Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2005. Ѓ4(34)

УДК 517.934

 Н.Н. Петров
npetrov@udmnet.ru

КОНФЛИКТНО УПРАВЛЯЕМЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГРУПП УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ [1]

Ключевые слова: групповое преследование, поимка, убегание.

Abstract. Result's review pursuit problem and evasion problem in differential games with many players was made.

Введение

В данной работе предпринимается попытка сделать обзор результатов по задаче преследования и задаче уклонения в дифференциальных играх качества между группой преследователей и группой убегающих.

Подбор материала не претендует на полноту и отражает, в первую очередь, научные интересы автора статьи.

1. Линейная задача взаимодействия групп управляемых объектов

В пространстве $R^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = Ax_i + u_i, \ u_i \in U_i, \ x_i(0) = x_i^0. \tag{1.1}$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (03-01-0014) и программой "Университеты России" (грант 34126).

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = Ay_j + v_j,\ v_j \in V,\ y_j(0) = y_j^0, \tag{1.2}$$

где A — квадратная матрица порядка k, U_i, V выпуклые компакты, такие, что $U_i \subset V$.

Пусть $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$. Обозначим данную игру через $\Gamma(n, m, z^0)$.

Цель группы преследователей состоит в том, чтобы ґпереловитьЄ всех убегающих. Цель группы убегающих — помешать этому, т. е. предоставить возможность по крайней мере одному из убегающих уклониться от встречи. Допустимыми управлениями игроков являются измеримые функции, при этом убегающие используют информацию о текущей позиции.

О п р е д е л е н и е 1.1. В игре $\Gamma(n, m, z^0)$ происходит уклонение от встречи, если существуют стратегии убегающих, такие, что $x_i(t) \neq y_j(t)$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, $t \in [0, \infty)$ при некотором s при любых управлениях преследователей.

В работах [1-3] были получены следующие результаты.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть V — строго выпуклый компакт и выполнено по крайней мере одно из условий:*

а) $n \leqslant k + 1,\ m \geqslant 2$,

б) $n \leqslant 2k - 1,\ m \geqslant k$.

Тогда в игре $\Gamma(n, m, z^0)$ происходит уклонение от встречи при любом векторе z^0.

Т е о р е м а 1.2. *Пусть V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, и выполнено по крайней мере одно из условий:*

а) $n \leqslant k + 2,\ m \geqslant 2$,

б) $n \leqslant 2k,\ m \geqslant k$.

Тогда в игре $\Gamma(n, m, z^0)$ происходит уклонение от встречи при любом векторе z^0.

Т е о р е м а 1.3. *Пусть V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и выполнены следующие условия*

$$n \geqslant 2,\ m \geqslant (q+1)2^{q+1}+2,\ q=[\log_2(n-1)].$$

Тогда в игре $\Gamma(n,m,z^0)$ происходит уклонение от встречи при любом векторе z^0.

Т е о р е м а 1.4. *Пусть $A=0,\ U_i=V=D_1(0)$, $m=2$. Для того чтобы в игре $\Gamma(n,m,z^0)$ происходило уклонение от встречи из любых начальных позиций, необходимо и достаточно, чтобы $n \leqslant 2k$. (Здесь $D_1(0)$ — шар радиуса единица с центром в начале координат).*

Т е о р е м а 1.5. *Пусть $A=0,\ U_i=V=D_1(0), m=3$ и выполнено хотя бы одно из условий:*

а) $n \leqslant 6,\ k \geqslant 2$,

б) $n \leqslant 7,\ k \geqslant 3$.

Тогда в игре $\Gamma(n,m,z^0)$ происходит уклонение от встречи любом векторе z^0.

По-видимому, впервые указанная задача обсуждалась в статье [4], а далее в работе [5], где рассматривался случай простого движения ($A=0,\ U_i=V=D_1(0)$). В указанных работах была введена функция $f: N \to N$

$$f(n)=\min\{m : \text{в игре } \Gamma(n,mz^0) \text{ происходит уклонение от встречи из любых начальных позиций}\}$$

и получены следующие результаты

Т е о р е м а 1.6. *Существуют константы c_1, c_2 такие, что для всех $n \in N, n \neq 1$ справедливо неравенство*

$$c_1 \ln n \leqslant f(n) \leqslant c_2 \ln n.$$

В работе [6] дополнительно предполагалось, что убегающие в процессе игры не покидают пределы выпуклого многогранного множества

$$D = \{y \in R^n : (p_j, y) \leqslant \mu_j, j = 1, \ldots, r\}, \tag{1.3}$$

где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — вещественные числа, такие что $\mathrm{Int} D \neq \emptyset$.

Была доказана

Т е о р е м а 1.7. *Существуют константы c_1, c_2 такие, что для всех $n \in N, n \neq 1$ справедливо неравенство*

$$c_1 \ln n \leqslant f(n) \leqslant c_2 \ln n.$$

С л е д с т в и е 1.1. *Для любого натурального числа l существуют натуральные числа n, m, вектор z^0 такие, что $m - n > l$ и в игре $\Gamma(n, m, z^0)$ происходит поимка.*

С л е д с т в и е 1.2. *Для любого натурального числа l существуют натуральные числа n, m такие, что в игре $\Gamma(n, m, z^0)$ происходит уклонение от встречи из любых начальных позиций, а в игре $\Gamma(n + 1, m, z_1^0)$ происходит поимка при некотором z_1^0.*

2. Преследование группы убегающих, использующих программные стратегии

В работе [7] рассматривалась дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots E_m$.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i,\ \|u_i\| \leqslant 1,\ x_i(0) = x_i^0. \tag{2.1}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = v_j,\ \|v_j\| \leqslant 1,\ y_j(0) = y_j^0. \tag{2.2}$$

Цель группы преследователей — ґпойматьЄ не менее q убегающих $(1 \leqslant q \leqslant m)$. Дополнительно предполагается, что убегающие выбирают в момент $t = 0$ свои программные управления для всех $t \in [0, \infty)$, а затем преследователи определяют свои движения на основе информации о выборе убегающих, и, кроме того, каждый преследователь ловит не более одного убегающего.

