau_0).$$

В силу неравенств (2.21), (2.22) векторы $z_i^0(t_i + \tau_0)$, $\dot{z}_i^0(t_i + \tau_0)$ представимы в виде

$$z_i^0(t_i + \tau_0) = z_i^l(t_i + \tau_0) + x, \; \dot{z}_i^0(t_i + \tau_0) = \dot{z}_i^l(t_i + \tau_0) + y,$$

где $x, y \in \frac{\beta_i \cdot S}{2}$.

Пусть

$$L = \{\alpha \mid \alpha = (\alpha_1, \; \alpha_2), \; \alpha_1, \; \alpha_2 \in \mathbb{R}^1, \; \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}.$$

Согласно (2.18),

$$\min_{\alpha \in L} \|\alpha_1 \cdot (z_i^l(t_i + \tau_0) + x) + \alpha_2 \cdot (\dot{z}_i^l(t_i + \tau_0) + y)\| \geqslant \beta_i.$$

С другой стороны, при $\alpha_1^* = \frac{1}{1+q}$, $\alpha_2^* = \frac{q}{1+q}$ справедливо неравенство

$$\|\alpha_1^* \cdot (z_i^l(t_i + \tau_0) + x) + \alpha_2^* \cdot (\dot{z}_i^l(t_i + \tau_0) + y)\| < \frac{\beta_i}{2}.$$

Пришли к противоречию. Следовательно, неравенство (2.21) выполняется при любом τ из $[\gamma_i, \tau_i]$. В момент $t = t_i$ по формулам (2.18), (2.20) определяем числа β_i, ξ_{i+1} и строим последовательности $\{\tau_{i+1}^{i+l}\}_{l=1}^{\infty}$, $\{\delta_{i+1}^{i+l}\}_{l=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_{i+1}^{i+l} = \frac{\xi_{i+1}}{2^l}, \ \delta_{i+1}^{i+l} = \Delta_1(\tau_{i+1}^{i+l}).$$

Понятно, что $\tau_{i+1}^{i+1} < \tau_i^{i+1}$, $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \tau_{i+1}^{i+l} = \xi_{i+1}$.

Полагаем $\delta_{i+1} = \delta_{i+1}^{i+1}$, $\tau_{i+1} = \tau_{i+1}^{i+1}$. Если на интервале $(t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ происходят сближения с преследователями $P_{i+1}, \ldots, P_n$, то убегающий ґобходитЄ их за столь малое время, что $\min\limits_{t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]} \|z_i(t)\| \geqslant \frac{\beta_i}{2}$.

Поскольку $\delta_{i+1} < \tau_{i+1}^{i+1} \leqslant \frac{\beta_i}{8}$, то неравенство (2.17) выполнено.

Итак, управление убегающего на полубесконечном интервале времени формируется следующим образом:

$$v(s) = p, \ s \in [0, +\infty) \setminus \bigcup_{l=1}^{n} [t_l, t_l + \tau_l),$$

$$v(s) = u_i(s), \ s \in [t_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup_{l=1}^{n} [t_l, t_l + \tau_l),$$

если $i < n$, $v(s) = u_i(s)$, $s \in [t_i, t_i + \tau_i)$, если $i = n$. Убегание в случае 5 доказано.

Случай 6. Предположим, что $(\dot{z}_i^0, p) > 0$ для некоторого $i \in N_r$, $1 < r \leqslant n$ и $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in N_n \setminus N_r$. При этом $\max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} (z_i^0, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j = 1, \ldots, q$, $q \leqslant r$, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q-1$, причем, если в момент $t' > 0$ для некоторого $l \in N_r$ выполнено $\|\dot{z}_l(t')\| = \delta_j$, $(\dot{z}_l(t'), p) > 0$, то $(\dot{z}_l(t'+\tau_j), p) \leqslant 0$, при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t'+\tau_j]$.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_2(t) = \delta_i$ и существует $l \in N_r$ такой, что $\|\dot{z}_l(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-того сближения.

Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ выполнено $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим.

