УДК 517.934

© **С.В. Лутманов**
mpu@perm.ru

ПОСТРОЕНИЕ КОМПРОМИССНЫХ ПОЗИЦИОННЫХ СТРАТЕГИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ

Ключевые слова: дифференциальная игра, компромиссный набор стратегий, равновесие по Нэшу, позиционное управление.

Abstract. A compromise set of positional strategies in a differential game of several persons is constructed.

1. Игра в нормальной форме

В игре участвуют $k \geqslant 2$ игроков. Множество стратегий i -го игрока обозначим символом U_i, $i \in K = \{1,\dots k\}$. В процессе конфликта каждый игрок выбирает стратегию из своего множества стратегий, в результате чего складывается набор стратегий

$$w = (u_1, \dots, u_k),$$

который называется ситуацией. Множество всех ситуаций является декартовым произведением множеств U_i, $i \in K$ и обозначается символом

$$W = U_1 \times \cdots \times U_k.$$

Заинтересованность игроков в ситуациях проявляется в том, что каждому игроку $i \in K$ в любой ситуации $w \in W$ приписывается число, выражающее степень удовлетворения его интересов в этой ситуации (чем оно меньше, тем степень удовлетворения выше). Это число обозначим символом $I_i(w)$.

Число $I_i(w)$ называется платой игрока i в ситуации w, а функция $I_i : W \to R^1$ — функцией платы этого игрока.

Таким образом, описанный конфликт представляется тройкой

$$\Gamma = \{K, \{U_i, i \in K\}, \{I_i, i \in K\}\}.$$

Дополнительно принимается, что каждый из игроков не заинтересован в значительном выигрыше какого-либо из своих противников, т.е. в том, чтобы функция платы какого-либо игрока оказалось весьма малой. Указанное предположение, например, действует при выборах в представительный орган власти. Каждый игрок (политическая партия) заинтересован получить максимальное число выборных мест, но при этом он опасается, что какая-либо другая партия наберет абсолютное большинство в органе власти и сможет диктовать свою волю остальным партиям. В этом примере за функцию платы игрока следует принять число выигранных соответствующей партией мест со знаком ѓминусЄ.

Для игры Γ введем понятие компромиссного набора стратегий.

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть

$$S_* = (S_{1*}, \dots, S_{k*}),\ S^* = (S_1^*, \dots, S_k^*),\ S_{i*} \leqslant S_i^*,\ i \in K.$$

Ситуация

$$w = (u_1^{\text{комп}}, \dots, u_j^{\text{комп}}, \dots u_k^{\text{комп}}) \in W$$

называется компромиссной относительно векторов $S_*, S^* \in R^k$, если для всех $i \in K$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} S_{i*} \leqslant \min_{u_i \in U_i} I_i(u_1^{\text{комп}}, \dots, u_i, \dots u_k^{\text{комп}}) \leqslant \\ \leqslant I_i(u_1^{\text{комп}}, \dots, u_i^{\text{комп}}, \dots u_k^{\text{комп}}) \leqslant S_i^*. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Из приведенного определения следует, что для компромиссного набора стратегий значение платы i -го игрока лежит в промежутке $[S_{i*}, S^{i*}], i \in K,$ и никакое единоличное уклонение игрока от стратегии, предписываемой компромиссным набором, не позволяет ему получить значение платы лучше (меньше) нижней компромиссной оценки.

Заметим, что при $S_* = S^*$ определение компромиссного набора стратегий переходит в определение равновесия по Нэшу. Компромиссный набор стратегий сохраняет свойство устойчивости по отношению к игроку уклонисту (в ослабленном варианте). При этом среди компромиссных наборов стратегий можно ожидать существование такого набора, для которого справедливы неравенства (для всех $i \in K$)

$$I_i(\hat{u}_1^{\text{комп}}, \ldots, \hat{u}_i^{\text{комп}}, \ldots, \hat{u}_k^{\text{комп}}) < I_i(u_1^0, \ldots, u_i^0, \ldots, u_k^0), \qquad (1.2)$$

где $u_1^0, \ldots, u_{i-1}^0, u_i^0, u_{i+1}^0, \ldots, u_k^0$ — равновесный по Нэшу набор стратегий.