О п р е д е л е н и е 2.1. В игре Γ происходит поимка, если существует момент T такой, что для любой совокупности траекторий убегающих

$$\{y_j(t), t \in [0, \infty), y_j(0) = y_j^0, j = 1, \ldots m\}$$

найдутся траектории преследователей

$$\{x_i(t), t \in [0, \infty), x_i(0) = x_i^0, i = 1, \ldots, n\},$$

обладающие следующим свойством: существуют множества индексов

$$N \subset \{1, \ldots, n\},\ M \subset \{1, \ldots, m\}, |M| = |N| = q,$$

такие, что каждый убегающий $E_j, j \in M$ ґловитсяЄ не позднее момента T некоторым преследователем $P_i, i \in N$, причем если преследователь P_i ловит убегающего E_j, то остальные убегающие считаются им не пойманными. Выражение P_i ґловитЄ E_j означает, что существует момент $\tau_{ij} \in [0, T]$ такой, что $x_i(\tau_{ij}) = y_j(\tau_{ij})$.

У с л о в и е 2.1. Для каждого $p \in \{0, \ldots, q-1\}$ выполнено следующее: для всякого множества $N \subset \{1, \ldots, n\}, |N| = n - p$ найдется множество $M \subset \{1, \ldots, m\}, |M| = q - p$, что для всех $j \in M$ выполнено

$$y_j^0 \in \operatorname{Intco}\{x_i^0,\ i \in N\}.$$

Была доказана

Т е о р е м а 2.1. *Для того чтобы в игре* Γ *происходила поимка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (2.1) .

В работах [8-10] данная теорема была обобщена на дифференциальные игры $n+m$ лиц, в которых закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$x_i^{(l)} + a_1 x_i^{(l-1)} + \dots + a_l x_i = u_i,\ u_i \in V, \tag{2.3}$$

а закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$y_j^{(l)} + a_1 y_j^{(l-1)} + \dots + a_l y_j = v_j,\ v_j \in V. \tag{2.4}$$

Здесь $x_i, y_j \in R^k, a_1, \dots, a_l \in R^1$, V — строго выпуклый компакт R^k с непустой внутренностью. При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i(0) = x_{i0}^0, \dot{x}_i(0) = x_{i1}^0, \dots, x_i^{(l-1)}(0) = x_{il-1}^0,$$
$$y_j(0) = y_{j0}^0, \dot{y}_j(0) = y_{j1}^0, \dots, y_j^{(l-1)}(0) = y_{jl-1}^0,$$

причем $x_{i0}^0 \neq y_{j0}^0$.

Дополнительно предполагается, что каждый из убегающих не покидает пределы выпуклого многогранного множества вида (1.3).

О п р е д е л е н и е 2.2. В игре Γ происходит поимка, если существует момент T такой, что для любой совокупности траекторий убегающих

$$\{y_j(t), y_j^{\alpha}(0) = y_{j\alpha}^0, \alpha = 0, \dots, l-1, y_j(t) \in D, t \in [0, \infty)\}$$

найдутся траектории преследователей

$$\{x_i(t), x_i^{\alpha}(0) = x_{i\alpha}^0\},$$

обладающие следующим свойством: существуют множества индексов

$$N \subset \{1, \dots, n\},\ M \subset \{1, \dots, m\}, |M| = |N| = q,$$

такие, что каждый убегающий $E_j, j \in M$ ґловитсяЄ не позднее момента T некоторым преследователем $P_i, i \in N$, причем если преследователь P_i ловит убегающего E_j, то остальные убегающие считаются им не пойманными. Выражение P_i ґловитЄ E_j означает, что существует момент $\tau_{ij} \in [0, T]$ такой, что $x_i(\tau_{ij}) = y_j(\tau_{ij})$.

Обозначим через $\varphi_q, q = 0, \dots, l-1$ решения уравнения

$$w^{(l)} + a_1 w^{(l-1)} + \dots + a_l w = 0$$

с начальными условиями

$$w^{(\beta)}(0) = 0, \beta = 0, \dots, q-1, q+1, \dots l-1, w^{(q)}(0) = 1.$$

П р е д п о л о ж е н и е 2.1. Все корни характеристического уравнения

$$\lambda^l + a_1 \lambda^{l-1} + \dots + a_l = 0 \tag{2.5}$$

вещественны и неположительны.