Определим

$$v(t) = p, \ t \in [0, +\infty) \ \setminus \ \bigcup_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i). \tag{2.24}$$

При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}}, \quad \delta_1^i = \Delta_2(\tau_1^i). \tag{2.25}$$

Числа τ_i, $i = 1, \ldots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \ldots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 = \sum_{i=1}^{q} \Big(\frac{\delta \cdot \tau_1^i}{2} + \frac{(\tau_1^i)^3}{2 \cdot 3!} \Big) < \frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^3}{16}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$ на отрезке $[0, t]$ и $v(s)$ на множестве $[0, t] \cap (\bigcup_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i))$ справедливы неравенства $(\ddot{z}_i(t), p) < -\delta$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, n$, следовательно, сближение с преследователем P_i, $i \in N_n \setminus N_r$, не может произойти. Не ограничивая общности, далее считаем, что $q = n$, то есть сближение наступает с каждым преследователем. Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in N_n$ выполняются соотношения $\|\dot{z}_i(t')\| = \delta_1^i$, $(\dot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\ddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$ $(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i \cdot \tau_1^i - \delta \frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{(\tau_1^i)^4}{2 \cdot 3!} = 0$.

Полагаем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$. Отметим, что $t_1 > 0$. Маневр уклонения определим рекуррентным образом. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены следующие соотношения $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{+\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{+\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будут ґобходитьсяЄ преследователи $P_i, \ldots, P_n$.

Допустим, что

$$(z_i(t_i), \dot{z}_i(t_i)) = -\|z_i(t_i)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i)\|.$$

Очевидно, существует число $0 < \epsilon_i < \tau_i$ такое, что при произвольных $u_l(s)$, $l = i, \ldots, n$, $v(s)$, $s \in [t_i, t_i + \epsilon_i]$, справедливы неравенства $\min\limits_{\tau \in [0, \epsilon_i]} \|\dot{z}_l(t_i + \tau)\| > \delta_i^{i+1}$ $\forall l \in N_n \setminus N_i$, $(\dot{z}_i(t_i + \epsilon_i), p) > 0$. Векторы $z_i(t_i)$, $\dot{z}_i(t)$ линейно зависимы, поэтому существует вектор $\psi_i \in \partial S$ такой, что $(z_i(t_i), \psi_i) = (\dot{z}_i(t_i), \psi_i) = 0$. На полуинтервале $[t_i, t_i + \gamma_i)$ управление $v(s)$ выбираем так, чтобы

$$(v(s), \psi_i) = \begin{cases} \;\;\,1, & \text{если } (u_l(s), \psi_i) \leqslant 0, \\ -1, & \text{если } (u_l(s), \psi_i) > 0. \end{cases}$$

Здесь $t_i + \gamma_i$ - некоторый момент из отрезка $[t_i, t_i + \epsilon_i]$, в который $(z_i(t_i + \gamma_i), \dot{z}_i(t_i + \gamma_i)) \neq -\|z_i(t_i + \gamma_i)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i + \gamma_i)\|$. Если же $(z_i(t_i), \dot{z}_i(t_i)) \neq -\|z_i(t_i)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i)\|$, то полагаем $\gamma_i = 0$.

Управление убегающего $v(s)$ на полуинтервале $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ необходимо положить равным $u_i(s)$. Однако если $i < n$, то на $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ возможны сближения с преследователями P_l, $l = i + 1, \ldots, n$. Поэтому

$$v(s) = u_l(s), \; s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup_{j=i+1}^{n} [t_j, t_j + \tau_j),$$

если $i < n$, и $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$, если $i = n$.

Предположим, что $i < n$ и $v(s) = u_i(s)$, $t_l \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$, $l = i+1, \dots, n$. Убегающий будет сближаться с преследователями P_l, $l = i+1, \dots, n$ настолько близко и ґобходитьЄ их за столь малое время, чтобы для траектории $z_i(t)$ на отрезке $[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ при любом управлении $u_i(s)$, $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$, выполнялись следующие соотношения:

$$(z_i(t_i + \tau), \dot{z}_i(t_i + \tau)) \neq -\|z_i(t_i + \tau)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i + \tau)\| \tag{2.26}$$

для любого $\tau \in [\gamma_i, \tau_i]$,

$$\min_{t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]} \|z_i(t)\| > \delta_{i+1}. \tag{2.27}$$

Из (2.27) следует, что сближение убегающего с каждым преследователем может наступать не более одного раза.

Обозначим через $H_i(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, параболу, заданную параметрически $x(\tau) = z_i(t_i + \gamma_i) + \dot{z}_i(t_i + \gamma_i)\tau + \ddot{z}_i(t_i + \gamma_i)\frac{\tau^2}{2}$ и $y(\tau) = \dot{z}_i(t_i + \gamma_i) + \ddot{z}_i(t_i + \gamma_i)\tau$. Можно считать, что функция $f(\tau) = \min\limits_{x \in H_i(\tau)} \|x\| > 0$.