2. Дифференциальная игра

Построение компромиссного управления в классе позиционных стратегий осуществим для дифференциальной игры следующего вида. Динамика игры описывается обыкновенным векторным нелинейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f_0(t, x) + A(t, x) \cdot \sum_{i=1}^{k} u_i. \qquad (2.1)$$

Здесь $t \in R^1$ — текущее время, $x \in R^n$ — фазовый вектор игры, $u_i \in R^m$ — вектор управляющих параметров i -го игрока, $i \in K$, $A(t,x)-$ матрица размера $m \times n$.

Функция $f : R^{n+1} \times R^{km} \to R^n$ вида

$$f(t, x, u_1, \ldots, u_k) = f_0(t, x) + A(t, x) \sum_{i=1}^{k} u_i,$$
$$t \in R^1, x \in R^n, u_i \in R^m, i \in K$$

при каждом фиксированном $t \in R^1$ непрерывна по совокупности переменных $x, u_1, \ldots, u_k$, а при фиксированных значениях $x \in R^n, u_i \in R^m, i \in K$, измерима по Борелю по переменной t. Кроме того, относительно функции f предполагается, что она удовлетворяет условию Липшица по переменной и условию продолжимости решения.

На векторы управляющих параметров игроков наложены геометрические ограничения в форме включений $u_i \in P_i$, где $P_i \subset R^m, i \in K$ компактные множества. Момент $T \in R^1$ окончания игры фиксирован, а функции платы игроков содержат только терминальные слагаемые,

$$I_i(u_1, \ldots, u_k) = \varphi(x(T)),\ i \in K, \tag{2.2}$$

где $\varphi_i : R^n \to R^1, i \in K-$ непрерывные функции. Дополнительно предполагается, что для любого вектора $s \in R^m$ и любых номеров $i \in K$ справедливо неравенство

$$\min_{u_1 \in P_1} < s, u_1 > + \cdots + \min_{u_k \in P_k} < s, u_k > \leqslant 0. \tag{2.3}$$

Свои управляющие параметры каждый игрок формирует, основываясь на информации о текущем времени и реализовавшемся фазовом векторе объекта, при этом он не осведомлен о выборе управляющих параметров остальных игроков в этот момент времени. Понятия позиционной стратегии игрока и движения объекта, отвечающего набору позиционных стратегий, определяются аналогично работе [1].

Пусть функция $g : R^{n+1} \to R^1$ является непрерывно дифференцируемой функцией своих аргументов, для которой выполняется неравенство

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) + \left\langle \frac{\partial g}{\partial x}(t, x), f_0(t, x) \right\rangle \leqslant 0,\ (t, x) \in R^{n+1}, t \leqslant T. \tag{2.4}$$

Предположим также, что для некоторого числа $c \in R^1$ множество

$$M_c = \{x \in R^n | g(T, x) \leqslant c\}$$

ограничено. Полагаем

$$S_{i*} = \min_{x \in M_c} \varphi_i(x),\ S_i^* = \max_{x \in M_c} \varphi_i(x),\ i \in K,$$

$$W_c = \{(t,x) \in R^{n+1} | g(t,x) \leqslant c\}.$$

Определим набор позиционных стратегий $u_1^{\text{комп}}, \ldots, u_k^{\text{комп}}$ всех игроков из условия

$$u_i^{\text{комп}} = \begin{cases} u_i^e(t,x), & (t,x) \notin W_c \\ \text{произвольный вектор из } P_i, & (t,x) \in W_c, \end{cases} \tag{2.5}$$

где

$$\left\langle (A(t,x))^T \frac{\partial g(t,x)}{\partial x}, u_i^e(t,x) \right\rangle = \min_{u_i \in P_i} \left\langle (A(t,x))^T \frac{\partial g(t,x)}{\partial x}, u_i \right\rangle,\ i \in K.$$