Считаем далее, что предположение 2.1 выполнено и обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ попарно различные корни уравнения (2.5), а их кратности — $k_1, \dots, k_s$. Пусть далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t) x_{i0}^0 + \varphi_i(t) x_{i1}^0 + \dots + \varphi_{l-1}(t) x_{il-1}^0,$$

$$\eta_j(t) = \varphi_0(t) y_{j0}^0 + \varphi_i(t) y_{j1}^0 + \dots + \varphi_{l-1}(t) y_{jl-1}^0,$$

$$\xi_{ij}(t) = \xi_i(t) - \eta_j(t).$$

Так как

$$\varphi_\beta(t) = \sum_{\gamma=1}^{s} e^{\lambda_\gamma t} P_{\gamma\beta}(t),$$

где $P_{\gamma\beta}$ — многочлены степени не выше $k_\gamma - 1$, то $\xi_i(t), \eta_j(t)$ представимы в виде

$$\xi_i(t) = \sum_{\gamma=1}^{s} e^{\lambda_\gamma t} Q_{\gamma i}(t), \ \ \eta_j(t) = \sum_{\gamma=1}^{s} e^{\lambda_\gamma t} R_{\gamma j}(t).$$

П р е д п о л о ж е н и е 2.2.

$$\deg Q_{si} = \deg R_{sj} = \deg P_{sl-1} = k_1 - 1 = \nu.$$

Обозначим

$$x_i^0 = \lim_{t\to\infty} \frac{Q_{si}(t)}{t^\nu}, \ \ y_j^0 = \lim_{t\to\infty} \frac{R_{sj}(t)}{t^\nu}.$$

У с л о в и е 2.2. Для каждого $p \in \{0, \dots, q-1\}$ выполнено следующее: для всякого множества $N \subset \{1, \dots, n\}, |N| = n - p$ найдется множество $M \subset \{1, \dots, m\}, |M| = q - p$, что для всех $\gamma \in M$ выполнено

$$0 \in \operatorname{Intco}\{x_\alpha^0 - y_\beta^0, \alpha \in N, p_1, \dots, p_r\}.$$

Т е о р е м а 2.2. *Пусть выполнены предположения* 2.1, 2.2, $V = D_1(0)$, $n \geqslant k$, $\lambda_s < 0$, $\mu_1 = \dots = \mu_r = 0$. *Для того чтобы в игре* Γ *происходила поимка, достаточно выполнения условия* (2.2). *При* $l = 1, a_1 > 0$ *условие* (2.2) *является необходимым.*

Т е о р е м а 2.3. *Пусть выполнены предположения* 2.1, 2.2, $V = D_1(0)$, $n \geqslant k$, $\lambda_s = 0$. *Для того чтобы в игре* Γ *происходила поимка, достаточно выполнения условия* (2.2). *При* $l = 1, a_1 = 0$ *условие* (2.2) *является необходимым.*

П р е д п о л о ж е н и е 2.3. Все корни характеристического уравнения (2.5) простые и чисто мнимые.

Обозначим через H_{ij} кривые

$$H_{ij} = \{\xi_{ij}(t), \ t \in [0, \infty)\}.$$

У с л о в и е 2.3. Для каждого $p \in \{0, \ldots, q-1\}$ выполнено следующее: для всякого множества $N \subset \{1, \ldots, n\}, |N| = n-p$ найдется множество $M \subset \{1, \ldots, m\}, |M| = q-p,$ что для всех $\gamma \in M$ выполнено условие

$$0 \in \mathrm{Intco}\{H_{\alpha,\gamma}, \alpha \in N\}.$$

В работе [10] были получены следующие результаты.

Т е о р е м а 2.4. *Пусть выполнено предположение* (2.3), $D = R^k$. *Для того чтобы в игре* Γ *происходила поимка, достаточно выполнения условия* (2.3).

Т е о р е м а 2.5. *Пусть выполнено предположение* (2.3), $m = n = q = 1, k = 2, D = R^2$. *Тогда в игре* Γ *происходит поимка из любых начальных позиций.*

У с л о в и е 2.4. Для каждого $p \in \{0, \ldots, q-1\}$ выполнено следующее: для всякого множества $N \subset \{1, \ldots, n\}, |N| = n-p$ найдется множество $M \subset \{1, \ldots, m\}, |M| = q-p,$ что для всех $\gamma \in M$ выполнено

$$0 \in \mathrm{Intco}\{x^0_{\alpha 0} - y^0_{\gamma 0},\ \alpha \in N\}.$$

Т е о р е м а 2.6. *Пусть выполнены предположение* (2.3), *условие* $(2.4), D = R^k$. *Тогда в игре* Γ *происходит поимка из любых начальных позиций.*

В работе [11] рассматривалась дифференциальная игра, описываемая системами вида

$$\dot{z}_{ij} = Az_{ij} + u_i - v_j, u_i, v_j \in R^k, z_{ij}(0) = z^0_{ij}, \tag{2.6}$$

где $z_{ij}, u_i, v_j \in R^k$, A — квадратная матрица порядка k.

П р е д п о л о ж е н и е 2.4. Все корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

простые и чисто мнимые.

У с л о в и е 2.5. Для каждого $p \in \{0, \ldots, q-1\}$ выполнено следующее: для всякого множества $N \subset \{1, \ldots, n\}, |N| = n-p$ найдется множество $M \subset \{1, \ldots, m\}, |M| = q-p,$ что для всех $\gamma \in M$ выполнено

$$0 \in \mathrm{Intco}\{z_{\alpha,\gamma}, \alpha \in N\}.$$

Была доказана

Т е о р е м а 2.7. *Пусть выполнено предположение* (2.4), $D = R^k$. *Для того чтобы в игре* Γ, *описываемой системой* (2.6), *происходила поимка, достаточно выполнения условия* (2.5).

