Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2004. Ґ1(29)

УДК 517.5

© **В.И. Родионов**
rodionov@uni.udm.ru

О ПРОСТРАНСТВЕ РЕГУЛЯРНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: предел по множеству, односторонняя производная, прерывистая функция, липшицева функция, кусочно гладкая функция, кусочно линейная функция, сплайн.

Abstract. The concept of regular differentiable function are defined. Any piecewise smooth function are regular differentiable function. At the time a modulus of any continuously differentiable function are regular differentiable function. Any regular differentiable function are Lipschitzian. The space of regular differentiable functions are the closure of the space of piecewise linear functions with respect to Lipschitz norm (or Hölder norm). Any regular differentiable function have one-sided derivatives: the left-side derivative are continuous from the left and the right-side derivative are continuous from the right. The concept of regular derivative are generated by one-sided derivatives. Statements about regular derivatives of arithmetic operations, superposition and total variation of regular differentiable functions are proved.

1. Регулярно дифференцируемые функции, заданные на отрезке

На протяжении всей работы будем применять следующие обозначения. Если I – это отрезок, интервал или полуинтервал, то через I^2_* будем обозначать множество $\{(\tau,s)\in I^2 : \tau\neq s\}$, представляющее собой квадрат без ґглавнойЄ диагонали. Всякая функция $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ порождает функцию двух переменных $X(\tau,s)\doteq\frac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau}$, определенную на множестве $[a,b]^2_*$. Так как $X(\tau,s) = X(s,\tau)$, то иногда мы будем работать с функцией $X(\tau,s)$, определенной лишь на связном множестве $\Delta \doteq \{(\tau,s): a \leqslant \tau < s \leqslant b\}$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Функцию $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ будем называть *регулярно дифференцируемой (или регулярно гладкой)*, если для любого $t\in(a,b]$ существует конечный двойной предел

$$\lim_{\substack{(\tau,s)\in(a,t]^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}} X(\tau,s) \tag{1.1}$$

и для любого $t\in[a,b)$ существует конечный двойной предел

$$\lim_{\substack{(\tau,s)\in[t,b)^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}} X(\tau,s). \tag{1.2}$$

Заметим, что пределы (1.1) и (1.2) – это пределы по множествам $(a,t]^2_*$ и $[t,b)^2_*$ соответственно, а точка (t,t) – точка прикосновения этих множеств.

Линейное пространство регулярно дифференцируемых функций, заданных на $[a,b]$, обозначим через $\mathrm{RD}[a,b]$. Следующие импликации очевидны:

$$x\in\mathrm{RD}[a,b] \implies x\big|_{[\alpha,\beta]}\in\mathrm{RD}[\alpha,\beta] \qquad \forall[\alpha,\beta]\subseteq[a,b],$$

$$x\big|_{[a,c]}\in\mathrm{RD}[a,c],\ \ x\big|_{[c,b]}\in\mathrm{RD}[c,b] \implies x\big|_{[a,b]}\in\mathrm{RD}[a,b].$$

П р и м е р 1.1. Всякая непрерывно дифференцируемая функция $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ является регулярно дифференцируемой, т.е. $\mathrm{C}^{(1)}[a,b]\subset\mathrm{RD}[a,b]$. Действительно, в силу дифференцируемости x для всех $t\in(a,b]$ и $(\tau,s)\in(a,t]^2_*$, $(\tau,s)\to(t,t)$ существует точка ξ, лежащая между τ и s (поэтому $\xi\to t$), что

$$\lim_{\substack{(\tau,s)\in(a,t]^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}} X(\tau,s) = \lim_{\substack{(\tau,s)\in(a,t]^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}} \tfrac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau} = \lim_{\substack{\xi\in(a,t]\\\xi\to t}} x'(\xi) = x'(t).$$

Последнее равенство справедливо в силу непрерывности x'. Существование предела (1.2) доказывается аналогично.