Функция $f(\tau) : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ непрерывна. В момент $t = t_i + \gamma_i$ определим число

$$\beta_i = \min\{\delta_i^{i+1}, \min_{\tau \in [0, \tau_i]} f(\tau)\}. \tag{2.28}$$

Если $v(s) = u_i(s)$, $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$, то соответствующую траекторию при $t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ можно задать через координаты параболы: $z_i^0(t) = x(t - t_i - \gamma_i)$ и $\dot{z}_i^0(t) = y(t - t_i - \gamma_i)$. Для любого $t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ справедливы неравенства

$$\|z_l^0(t)\| \geqslant \beta_i, \ \|\dot{z}_l^0(t)\| \geqslant \beta_i \ \ \forall\, t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]. \tag{2.29}$$

Теперь предположим, что на множестве $[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i)$ задана такая счетная система полуинтервалов $[t^r, t^r+\tau^r)$, $r = 1, 2, \dots$, что

$$
\begin{gathered}
\sum_{r=1}^{\infty}\tau^r<\xi_{i+1},\\
\Lambda_i=\left(\tfrac{\tau_i^3}{27}+\tfrac{\beta_i}{4}+\sqrt{\tfrac{\tau_i^3\beta_i}{108}+\tfrac{(\beta_i)^2}{16}}\right)^{\frac{1}{3}},\\
\Omega_i=\left(\tfrac{\tau_i^3}{27}+\tfrac{\beta_i}{4}-\sqrt{\tfrac{\tau_i^3\beta_i}{108}+\tfrac{(\beta_i)^2}{16}}\right)^{\frac{1}{3}},\\
\xi_{i+1}=\min\left\{\Lambda_i+\Omega_i+\tfrac{2\tau_i}{3},\ -\tau_i+\sqrt{\tau_i^2+\tfrac{\beta_i}{2}},\ \tfrac{\beta_i}{4}\right\}.
\end{gathered}
\tag{2.30}
$$

Далее покажем, что если управление $v(s) = u_l(s)$, при $s\in[t_i+\gamma_i,t_i+\tau_i)\setminus\bigcup\limits_{r=1}^{\infty}[t^r,t^r+\ \tau^r)$, а на множестве $\bigcup\limits_{r=1}^{\infty}[t^r,t^r+\tau^r)$ управление убегающего произвольно, то соответствующая траектория $z_i^l(t)$, $t\in[t_i+\gamma_i,t_i+\tau_i]$ такова, что

$$\|z_i^l(t)-z_i^0(t)\|<\frac{\beta_i}{2}, \tag{2.31}$$

и, кроме того,

$$\|\dot z_i^l(t)-\dot z_i^0(t)\|\leqslant\frac{\beta_i}{2}, \tag{2.32}$$

для любого управления $u_i(s)$ $\quad s\in[t_i+\gamma_i,t_i+\tau_i]$.

Пусть $l=1$. Понятно, что $z_i^1(t^1)=z_i^0(t^1)$. В точке $t=t^1+\tau^1$ $\|z_i^1(t^1+\tau^1)-z_i^0(t^1+\tau^1)\|\leqslant(\tau^1)^3$. Тогда при $t\in[t^1+\tau^1t_i+\tau_i]$ выполнено $\|z_i^1(t)-z_i^0(t)\|\leqslant(\tau^1)^3+2(\tau^1)^2\tau_i+\tau^1\tau_i^2$. Поэтому для всех t из $[t_i+\gamma_i,t_i+\tau_i]$ справедливо неравенство

$$\|z_i^1(t)-z_i^0(t)\|<(\tau^1)^3+2(\tau^1)^2\tau_i+\tau^1\tau_i^2.$$

Проводя аналогичные рассуждения, нетрудно убедиться, что для натуального l, $\ t\in[t_i+\gamma_i,t_i+\tau_i]$ справедливо неравенство $\|z_i^l(t)-z_i^0(t)\|<(\xi_{i+1})^3+2\xi_{i+1}^2\tau_i+\xi_{i+1}(\tau_i)^2\leqslant\frac{\beta_i}{2}$.