Т е о р е м а 2.1. *Набор позиционных стратегий (2.5) всех игроков является компромиссным относительно векторов*

$$S_* = (S_{1*}, \ldots, S_{k*}),\ S^* = (S_1^*, \ldots, S_k^*)$$

для любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in W_c,\ t_0 \leqslant T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что $x(T) \in M_c$ для всех движений

$$x(\cdot) \in X[t_0, x_0, U_1^{\text{комп}}, \ldots, U_{i-1}^{\text{комп}}, U_{i+1}^{\text{комп}}, \ldots, U_k^{\text{комп}}]$$

и всех номеров $i \in K$. От противного приходим к существованию номера $i \in K$ и движения

$$x^*(\cdot) \in X[t_0, x_0, U_1^{\text{комп}}, \ldots, U_{i-1}^{\text{комп}}, U_{i+1}^{\text{комп}}, \ldots, U_k^{\text{комп}}]$$

таких, что

$$g(T, x^*(T)) > c. \tag{2.6}$$

Неравенство (2.6) невозможно. Действительно, в силу $g(x_0) < c$ должен существовать промежуток времени $(t^{'}, t^{"}) \subset [t_0, T]$ не нулевой длины, на котором функция $g(t, x^*(t)$ монотонно возрастает и при этом выполняется условие

$$(t, x^*(t)) \notin W_c, t \in (t^{'}, t^{"}).$$

Вычислим полную производную по времени от этой функции вдоль движения. В силу (2.3), (2.4) имеем

$$\frac{d}{dt} g(t, x^*(t)) =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial t}(t, x)\Big|_{x = x^*(t)} + \Big\langle \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t)), f_0(t, x^*(t)) +$$

$$+ \sum_{j \in K(i)} A(t, x^*(t)) u_j^e(t, x^*(t)) + A(t, x^*(t)) u_i(t) \Big\rangle =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial t}(t, x)\Big|_{x = x^*(t)} + \Big\langle \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t)), f_0(t, x^*(t)) \Big\rangle +$$

$$+ \Big\langle \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t)), \sum_{j \in K(i)} A(t, x^*(t)) u_j^e(t, x^*(t)) + A(t, x^*(t)), u_i(t) \Big\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j \in K(i)} \Big\langle (A(t, x^*(t))^T \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t)), u_j^e(t, x^*(t)) \Big\rangle +$$

$$+ \Big\langle (A(t, x^*(t))^T \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t)), u_i(t) \Big\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j \in K(i)} \min_{u_j \in P_j} \Big\langle (A(t, x^*(t))^T \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t)), u_j \Big\rangle +$$

$$+ \max_{u \in P_i} < (A(t, x^*(t))^T \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t)), u_i \Big\rangle \leqslant 0, \; t \in (t^{'}, t^{"}).$$

Полученное неравенство противоречит монотонному возрастанию функции $g(t, x^*(t))$ на промежутке времени $(t^{'}, t^{"})$. Теорема доказана.

3. Модельный пример

Рассмотрим дифференциальную игру трех лиц, динамика которой описывается следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - 3y + 4xy + 4y^2 + u_1 + v_1 + w_1, \\ \dot{y} &= 2x - 3y - 2x^2 - 2xy + u_2 + v_2 + w_2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $m = n = 2$,

$$f_0(t,x,y) = \begin{pmatrix} -x - 3y + 4xy + 4y^2 \\ 2x - 3y - 2x^2 - 2xy \end{pmatrix}, \quad A(t,x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На векторы управляющих параметров наложены геометрические ограничения

$$u, v, w \in P = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, p_1^2 + p_2^2 \leqslant 5 \right\}.$$

Легко видеть, что условия (2.3) для них выполнены.

В фазовом пространстве игры зафиксированы точки M_i, $i = 1, 2, 3$, имеющие соответственно радиус-векторы

$$\overline{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{r}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \ \overline{r}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

относительно начала координат. Эти точки в дальнейшем будем называть целевыми множествами игроков. На рис. 1 показано расположение целевых множеств игроков относительно принятой системы координат.