3. Преследование группы жестко скоординированных убегающих

В работах [12,13] рассматривалась дифференциальная игра Γ, описываемая системой вида

$$\dot{z}_{ij} = \lambda_{ij} z_{ij} - u_i + v, \;\; z_{ij}(0) = z_{ij}^0, \;\; \|u_i\| \leqslant 1, \|v\| \leqslant 1,$$

где $z_{ij} \in R^k, \lambda_{ij} \in R^1, i = 1, \ldots, n, \;\; j = 1, \ldots, m.$

Данную игру можно рассматривать как дифференциальную игру $n+m$ лиц: n преследователей, m убегающих, при условии, что убегающие используют одно и то же управление. Цель группы преследователей — поймать хотя бы одного убегающего. Пусть $z^0 = (z_{ij}^0)$.

О п р е д е л е н и е 3.1. В игре Γ происходит поимка, если существует $T > 0$ и по любой измеримой функции $v(t), t \in [0, T]$ существуют измеримые функции

$$u_i(t) = u_i(t, z^0, v(s), 0 \leqslant s \leqslant t),$$

номера $\alpha, \beta,$ момент $\tau \in [0, T]$ такие, что $z_{\alpha\beta}(\tau) = 0.$

О п р е д е л е н и е 3.2. В игре Γ происходит уклонение от встречи, если существует измеримая функция $v(t) = v(t, z_{ij}(t))$ такая, что для любых измеримых функций $u_i(t)$ для любых i, j справедливо $z_{ij}(t) \neq 0$ для всех $t \in [0, \infty)$.

Были получены следующие результаты.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть существует отображение*

$$\varphi : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$$

такое, что

$$O \in \operatorname{Intco}\{z^0_{1\varphi(1)}, z^0_{2\varphi(2)}, \dots, z^0_{n\varphi(n)}\}, \ \lambda_{i\varphi(i)} \leqslant 0.$$

Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

Т е о р е м а 3.2. *Если*

$$0 \notin \operatorname{Intco}\{z^0_{11}, z^0_{12}, \dots, z^0_{nm}\},$$

то в игре Γ *происходит уклонение от встречи.*

Т е о р е м а 3.3. *Пусть*

$$n \leqslant k, \ \lambda_{ij} = \lambda_i, \ \min_{i, \alpha \neq \beta} \|z^0_{i\alpha} - z^0_{i\beta}\| \neq 0.$$

Тогда в игре Γ *происходит уклонение от встречи.*

В работах [14 - 16] рассматривалась задача простого преследования группой преследователей группы жестко скоординированных убегающих, при этом в работах [14;15] без фазовых ограничений, а в работе [16] с фазовыми ограничениями для убегающих вида (1.3).

Были доказаны следующие теоремы.

Т е о р е м а 3.4. *Пусть* $n \geqslant k$ *и*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{x^0_i - y^0_j, p_1, \dots, p_r\}.$$

Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

Т е о р е м а 3.5. *Пусть*

$$0 \notin \mathrm{Intco}\{x_i^0 - y_j^0, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Тогда в игре Γ *происходит уклонение от встречи.*

Т е о р е м а 3.6. *Пусть* $n \leqslant k-1$. *Тогда в игре* Γ *происходит уклонение от встречи.*

В работе [17] данная задача была обобщена на дифференциальные игры $n+m$ лиц, в которых закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$x_i^{(l)} + a_1 x_i^{(l-1)} + \cdots + a_l x_i = u_i, \ \|u_i\| \leqslant 1, \tag{3.1}$$

а закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$y_j^{(l)} + a_1 y_j^{(l-1)} + \cdots + a_l y_j = v, \ \|v\| \leqslant 1. \tag{3.2}$$

Здесь $x_i, y_j \in R^k, a_1, \ldots, a_l \in R^1$. При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i(0) = x_{i0}^0, \dot{x}_i(0) = x_{i1}^0, \ldots, x_i^{(l-1)}(0) = x_{il-1}^0,$$
$$y_j(0) = y_{j0}^0, \dot{y}_j(0) = y_{j1}^0, \ldots, y_j^{(l-1)}(0) = y_{jl-1}^0,$$

причем $x_{i0}^0 \neq y_{j0}^0$.

Дополнительно предполагается, что каждый из убегающих не покидает пределы выпуклого многогранного множества вида (1.3).

О п р е д е л е н и е 3.3. Будем говорить,что в игре Γ происходит поимка, если существуют момент $T > 0$ и измеримые функции $u_i(t) = u_i(t, x_{i\alpha}^0, y_\alpha^0, v(\cdot))$, $\|u_i(t)\| \leqslant 1$, что для любой измеримой функции $v(t)$, $\|v(t)\| \leqslant 1$, $y_j(t) \in D$, $t \in [0, T]$ существуют момент времени $\tau \in [0, T]$ и номера i, j что $x_i(\tau) = y_j(\tau)$.

П р е д п о л о ж е н и е 3.1. Все корни характеристического уравнения (2.5) имеют неположительные вещественные части.

П р е д п о л о ж е н и е 3.2. Для всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство $\varphi_{l-1}(t) \geqslant 0$.