Таким образом, неравенство (2.31) доказано. Неравенство (2.32) сразу следует из определения числа ξ_{i+1}.

Покажем теперь, что $\forall\ \tau \in [\gamma_i, \tau_i]$

$$(z_i^l(t_i+\tau), \dot z_i^l(t_i+\tau)) \neq -\|z_i^l(t_i+\tau)\| \cdot \|\dot z_i^l(t_i+\tau)\|. \tag{2.33}$$

Предположим противное. Тогда существуют $\tau_0 \in [\gamma_i, \tau_i]$, $q>0$ такие, что

$$z_i^l(t_i+\tau_0) = -q \cdot \dot z_i^l(t_i+\tau_0).$$

В силу неравенств (2.31), (2.32) векторы $z_i^0(t_i+\tau_0)$, $\dot z_i^0(t_i+\tau_0)$ представимы в виде

$$z_i^0(t_i+\tau_0) = z_i^l(t_i+\tau_0) + x,\ \dot z_i^0(t_i+\tau_0) = \dot z_i^l(t_i+\tau_0) + y,$$

где $x, y \in \frac{\beta_i \cdot S}{2}$.

Пусть

$$L = \{\alpha \mid \alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2),\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}^1,\ \alpha_1+\alpha_2 = 1\}.$$

Согласно (2.28)

$$\min_{\alpha \in L} \|\alpha_1 \cdot (z_i^l(t_i+\tau_0)+x) + \alpha_2 \cdot (\dot z_i^l(t_i+\tau_0)+y)\| \geqslant \beta_i.$$

С другой стороны, при $\alpha_1^* = \frac{1}{1+q}$, $\alpha_2^* = \frac{q}{1+q}$

$$\|\alpha_1^* \cdot (z_i^l(t_i+\tau_0)+x) + \alpha_2^* \cdot (\dot z_i^l(t_i+\tau_0)+y)\| < \frac{\beta_i}{2}.$$

Пришли к противоречию. Следовательно, неравенство (2.31) выполняется при любом τ из $[\gamma_i, \tau_i]$. В момент $t = t_i$ по формулам (2.28), (2.29) определяем числа β_i, ξ_{i+1} и строим последовательности $\{\tau_{i+1}^{i+l}\}_{l=1}^{\infty}$, $\{\delta_{i+1}^{i+l}\}_{l=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_{i+1}^{i+l} = \frac{\xi_{i+1}}{2^l},\ \delta_{i+1}^{i+l} = \Delta_2(\tau_{i+1}^{i+l}).$$

Понятно, что

$$\tau_{i+1}^{i+1} < \tau_i^{i+1},\ \sum_{l=1}^{\infty} \tau_{i+1}^{i+l} = \xi_{i+1}.$$

Выбираем

$$\delta_{i+1} = \delta_{i+1}^{i+1}, \ \tau_{i+1} = \tau_{i+1}^{i+1}.$$

Если на интервале $(t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ происходят сближения с преследователями $P_{i+1}, \ldots, P_n$, то убегающий ѓобходитЄ их за столь малое время, что

$$\min_{t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]} \|z_i(t)\| \geqslant \frac{\beta_i}{2}.$$

Поскольку $\delta_{i+1} < \tau_{i+1}^{i+1} \leqslant \frac{\beta_i}{8}$, то неравенство (2.27) справедливо.

Итак, управление убегающего на полубесконечном интервале времени формируется следующим образом:

$$v(s) = p, \ s \in [0, +\infty) \setminus \bigcup_{l=1}^{n} [t_l, t_l + \tau_l),$$

$$v(s) = u_i(s), \ s \in [t_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup_{l=1}^{n} [t_l, t_l + \tau_l),$$

если $i < n$, $v(s) = u_i(s)$, $s \in [t_i, t_i + \tau_i)$, если $i = n$. Убегание в случае 6 доказано.

Случай 7а. Предположим, что $(z_i^0, p) > 0$ для любого $i \in N_r$, $1 < r \leqslant n$ и $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in N_n \setminus N_r$. При этом $(\dot{z}_m^0, p) > 0$ для некоторого $m \in N_n \setminus N_r$ и $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in N_n \setminus \{m\}$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0 .