Момент окончания игры полагаем $T = 1$. Функции платы (2.2) игроков определим формулами

$$\varphi_i(x(T), y(T)) = \sqrt{(x(T) - x_i)^2 + (y(T) - y_i)^2}, \ i = 1, 2, 3.$$

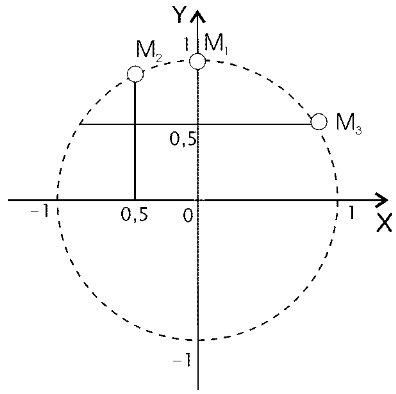

Рис. 1. Расположение целевых точек

Таким образом, платой игрока служит расстояние от фазового вектора управляемого объекта в момент окончания игры до целевого множества этого игрока. Полагаем

$$g(x,y) = x^2 + 2y^2,\ (x,y) \in R^2.$$

Вычислим производную функции g в силу системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - 3y + 4xy + 4y^2 \\ 2x - 3y - 2x^2 - 2xy \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\Big\langle \frac{\partial g}{\partial x}(x), f_0(x) \Big\rangle = \Big\langle \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x - 3y + 4xy + 4y^2 \\ 2x - 3y - 2x^2 - 2xy \end{pmatrix} \Big\rangle =$$

$$= -2x^2 + 2xy - 12y^2 = \Big\langle \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big\rangle < 0$$

для всех $(x,y) \in R^2, (x,y) \neq 0$. Условие (2.4) выполнено. Множества

$$M_c = \{(x,y) \in R^2 | g(x,y) \leqslant c\} = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + 2y^2 \leqslant c\}$$

ограничены при любых значениях константы $c \in R^1$. Нижние и верхние компромиссные оценки для игроков вычисляются по формулам $(i \in \{1,2,3\})$

$$S_{i^*}(c) = \min_{(x,y,z)\in M_c} \sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2},$$
$$S_i^*(c) = \max_{(x,y,z)\in M_c} \sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}.$$

Полагаем $c = 1,2$. Тогда

$$S_{1*} = 0,227482,\ S_{2*} = 0,167777,\ S_{3*} = 0,0208233,$$
$$S_1^* = 1,7453,\ S_2^* = 1,91574,\ S_3^* = 1,7727.$$

Производная функции g в силу системы (3.1) здесь имеет вид

$$\frac{dg}{dt}\Big|_{(3,1)} =$$
$$= \Big\langle \frac{\partial g}{\partial x}(x), f_0(x)\Big\rangle + \Big\langle \frac{\partial g}{\partial x}(x), \begin{pmatrix} u_1+v_1+w_1 \\ u_2+v_2+w_2 \end{pmatrix} \Big\rangle =$$
$$= -2x^2+2xy-12y^2+2(xu_1+2yu_2)+$$
$$+2(xv_1+2yv_2)+2(xw_1+2yw_2).$$

Тогда компромиссные стратегии игроков в соответствии с соотношением (2.5) определяются из условия

$$u^{\text{комп}}(x,y) = v^{\text{комп}}(x,y) = w^{\text{комп}}(x,y) =$$
$$= \begin{cases} -5\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+4y^2}} \\ \frac{2y}{\sqrt{x^2+4y^2}} \end{pmatrix}, & g(x,y) > c \\ \text{произвольный вектор из } P, & g(x,y) \leqslant c. \end{cases} \tag{3.2}$$

Рассмотрим несколько (пять) начальных позиций $(t_0, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix})$

в игре. Например, позиции $(t_0 = 0)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,75 \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} -0,4 \\ 0,69 \end{pmatrix}, \ A_4 = \begin{pmatrix} 0,82 \\ 0,47 \end{pmatrix}, \ A_5 = \begin{pmatrix} 0,12 \\ 0,75 \end{pmatrix}.$$

Легко проверяется, что для каждой из них выполнено условие

$$t_0 < T, \ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in W_c = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \ \middle| \ g(x,y) \leqslant c \right\}.$$

Для произвольного движения из пучка, выходящего из начального положения $(t_0, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix})$ и порожденного компромиссным набором стратегий (3.2). вычислим значения плат игроков и занесем их в табл. 1. По теореме 2.1 эти значения должны находиться в пределах компромиссных оценок, полученных выше.