Отметим, что предположение (3.2) выполнено, если уравнение (2.5) имеет только вещественные корни. Из предположения (3.2) следует,что уравнение (2.5) имеет хотя бы один вещественный корень. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_s (\lambda_1 <, \ldots, < \lambda_s)$ вещественные корни, через $\mu_1 \pm i\nu_1, \ldots, \mu_q \pm i\nu_q$,
$(\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_q)$ — комплексные корни уравнения (2.5),
k_s — кратность λ_s, m_α — кратность корня $\mu_\alpha \pm i\nu_\alpha$. В силу предположения (3.2) $\mu_q \leqslant \lambda_s$. Пусть далее

$$\eta_j(T,t) = \varphi_0(T)y_j(t) + \varphi_1(T)\dot{y}_j(t) \ldots \varphi_{l-1}(T)y_j^{(l-1)}(t),$$

$$\zeta_i(T,t) = \varphi_0(T)x_j(t) + \varphi_1(T)\dot{x}_i(t) \ldots \varphi_{l-1}(T)x_i^{(l-1)}(t),$$

$$\xi_{ij}(T,t) = \varphi_0(T)z_{ij}(t) + \varphi_1(T)\dot{z}_{ij}(t) + \ldots \varphi_{l-1}(T)z_{ij}^{(l-1)}(t).$$

Тогда $\eta_j(T,0), \zeta_i(T,0), \xi_{ij}(T,0), \varphi_{l-1}(t)$ представимы в виде

$$\eta_j(T,0) = \sum_{\beta=1}^{s} \exp(\lambda_\beta T) P_{j\beta}^1(T) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{q} \exp(\mu_\alpha T)\ (Q_{j\alpha}^1(T) \cos \nu_\alpha T + R_{j\alpha}^1(T) \sin \nu_\alpha T),$$

$$\zeta_i(T,0) = \sum_{\beta=1}^{s} \exp(\lambda_\beta T) P_{i\beta}^2(T) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{q} \exp(\mu_\alpha T)\ (Q_{i\alpha}^2(T) \cos \nu_\alpha T + R_{i\alpha}^2(T) \sin \nu_\alpha T),$$

$$\xi_{ij}(T,0) = \sum_{\beta=1}^{s} \exp(\lambda_j T) P_{ij\beta}(T) +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{q}\exp(\mu_\alpha T)(Q_{ij\alpha}(T)\cos\nu_\alpha T+R_{ij\alpha}(T)\sin\nu_\alpha T),$$

$$\varphi_{l-1}(t)=$$

$$=\sum_{\beta=1}^{s}exp(\lambda_\beta t)P_\beta^0(t)+\sum_{\alpha=1}^{q}exp(\mu_\alpha t)(Q_\alpha^0(t)cos\nu_\alpha t+R_\alpha^0(t)sin\nu_\alpha t).$$

Считаем, что $\xi_{ij}(T,0)\neq 0$ для всех i,j и $t>0$, ибо если $\xi_{pq}(T,0)=0$ при некоторых p,q,T то преследователь P_p ловит убегающего E_q, полагая $u_p(t)=v(t)$. Считаем также, что $P_{ijs}(t)\neq 0$ для всех i,j, ибо в противном случае преследователи первоначально добиваются выполнения указанного условия.

Обозначим через $\gamma_{i,j}$ - степень многочлена P_{ijs}, γ - степень многочлена P_s^0. Можно считать, что $\gamma_{i,j}=\gamma$ для всех i,j, ибо в противном случае преследователи P_i первоначально добиваются выполнения данного условия, выбирая свои управления $u_i(t)$ на достаточно малом отрезке времени так, чтобы коэффициенты при t^γ многочленов P_{ijs} были отличны от нуля.

П р е д п о л о ж е н и е 3.3. $m_\alpha<k_s$ для всех $\alpha\in I=\{\alpha\mid\mu_\alpha=\lambda_s\}$.

Обозначим

$$X_i^0=\lim_{t\to\infty}\frac{P_{is}^2(t)}{t^\gamma},\ Y_j^0=\lim_{t\to\infty}\frac{P_{js}^1(t)}{t^\gamma},\ Z_{ij}^0=\lim_{t\to\infty}\frac{P_{ijs}(t)}{t^\gamma},$$

Будем предполагать, что начальные условия таковы, что

а) если $n>k$, то для любого набора индексов

$$I\subset\{1,2,\ldots,n\},\ |I|\geqslant k+1$$

справедливо $\mathrm{Intco}\{X_i^0,i\in I\}\neq\emptyset$;

б) любые k векторов из совокупности $\{X_i^0-Y_j^0,Y_l^0-Y_r^0,l\neq r\}$ линейно независимы.

Т е о р е м а 3.7. *Пусть выполнены предположения* $(3.1)-(3.3)$, $D=R^k$, $n\geqslant k+1$ *и*

$$0\in \operatorname{Intco}\{Z_{ij}^0\}.$$

Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

Т е о р е м а 3.8. *Пусть выполнены предположения* $(3.1)-(3.3)$, $n\geqslant k$ *и*

$$0\in \operatorname{Intco}\{Z_{ij}^0,p_1,\ldots,p_r\}.$$

Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

В работе [18] рассматривалась задача о ґмягкойЄ поимке группы инерционных жестко скоординированных убегающих группой преследователей.