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j , δ_j , $j = 1, \ldots, q$, $q \leqslant r + 1$, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q - 1$, причем, если в момент $t' > 0$ выполняется $\|\dot{z}_m(t')\| = \delta_j$, $(\dot{z}_m(t'), p) > 0$, или для некоторого $l \in N_r$ $\|z_l(t')\| = \delta_j$, $(z_l(t'), p) > 0$, то $(\dot{z}_m(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$, при любых управлениях $u_m(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ - в первом случае, или $(z_l(t'+\tau_j),p) \leqslant 0$, при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t',t'+\tau_j]$ - во втором.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_2(t) = \delta_i$ и $\|\dot{z}_m(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_m(t_i),p) > 0$, или впервые выполняется равенство $\eta_1(t) = \delta_i$ и существует $l \in N_r$ такой, что $\|z_l(t_i)\| = \delta_i$, $(z_l(t_i),p) > 0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(z_i(t_i),p) > 0$. А если $\|\dot{z}_m(t_i)\| = \delta_i$ и $(\dot{z}_m(t_i),p) > 0$, то полагаем $m = i$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим.

Определим управление убегающего следующим образом.

$$v(t) = p,\ t \in [0,+\infty)\ \setminus\ \bigcup_{i=1}^{q}[t_i, t_i+\tau_i). \tag{2.34}$$

При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\widehat{\delta_1^i}\}_{i=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}}, \quad \delta_1^i = \Delta_1(\tau_1^i), \quad \widehat{\delta_1^i} = \Delta_2(\tau_1^i). \tag{2.35}$$

Числа $\tau_i,\ i = 1,\ldots,q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1,\ldots,q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q}\tau_i < \xi_1 \leqslant \sum_{i=2}^{q}\Delta_1(\tau_1^i) + \Delta_2(\tau_1^1) = \frac{\delta^2}{16} + \frac{673\delta^3}{6144} + \frac{\delta^4}{192}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1,\ldots,n$ на отрезке $[0,t]$ и $v(s)$ на множестве $[0,t]\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{q}[t_i,t_i+\tau_i))$ справедливы неравенства $(\ddot{z}_i(t),p) < -\delta$, $t \in [0,+\infty)$, $i = 1,\ldots,n$, следовательно, сближение с преследователем P_i, $i \in N_n \setminus (N_r \cup \{m\})$, не может произойти. Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in N_r$ выполняются соотношения $\|z_i(t')\| = \delta_1^i$, $(z_i(t'),p) > 0$,

$(\ddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$ $(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i - \delta\frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{(\tau_1^i)^4}{2\cdot 3!} = 0$. А если в момент $t = t'$ выполнено

$$\|\dot{z}_i(t')\| = \widehat{\delta}_1^i,\ (\dot{z}_i(t'), p) > 0,\ (\ddot{z}_i(t'), p) < -\delta,$$

то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \widehat{\delta}_1^i \cdot \tau_1^i - \delta\frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{(\tau_1^i)^4}{2\cdot 3!} = 0.$$

Выбираем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$, если $\|z_1(t_1)\| = \delta_1^1$, и $\delta_1 = \widehat{\delta}_1^1$, если $\|\dot{z}_1(t_1)\| = \widehat{\delta}_1^1$. Отметим, что $t_1 > 0$. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены следующие соотношения $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$, $(z_i(t_i), p) > 0$, или $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i , ξ_i и последовательности

$$\{\tau_i^l\}_{l=i}^{+\infty},\ \{\delta_i^l\}_{l=i}^{+\infty},\ \{\widehat{\delta}_i^l\}_{l=i}^{+\infty}.$$

Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будут ґобходитьсяЄ преследователи $P_i, \ldots, P_{r+1}$.

Управление убегающего на $[t_i, t_i + \tau_i)$ строим с учетом поведения преследователя P_m . Если на полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выполнено равенство $\|\dot{z}_m(t)\| = \delta_m$, то управление $v(t)$ убегающего E , $t \in [t_i, t_i + \tau_i)$, до момента $t = t_m$ нужно выбирать так, как это сделано в случае 5, а затем управление должно быть выбрано в соответствии со случаем 6. Маневр ґобходаЄ преследователя P_m нужно осуществить за время τ_m . Затем вернуться к управлению, заданному в случае 5. Если же сближение с преследователем P_m не происходит, то на всем полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выбираем управление в соотвествии со случаем 5.

Когда при осуществлении маневра ґобходаЄ преследователя P_m , происходит сближение с преследователем P_j , $j \in N_r \setminus \{i\}$, то за время τ_j , необходимо осуществить маневр ґобходаЄ преследователя P_j , руководствуясь правилами случая 5. И вернуться к управлению для маневра ґобходаЄ преследователя P_m .