Таблица 1

x_0	I_1	I_2	I_3
A_1	$0,2 < 1,0 < 1,8$	$0,2 < 0,9 < 1,9$	$0,0 < 1,1 < 1,8$
A_2	$0,2 < 0,8 < 1,7$	$0,1 < 0,8 < 1,9$	$0,0 < 1,0 < 1,7$
A_3	$0,2 < 1,2 < 1,7$	$0,2 < 1,2 < 1,9$	$0,0 < 1,1 < 1,8$
A_4	$0,2 < 0,8 < 1,7$	$0,2 < 1,0 < 1,9$	$0,0 < 0,6 < 1,8$
A_5	$0,2 < 1,0 < 1,7$	$0,2 < 1,0 < 1,9$	$0,0 < 0,9 < 1,8$

Из данных табл. 1 видно, что указанный факт действительно имеет место.

Допустим, что какой-либо из игроков уклоняется от стратегии, предписываемой ему компромиссным набором. Стратегию уклонения i -й игрок, $i \in \{1,2,3\}$ выбирает, например, в виде

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{x_i - x}{\sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-x)^2}} \\ \frac{y_i - y}{\sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-x)^2}} \\ \frac{z_i - z}{\sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-x)^2}} \end{pmatrix}, & (x,y) \neq (x_i, y_i) \\ \text{произвольный вектор из P}, (x,y) = (x_i, y_i). \end{cases}$$

Рассмотрим две ситуации.

В первой ситуации остальные игроки назначают свои управляющие воздействия случайным образом.

Во второй ситуации — в соответствии с компромиссными стратегиями (3.2). В качестве начального положения возьмем позицию $\left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Результаты численных экспериментов занесем в табл. 2.

Таблица 2

Номер игрока-уклониста	Случайное управление		Компромиссное управление	
	нижняя компро-миссная оценка	плата игрока уклониста	нижняя компро-миссная оценка	плата игрока уклониста
1	0,13	0,9	1,4	0,3
2	0,566	1,129	1,698	0,28
3	0,57	1,131	1,71	0,28

Таким образом, игрок-уклонист в состоянии преодолеть свою нижнюю компромиссную оценку при случайном управлении остальных игроков, и он не может этого сделать, когда остальные игроки придерживаются компромиссных стратегий. Траектории управляемой точки для второй ситуации показаны на рис. 2.

Можно показать, что для начальной позиции

$$\left(t_0, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) = \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