Законы движения n преследователей $P_1,\ldots,P_n$ с управлениями u_i и m убегающих $E_1,\ldots,E_m$ с управлением v имеют вид

$$\ddot{x}_i=u_i,\ \|u_i\|\leqslant 1,\quad \ddot{y}_j=v,\ \|v\|\leqslant 1, \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered} x_i(0)=x_i^0,\ \dot{x}_i(0)=x_i^1,\ y_j(0)=y_j^0,\ \dot{y}_j(0)=y_j^1,\\ x_i^0\neq y_j^0,\ x_i^1\neq y_j^1. \end{gathered} \tag{3.4}$$

О п р е д е л е н и е 3.4. В игре Γ происходит ґмягкаяЄ поимка, если существуют $T>0$ и измеримые функции $u_i(t)=u_i(t,x_{i\alpha}^0,y_\alpha^0,v_t(\cdot)),\|u_i(t)\|\leqslant 1,$ что для любой измеримой функции $v(\cdot),\|v(t)\|\leq 1,t\in[0,T]$ существуют момент $\tau\in[0,T]$ и номера $q\in\{1,2,\ldots,n\}$, $r\in\{1,2,\ldots,m\}$, что

$$x_q(\tau)=y_r(\tau),\quad \dot{x}_q(\tau)=\dot{y}_r(\tau).$$

Вместо систем $(3.3),(3.4)$ рассмотрим систему

$$\ddot{z}_{ij}=u_i-v, z_{ij}(0)=z_{ij}^0,\ \dot{z}_{ij}(0)=z_{ij}^1. \tag{3.5}$$

Будем предполагать, что начальные данные таковы, что

а) для любого набора индексов $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $|I| \geqslant k+1$ справедливо

$$\operatorname{Intco}\{x_i^1,\ i \in I\} \neq \emptyset;$$

б) любые k векторов из совокупности $\{x_i^1 - y_j^1,\ y_s^1 - y_r^1, s \neq r\}$ линейно независимы.

Т е о р е м а 3.9. *Пусть*

$$\operatorname{Intco}\{x_i^1\} \cap \operatorname{co}\{y_j^1\} \neq \emptyset.$$

Тогда в игре Γ *происходит «мягкая» поимка.*

Т е о р е м а 3.10. *Пусть*

$$\operatorname{Intco}\{x_i^1\} \cap \operatorname{co}\{y_j^1\} = \emptyset.$$

Тогда в игре Γ *происходит уклонение от «мягкой» поимки.*

4. Поимка двух убегающих

Задача поимки двух убегающих группой преследователей является более сложной. В работах [19-21] рассматривалась дифференциальная игра Γ $n+2$ лиц, n преследователей и двух убегающих, описываемая уравнениями вида

$$\begin{gathered} \dot{z}_{ij} = A_{ij}(t) z_{ij} + f_{ij}(t, u_i, v_j), \\ z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0,\ i = 1, \ldots, m, j = 1, 2, \end{gathered} \tag{4.1}$$

где $z_{ij} \in R^k, u_i \in P_i(t), v_j \in Q_j(t), t \in [t_0, \infty), A_{ij}(t)$ — квадратные матрицы порядка n, непрерывные по совокупности переменных, P_i, Q_j — непрерывные в метрике Хаусдорфа компактнозначные отображения, $f_{ij}(t, u_i, v_j)$ — непрерывные по совокупности переменных функции.

Терминальные множества M_{ij} имеют вид

$$M_{ij}(t) = M_{ij}^1 + M_{ij}^2(t),$$

где M_{ij}^1 — линейные подпространства R^k, $M_{ij}^2(t)$ — выпуклозначные отображения из L_{ij}^1, L_{ij}^1 — ортогональное дополнение к M_{ij}^1 в R^k.

О п р е д е л е н и е 4.1. В игре Γ происходит поимка, если существует $T > 0$ такое, что по любым измеримым функциям $v_1(t), v_2(t)$ можно построить измеримые функции $u_i(t, z_{ij}(t), v_j(s), s \in [t_0, t])$, что найдутся номера i_1, i_2, моменты t_1, t_2 что

$$z_{i_1 1}(t_1) \in M_{i_1 1}(t_1),\ z_{i_2 2}(t_2) \in M_{i_2 2}(t_2).$$

Пусть π_{ij} — оператор ортогонального проектирования из R^k на подпространство L_{ij}^1, $\Omega_{ij}(t, \tau)$ — фундаментальная матрица решений уравнения $\dot{x} = A_{ij}(t)x$, причем $\Omega_{ij}(\tau, \tau) = E$ для всех $\tau \geqslant t_0$, где E — единичная матрица.

П р е д п о л о ж е н и е 4.1. Существуют квадратные матрицы $N_{ij}(t)$ порядка q, непрерывные по $t, t \in [t_0, T]$ такие, что для всех $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}, j = 1, 2$ непусто множество $(t \in [t_0, T])$

$$M_{ij}^3(t, t_0) = M_{ij}^2(t) - \int\limits_{t_0}^{t} \pi_{ij}\Omega_{ij}(t, s) f_{ij}^*(s, P(s), Q_j(s))ds \neq \emptyset,$$

где

$$f_{ij}^*(s, u_i, v) = f_{ij}(s, u_i, v_j) - f_{ij}(s, u_i, N_{ij}(s)v_j).$$

Определим многозначные отображения

$$F_{ij}(t, s, v, t_0) =$$
$$= \pi_{ij}\Omega_{ij}(t, s) f_{ij}(s, P_i(s), N_{ij}(s)v_j) - \beta_{ij}(t, s, t_0) M_{ij}^3(t, t_0),$$
$$F_{ij}(t, s, t_0) = \bigcap_{v_j \in Q_j(s)} F_{ij}(t, s, v, t_0),\ t \geqslant s \geqslant t_0,$$

где $\beta_{ij}(t, s, t_0)$ — некоторые неотрицательные, непрерывные по s, $0 \leqslant s \leqslant t$ функции такие, что $\int\limits_{t_0}^{t} \beta_{ij}(t, s, t_0)ds = 1$.