В случае, если преследователь P_m встретится раньше, чем преследователь P_i, $i \in N_r$, тогда нужно осуществлять маневр ґобходаЄ в соответсвии со случаем 6 за время τ_m, а с момента $t = t_i$ руководствоваться правилами случая 5.

Если же $t_m = t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 5, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|\dot{z}_m(t_i')\| = \Delta_2(\frac{\tau_m^m}{2})$. Маневр уклонения от преследователя P_m осуществим за время $\frac{\tau_m}{2}$ по алгоритму, описанному в случае 6. А затем вернемся к управлению, описанному в случае 5, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i.

Таким образом убегание в этом случае доказано.

Случай 7б. Пусть начальные условия такие же, как в случае 7а, только $m \in N_r$. Тогда $(z_m^0, p) > 0$ и $(\dot{z}_m^0, p) > 0$, $m \in N_r$, а $q \leqslant r$.

Доказательство уклонения от встречи производится аналогично доказательству в случае 7а, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_m$ такой, что $\|z_m(t)\| = \delta_m^m$ и $\|\dot{z}_m(t)\| = \widehat{\delta_m^m}$. Пусть

$$\Delta_m^m = \frac{\Delta_1(\tau_m^m)}{2},\ \widehat{\Delta_m^m} = \frac{\Delta_2(\tau_m^m)}{2}.$$

Тогда убегание будет доказываться так же, как в случае 4б, только вместо δ_1 возьмем Δ_m^m, вместо δ_2 возьмем $\widehat{\Delta_m^m}$, а вместо τ_1 из случая 4б - τ_m.

Случай 8а. Предположим, что $(\dot{z}_i^0, p) > 0$ для любого $i \in N_r$, $1 < r \leqslant n$ и $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in N_n \setminus N_r$. При этом $(z_m^0, p) > 0$ для некоторого $m \in N_n \setminus N_r$ и $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для всех $i \in N_n \setminus \{m\}$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j = 1, \ldots, q$, $q \leqslant r + 1$, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q-1$, причем, если в момент $t' > 0$ выполняется $\|z_m(t')\| = \delta_j$, $(z_m(t'), p) > 0$, или для некоторого $l \in N_r$ $\|\dot{z}_l(t')\| = \delta_j$, $(\dot{z}_l(t'), p) > 0$, то $(z_m(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$, при любых управлениях $u_m(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t'+\tau_j]$ - в первом случае, или $(\dot{z}_l(t'+\tau_j), p) \leqslant 0$, при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t'+\tau_j]$ - во втором.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_1(t) = \delta_i$ и $\|z_m(t_i)\| = \delta_i$, $(z_m(t_i), p) > 0$, или впервые выполняется равенство $\eta_2(t) = \delta_i$ и существует $l \in N_r$ такой, что $\|\dot{z}_l(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$. А если $\|z_m(t_i)\| = \delta_i$ и $(z_m(t_i), p) > 0$, то полагаем $m = i$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим.

Пусть выполнено (2.34). При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\widehat{\delta_1^i}\}_{i=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}}, \quad \delta_1^i = \Delta_2(\tau_1^i), \quad \widehat{\delta_1^i} = \Delta_1(\tau_1^i). \tag{2.36}$$

Числа τ_i, $i = 1, \dots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \dots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 \leqslant \sum_{i=1}^{q-1} \Delta_2(\tau_1^i) + \Delta_1(\tau_1^1) = \frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^3}{16} + \frac{\delta^4}{8192 \cdot 3!}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1, \dots, n$ на отрезке $[0, t]$ и $v(s)$ на множестве $[0, t] \cap (\bigcup_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i))$ справедливы неравенства $(\ddot{z}_i(t), p) < -\delta$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, \dots, n$, следовательно, сближение с преследователем P_i, $i \in N_n \setminus (N_r \cup \{m\})$, не может произойти. Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in N_r$ выполняются соотношения $\|\dot{z}_i(t')\| = \delta_1^i$, $(\dot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\ddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$ $(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i \tau_1^i - \delta \frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{(\tau_1^i)^4}{2 \cdot 3!} = 0$. А если в момент $t = t'$ выполнено $\|z_i(t')\| = \delta_1^i$, $(z_i(t'), p) > 0$,