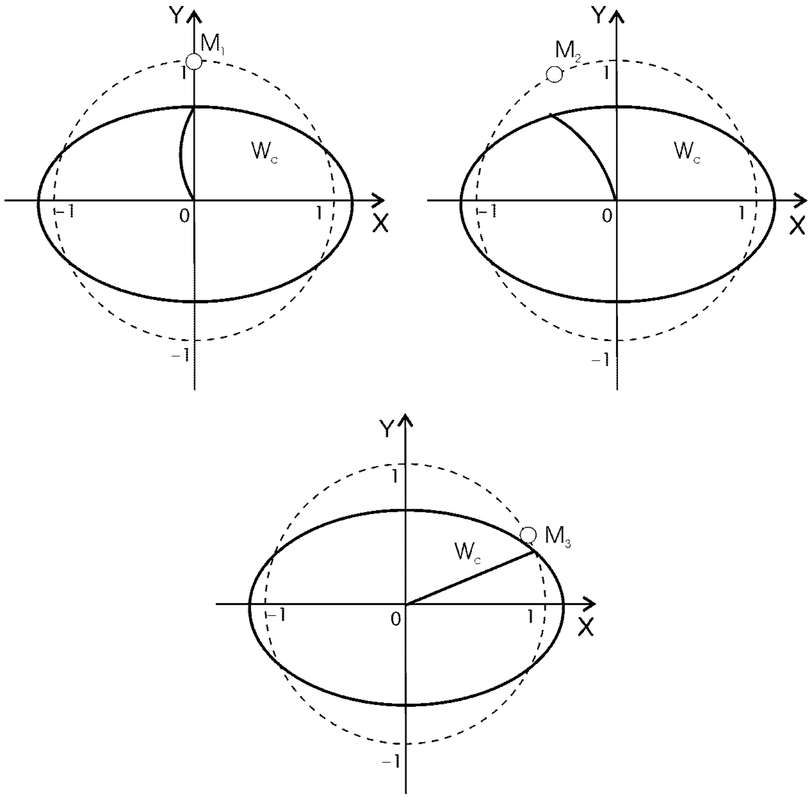

Рис. 2. Траектории точки

набор стратегий

$$u^0(x,y) = v^0(x,y) = w^0(x,y) =$$
$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{-x}{\sqrt{x^2+4y^2}} \\ \frac{-2y}{\sqrt{x^2+4y^2}} \end{pmatrix}, & (x,y) \neq 0 \\ \text{произвольный вектор из } P, & (x,y) = 0 \end{cases}$$

удерживает текущую позицию игры в начале координат на всем промежутке времени $[t_0, T]$ при любых действиях игрока-уклониста. Следовательно, этот набор стратегий является равновесным по Нэшу. При этом

$$I_i(u^0, v^0, w^0) = \varphi_i(0,0,0) = 1,\ i = 1,2,3.$$

Покажем, что в рамках компромиссных стратегий каждый игрок может строго улучшить этот результат. Полагаем

$$\hat{u}^{\text{комп}}(x,y) = \hat{v}^{\text{комп}}(x,y) = \hat{w}^{\text{комп}}(x,y) =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{-x}{\sqrt{x^2+4y^2}} \\ \frac{-2y}{\sqrt{x^2+4y^2}} \end{pmatrix}, & g(x,y,z) > c \\ \begin{pmatrix} \frac{x_*-x}{\sqrt{(x-x_*)^2+(y-y_*)^2}} \\ \frac{y_*-y}{\sqrt{(x-x_*)^2+(y-y_*)^2}} \end{pmatrix}, & g(x,y,z) \leqslant c. \end{cases}$$

Здесь

$$x_* = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{-1+\sqrt{3}}{6},$$
$$y_* = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = \frac{3+\sqrt{3}}{6}.$$

Заметим, что стратегии

$$\hat{u}^{\text{комп}},\ \hat{v}^{\text{комп}},\ \hat{w}^{\text{комп}}$$

определены корректно, т. к.

$$g(x_*, y_*, z_*) = 1{,}2589 > c = 1{,}2.$$

Для данного набора стратегий значения плат игроков следующие:

$$I_1(\hat{u}^{\text{комп}}, \hat{v}^{\text{комп}}, \hat{w}^{\text{комп}}) = 0{,}845485 < 1 = I_1(u^0, v^0, w^0),$$
$$I_2(\hat{u}^{\text{комп}}, \hat{v}^{\text{комп}}, \hat{w}^{\text{комп}}) = 0{,}547274 < 1 = I_2(u^0, v^0, w^0),$$
$$I_3(\hat{u}^{\text{комп}}, \hat{v}^{\text{комп}}, \hat{w}^{\text{комп}}) = 0{,}881385 < 1 = I_3(u^0, v^0, w^0).$$

Таким образом, каждый из игроков действительно получил результат, лучший, чем при равновесном наборе стратегий.

Список литературы

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1973. 455 с.
2. Лутманов С. В. Компромиссное управление в дифференциальных играх нескольких лиц// Известия Института математики и информатики. Вып. 2 (32). Ижевск, 2005. С.83–102.
3. Кулагин Е. В., Лутманов С. В., Петухов И. Построение гарантирующих стратегий в одной нелинейной дифференциальной игре наведения-уклонения// Проблемы механики и управления: Межвуз. сб. науч. трудов. Пермь. 2004. С.34–45
4. Лутманов С. В. Об одном способе построения стабильного моста в нелинейной дифференциальной игре// Проблемы механики и управления: Межвуз. сб. науч. трудов. Пермь. 2003. С.41–48
5. Лутманов С. В., Пальянова Е. В. Построение стабильных мостов в нелинейных антагонистических дифференциальных играх// Вестн. Перм. госун-та. Сер. Математика, информатика, механика. Пермь, 2003. Вып.5. С.41–46.