П р е д п о л о ж е н и е 4.2. Множества $F_{ij}(t,s,t_0)$ непусты для всех (t,s), $t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, i \in N, j=1,2$ и существуют непрерывные по $s, t_0 \leqslant s \leqslant t$ функции
$\gamma_{ij}(t,s,t_0) \in F_{ij}(t,s,t_0)$.

Зафиксировав некоторые функции $\gamma_{ij}(t,s,t_0)$, удовлетворяющие предположению (4.2), полагаем $(0 \leqslant t_0 \leqslant s \leqslant t, v_j \in Q_j(s))$

$$\xi_{ij}(t,t_0,z_{ij}^0) = \pi_{ij}\Omega_{ij}(t,t_0)z_{ij}^0 + \int\limits_{t_0}^{t} \gamma_{ij}(t,s,t_0)ds,$$

$$G_{ij}(t,s,v_j,t_0) = F_{ij}(t,s,v_j,t_0) - \gamma_{ij}(t,s,t_0),$$

$$\alpha(i,j,t,s,t_0,z_{ij}^0,v_j) = \\ = \begin{cases} \max\{\alpha, \alpha \geqslant 0, -\alpha\xi_{ij}(t,t_0,z_{ij}^0) \in G_{ij}(t,s,v_j,t_0)\}, \\ \text{если } \xi_{ij}(t,t_0,z_{ij}^0) \neq 0, \\ (t-t_0)^{-1}, \text{если } \xi_{ij}(t,t_0,z_{ij}^0) = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\mu_{1j}(t,t_0,z_j^0) = \\ = 1 - \inf_{v_j(\cdot)} \max_{i \in N_1} \int\limits_{t_0}^{t} \alpha(i,j,t,s,t_0,z_{ij}^0,v_j(s))ds, \tag{4.3}$$

где $v_j(s)$ — измеримая на интервале $[t_0,t]$ функция, принимающая значения из множества $Q_j(s), N_1 \subset N$.

П р е д п о л о ж е н и е 4.3. Для начальной позиции $z^0 = (z_{11}^0, \dots, z_{m1}^0, z_{12}^0, \dots, z_{m2})$ игры (4.1) существуют множество $N_1 \subset N$, номер $j \in \{1,2\}$, функции $\gamma_{ij}(t,s,t_0), \beta_{ij}(t,s,t_0)$ такие, что уравнение

$$\mu_{1j}(t,t_0,z^0) = 0$$

имеет положительный корень $T^1(t_0,z^0)$.

В силу работы [21] при выполнении предположения (4.3) группа преследователей с номерами из множества N_1 ловит j-го убегающего к моменту $T^1 = T^1(t_0, z^0)$, используя управления $\hat{u}_i(t, v(t))$.

Пусть далее $k = \{1,2\} \setminus j$,

$$z_{1k}(T^1) = z_{ik(j)}(T^1) = z_{ij}(T^1, v_j(\cdot)) -$$

значение в момент T^1 решения уравнения (4.1) при $u_i(s) = \hat{u}_i(s, v_j(s))$, где $v_j(s)$ — произвольная измеримая функция со значениями из $O_j(s)$. Пусть $\alpha(i,k,t,s,t_0)$ — функция, определяемая соотношением (4.2) с заменой индекса j на индекс k, $t_0 \leqslant s \leqslant t$. $\alpha(i,k,t,\tau,T^1, z_{ik}(T^1), v_k)$ — функция, определяемая соотношением (4.2) При замене индекса j на индекс k, s на τ, t_0 на T^1, z^0_{ij} на $z_{ik(j)}(T^1), t \geqslant \tau \geqslant T^1$. Полагаем далее для всех $t \in [t_0, T^1]$

$$\begin{gathered}\varrho_{2k}(t, t_0, T^1, z^0) = \\ = \sup_{v_k(\cdot)} \min_{i \in N_1} \bigl(1 - \int\limits_{t_0}^{t} \alpha(i,k,t-s, z^0_{ik}, v_k(s)ds\bigr),\end{gathered} \tag{4.4}$$

а для всех $t \geqslant T^1$

$$\begin{gathered}\varrho_{2k}(t, t_0, T^1, z^0) = \\ = \sup_{(v_j(\cdot), v_k(\cdot))} \min_{(l,r) l \in N_2, r \in N_1} \bigl(1 - \int\limits_{t_0}^{t} \alpha(l,k,t,s,t_0, z^0_{ik}, v_k(s)ds, \\ 1 - \int\limits_{T^1}^{t} \alpha(r,k,t,\tau,T^1, z_{ik}(T^1, v_j(\cdot)), v_k(s)d\tau\bigr),\end{gathered} \tag{4.5}$$

где $v_j(\cdot)$ — измеримая на $[t_0, T^1]$ функция, $v_j(s) \in Q_j(s)$;
$v_k(s)$ — измеримая на интервале $[T^1, t]$ функция, $v_k(s) \in Q_k(s)$, $N_2 \subset N, N_2 \cap N_1 = \emptyset$.

П р е д п о л о ж е н и е 4.4. Для начальной позиции z^0 игры (4.1) выполнены предположения $4.1-4.3$ и существуют множество $N_2 \subset N, N_2 \cap N_1 = \emptyset$, функции $\gamma_{ik}(t,s,t_0)$, $\beta_{ik}(t,s,t_0), i \in N_1 \cup N_2$ такие, что уравнение $\varrho_{2k}(t,t_0,T^1,z^0) = 0$ имеет положительный корень $T^2(z^0,t_0)$.