$(\ddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$ справедливо неравенство

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \widehat{\delta_1^i} - \delta\frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{(\tau_1^i)^4}{2 \cdot 3!} = 0.$$

Выбираем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$, если $\|\dot{z}_1(t_1)\| = \delta_1^1$, и $\delta_1 = \widehat{\delta_1^1}$, если $\|z_1(t_1)\| = \widehat{\delta_1^1}$. Отметим, что $t_1 > 0$. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены следующие соотношения $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$, или $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$, $(z_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i , ξ_i и последовательности

$$\{\tau_i^l\}_{l=i}^{+\infty}, \ \{\delta_i^l\}_{l=i}^{+\infty}, \ \{\widehat{\delta_i^l}\}_{l=i}^{+\infty}.$$

Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будут ґобходитьсяЄ преследователи $P_i, \ldots, P_{r+1}$.

Управление убегающего на $[t_i, t_i + \tau_i)$ строим с учетом поведения преследователя P_m . Если на полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выполнено равенство $\|z_m(t)\| = \delta_m$, то управление $v(t)$ убегающего E , $t \in [t_i, t_i + \tau_i)$, до момента $t = t_m$ нужно выбирать так, как это сделано в случае 6, а затем управление должно быть выбрано в соответствии со случаем 5. Маневр "обхода" преследователя P_m нужно осуществить за время τ_m . Затем вернуться к управлению, заданному в случае 6. Если же сближение с преследователем P_m не происходит, то на всем полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выбираем управление в соотвествии со случаем 6.

Когда при осуществлении маневра ґобходаЄ преследователя P_m , происходит сближение с преследователем P_j , $j \in N_r \setminus \{i\}$, то за время τ_j необходимо осуществить маневр ґобходаЄ преследователя P_j , руководствуясь правилами случая 6. И вернуться к управлению для маневра "обхода" преследователя P_m (случай 5).

В случае, если преследователь P_m встретится раньше, чем преследователь P_i , $i \in N_r$, тогда нужно осуществлять маневр ґобходаЄ в соответсвии со случаем 5 за время τ_m , а с момента $t = t_i$ руководствоваться правилами случая 6.

Если же $t_m = t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 6, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|z_m(t_i')\| = \Delta_1(\frac{\tau_m^m}{2})$. Маневр уклонения от преследователя P_m осуществим за время $\frac{\tau_m}{2}$ по алгоритму, описанному в случае 5. А затем вернемся к управлению, описанному в случае 6, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i.

Таким образом убегание в этом случае построено.

Случай 8б. Пусть начальные условия такие же, как в случае 8а, только $m \in N_r$. Тогда $(z_m^0, p) > 0$ и $(\dot{z}_m^0, p) > 0$, $m \in N_r$, а $q \leqslant r$.

Доказательство уклонения от встречи производится аналогично доказательству в случае 8а, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_m$ такой, что $\|z_m(t)\| = \widehat{\delta_m^m}$ и $\|\dot{z}_m(t)\| = \delta_m^m$. Пусть $\Delta_m^m = \frac{\Delta_1(\tau_m^m)}{2}$, $\widehat{\Delta_m^m} = \frac{\Delta_2(\tau_m^m)}{2}$. Тогда убегание будет доказываться так же, как в случае 4б, только вместо δ_1 возьмем Δ_m^m, вместо δ_2 возьмем $\widehat{\Delta_m^m}$, а вместо τ_1 из случая 4б - τ_m.

Случай 9а. Предположим, что $(z_i^0, p) > 0$ для любого $i \in N_r$, $1 < r \leqslant n$ и $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in N_n \setminus N_r$. При этом $(\dot{z}_i^0, p) > 0$ для любого $i \in Q_m^r$ и $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in N_n \setminus Q_m^r$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j = 1, \ldots, q$, $q \leqslant r + m$, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q - 1$, причем, если в момент $t' > 0$ выполняется для некоторого $l \in Q_m^r$ $\|\dot{z}_l(t')\| = \delta_j$, $(\dot{z}_l(t'), p) > 0$, или для некоторого $l \in N_r$ $\|z_l(t')\| = \delta_j$, $(z_l(t'), p) > 0$, то $(\dot{z}_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$, при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$, $l \in Q_m^r$ - в первом случае, или $(z_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$, при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$, $l \in N_r$ - во втором.

Момент времени $t = t_i > 0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_2(t) = \delta_i$ и существует $l \in Q_m^r$ такой, что $\|\dot{z}_l(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_l(t_i), p) > 0$, или впервые выполняется равенство $\eta_1(t) = \delta_i$ и существует $l \in N_r$ такой, что $\|z_l(t_i)\| = \delta_i$, $(z_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ ($\|z_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(z_i(t_i), p) > 0$) или ($\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$). Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим.

Пусть выполнено (2.34). При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\widehat{\delta_1^i}\}_{i=1}^{\infty}$ при помощи правил (2.35).

Числа τ_i, $i = 1, \dots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \dots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 \leqslant \sum_{i=1}^{q-r+1} \Delta_2(\tau_1^i) + \sum_{i=q-r+1}^{q} \Delta_1(\tau_1^i) < \frac{\delta^2}{4} + \frac{3\delta^3}{16} + \frac{\delta^4}{192}.$$

Тогда сближение с преследователем P_i, $i \in N_n \setminus (N_r \cup Q_m^r)$, не может произойти. Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in N_r$ выполняются соотношения $\|z_i(t')\| = \delta_1^i$, $(z_i(t'), p) > 0$, $(\ddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$ $(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i - \delta\frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{(\tau_1^i)^4}{2 \cdot 3!} = 0$. А если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in Q_m^r$ выполнено $\|\dot{z}_i(t')\| = \delta_1^i$, $(\dot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\ddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$ выполнено

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \widehat{\delta_1^i} \cdot \tau_1^i - \delta\frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{(\tau_1^i)^4}{2 \cdot 3!} = 0.$$

Выбираем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$, если $\|z_1(t_1)\| = \delta_1^1$, и $\delta_1 = \widehat{\delta_1^1}$, если $\|\dot{z}_1(t_1)\| = \widehat{\delta_1^1}$. Нетрудно видеть, что $t_1 > 0$. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены следующие соотношения $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$, $(z_i(t_i), p) > 0$, или $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности

$$\{\tau_i^l\}_{l=i}^{+\infty}, \ \{\delta_i^l\}_{l=i}^{+\infty}, \ \{\widehat{\delta_i^l}\}_{l=i}^{+\infty}.$$

Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будут ґобходитьсяЄ преследователи $P_i, \dots, P_{r+m}$.

Управление убегающего на $[t_i, t_i + \tau_i)$ строим, исходя из информации о том, какое равенство в момент $t = t_i$ выполнено: $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$ или $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$. В первом случае нужно руководствоваться по правилам случая 5, во втором - случая 6.

Если существуют номера $i, j \in N_n$, $i \neq j$, такие, что $t_i = t_j$, то сначала ґобходимЄ i-того преследователя, а затем, подпустив j-того на расстояние $\Delta_1(\frac{\tau_j^j}{2})$, применяем управление для ґобходаЄ преследователя P_j за время $\frac{\tau_j}{2}$.

Таким образом, управление в этом случае построено.

Случай 9б. Пусть начальные условия такие же, что и в случае 9а, только существует номер $i \in N_r$ такой, что $(z_i^0, p) > 0$ и $(\dot{z}_i^0, p) > 0$.

Доказательство уклонения от встречи производится аналогично доказательству в случае 9а, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_i$ такой, что $\|z_i(t)\| = \delta_i^i$ и $\|\dot{z}_i(t)\| = \widehat{\delta_i^i}$. Пусть $\Delta_i^i = \frac{\Delta_1(\tau_i^i)}{2}$, $\widehat{\Delta_i^i} = \frac{\Delta_2(\tau_i^i)}{2}$. Тогда убегание будет доказываться так же, как в случае 4б, только вместо δ_1 возьмем Δ_i^i, вместо δ_2 возьмем $\widehat{\Delta_i^i}$, а вместо τ_1 из случая 4б - τ_i.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами// Кибернетика. 1976. Ґ3. С. 145-146.
2. Прокопович П.В., Чикрий А.А. Одна дифференциальная игра убегания// ДАН УССР. Серия А. 1989. Ґ1. С. 71-74.
3. Чикрий А.А., Прокопович П. В. Задача убегания от группы для однотипных инерционных объектов// Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. Ґ6. С. 998-1004.
4. Петров Н. Н. Теория игр. Ижевск. Изд-во Удмурт. ун-та 1997.