Т е о р е м а 4.1. *Если для игры* (4.1) *в позиции* z^0 *выполнены предположения* $4.1-4.4$, *то для позиции* z^0 *разрешима задача преследования группой преследователей двух убегающих, и* $T = \max\{T^1, T^2\}$ *— гарантированное время окончания преследования.*

В работе [22] рассматривалась задача о поимке двух жестко скоординированых убегающих в случае, если система (4.1) имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i,\ x_i(0) = x_i^0,\ \|u_i\| \leqslant 1,$$
$$\dot{y}_j = v,\ y_j(0) = y_j^0,\ \|v\| \leqslant 1,$$

где $i = 1,\ldots,n, j = 1,2$.

Предполагается, что начальные условия удовлетворяют следующим условиям:

а) если $n > k$, то для любого набора индексов $I \subset \{1,2,\ldots,n\}$, $|I| \geqslant k+1$ справедливо условие

$$\operatorname{Intco}\{x_i^0, i \in I\} \neq \emptyset;$$

б) любые k векторов совокупности $\{x_i^0 - y_j^0, c\}$, где $c = y_1^0 - y_2^0$, линейно независимы.

Была доказана

Т е о р е м а 4.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\operatorname{co}\{y_1^0, y_2^0\} \subset \{x_i^0\}$;

2) *существуют множества* $J_1, J_2 \subset \{1,\ldots,n\}$, $I_1, I_2 \subset \{1,\ldots,n\} \setminus (J_1 \cup J_2)$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ *такие, что наборы*

векторов

$$\{x_i^0-y_1^0,-c,i\in J_1\},\ \{x_i^0-y_2^0,c,i\in J_2\},$$
$$\{x_l^0-y_1^0,\ x_m^0-y_2^0,\ x_\alpha^0-y_1^0,x_\beta^0-y_2^0,$$
$$l\in J_1\setminus(J_1\cap J_2),\ m\in J_2\setminus(J_1\cap J_2),\ \alpha\in I_1,\ \beta\in I_2\}$$

образуют положительный базис, причем

$$|\{1,\dots,n\}\setminus(J_1\cap J_2)|\geqslant k+1.$$

Тогда в игре происходит поимка двух жестко скоординированных убегающих.

Список литературы

1. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992.
2. Чикрий А. А., Прокопович П. В. О задаче убегания при взаимодействии групп линейных объектов// Кибернетика. 1989. Ґ5. С. 59-63, 78.
3. Чикрий А. А., Прокопович П. В. Линейная задача убегания при взаимодействии групп управляемых объектов// Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 12-21.
4. Петров Н. Н., Петров Н. Никандр. О дифференциальной игре ґказаки-разбойникиЄ// Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, Ґ 8. С. 1366-1374.
5. Петров Н. Н. Одна оценка в дифференциальной игре со многими убегающими// Вестн. Ленингр. ун-та. 1985. Ґ 22. С. 107-109.
6. Петров Н. Н. Простое преследование при наличии фазовых ограничений. Деп. в ВИНИТИ 20. 03. 84. Ґ 1684. 14с.
7. Петров Н. Н., Прокопенко В. А. Об одной задаче преследования группы убегающих // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, Ґ 4. С. 724-726.
8. Петров Н. Н. Об одной задаче преследования группы убегающих// Автоматика и телемеханика. 1996. Ґ 6. С. 48-54.
9. Петров Н. Н. Теория игр. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1997.
10. Благодатских А. И. О некоторых задачах группового преследования// Дифференциальные уравнения с частными производными

и родственные проблемы анализа и информатики: Тр. Междунар. конф. Ташкент, 2004. Т.2 С. 33-36.

11. Благодатских А. И. Конфликтно управляемые процессы при взаимодействии групп управляемых объектов: Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. Ижевск, 2005. 13с.
12. Сатимов Н., Маматов М. Ш. О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих// ДАН Узб. ССР. 1983. Ѓ4. С. 3-6.
13. Сатимов Н., Маматов М. Ш. Об одном классе линейных дифференциальных и дискретных игр между группами преследователей и убегающих// Дифференциальные уравнения. 1978. Т.14, Ѓ7. С. 1208-1214.
14. Петров Н. Н. Простое преследование жесткосоединенных убегающих// Автоматика и телемеханика. 1997. Ѓ 12. С. 89-95.
15. Вагин Д. А., Петров Н. Н. Задача преследования группы жестко скоординированных убегающих //Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. Ѓ 5. С. 75-79.
16. Вагин Д. А., Петров Н. Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями// Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 2. С. 234-241.
17. Вагин Д. А., Петров Н. Н. Преследование группы убегающих в примере Понтрягина// Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68, вып. 4. С. 623-628.
18. Петров Н. Н. гМягкаяЄ поимка в примере Понтрягина со многими участниками// Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 5. С. 759-770.
19. Григоренко Н. Л. Преследование несколькими управляемыми объектами двух убегающих// ДАН СССР. 1985. Т. 282, Ѓ 5. С. 1051-1054.
20. Григоренко Н. Л. Задача преследования несколькими объектами// Тр. матем. ин-та АН СССР. 1984. Т. 166. С. 61-75.
21. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
22. Вагин Д. А., Петров Н. Н. Преследование двух убегающих// Проблемы механики и управления: Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2005. В печати.