П р и м е р 1.2. Напомним, что функция $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется кусочно гладкой, если существует конечное разбиение $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$ такое, что для всех $k = 1, \ldots, n$ сужение функции x на отрезок $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ есть непрерывно дифференцируемая функция. Поскольку $\mathrm{C}^{(1)}[\tau_{k-1}, \tau_k] \subset \mathrm{RD}[\tau_{k-1}, \tau_k]$ для всех k, то всякая кусочно гладкая функция является регулярно дифференцируемой, т.е. $\mathrm{KC}^{(1)}[a,b] \subset \mathrm{RD}[a,b]$. Так, кусочно гладкая недифференцируемая функция $x = |t|,\ t \in [-1,1]$, принадлежит $\mathrm{RD}[-1,1]$, что следует из существования пределов

$$\lim_{\substack{(\tau,s)\in(-1,t]^2_* \\ (\tau,s)\to(t,t)}} X(\tau,s) = \lim_{\substack{(\tau,s)\in(-1,t]^2_* \\ (\tau,s)\to(t,t)}} \frac{|s|-|\tau|}{s-\tau} = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad t \in (-1,0] \\ 1 & \text{при} \quad t \in (0,1] \end{cases},$$

$$\lim_{\substack{(\tau,s)\in[t,1)^2_* \\ (\tau,s)\to(t,t)}} X(\tau,s) = \lim_{\substack{(\tau,s)\in[t,1)^2_* \\ (\tau,s)\to(t,t)}} \frac{|s|-|\tau|}{s-\tau} = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad t \in [-1,0) \\ 1 & \text{при} \quad t \in [0,1) \end{cases}.$$

Как показано ниже в примере 4.1, функция $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ такая, что $x(0) = 0$ и $x(t) = |t^3 \sin\frac{\pi}{t}|$ при $t \neq 0$, есть регулярно дифференцируемая функция. Очевидно, она не является кусочно гладкой.

П р и м е р 1.3. Дифференцируемая функция с разрывной производной $x : [-1,1] \to \mathbb{R}$, что $x(0) = 0$ и $x(t) = t^2 \cos\frac{1}{t}$ при $t \neq 0$, не является регулярно дифференцируемой. Действительно, две последовательности

$$(\tau_n, s_n) = \left(\tfrac{1}{(2n+1)\pi}, \tfrac{1}{2n\pi}\right) \underset{n}{\to} (0,0), \qquad (\tau_n', s_n') = \left(0, \tfrac{1}{2n\pi}\right) \underset{n}{\to} (0,0)$$

принадлежат множеству $[0,1)^2_*$ и порождают разные пределы

$$\lim_{(\tau_n,s_n)\to(0,0)} X(\tau_n,s_n) = \tfrac{2}{\pi}, \qquad \lim_{(\tau_n',s_n')\to(0,0)} X(\tau_n',s_n') = 0,$$

поэтому предел (1.2) в точке $t = 0$ не существует.

Примеры 1.2 и 1.3 показывают, что понятия дифференцируемости и регулярной дифференцируемости существенно разнятся (ниже будет установлено равенство (2.1)). Известно, что всякая дифференцируемая функция $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ имеет в каждой точке $t \in [a,b]$ конечную производную $x'(t)$, причем функция $x' : [a,b] \to \mathbb{R}$ либо непрерывна в t, либо имеет там разрыв 2-го рода. Ниже мы вводим понятие регулярной производной для функций x из $\mathrm{RD}[a,b]$ и показываем (см. теорему 2.1), что в каждой точке $t \in [a,b]$ регулярная производная функции x либо непрерывна, либо имеет разрыв 1-го рода, причем множество точек разрыва регулярной производной не более чем счетно.

Из определения 1.1 следует, что всякая функция $x \in \mathrm{RD}[a,b]$ порождает функции $A_x : (a,b] \to \mathbb{R}$ и $B_x : [a,b) \to \mathbb{R}$ такие, что

$$A_x(t) = \lim_{\substack{(\tau,s)\in(a,t]^2_* \\ (\tau,s)\to(t,t)}} X(\tau,s) \quad \text{и} \quad B_x(t) = \lim_{\substack{(\tau,s)\in[t,b)^2_* \\ (\tau,s)\to(t,t)}} X(\tau,s). \tag{1.3}$$

Точка (τ,s) в пределах (1.3) может приближаться к точке (t,t) по различным подмножествам множеств $(a,t]^2_*$ и $[t,b)^2_*$. В частности, полагая $\tau = t$ в $(a,t]^2_*$ и $[t,b)^2_*$, получаем формулы

$$A_x(t) = \lim_{\substack{\{s<t\} \\ s\to t}} X(t,s) \quad \text{и} \quad B_x(t) = \lim_{\substack{\{s>t\} \\ s\to t}} X(t,s)$$

или в эквивалентной записи

$$A_x(t) = \lim_{s\to t-0} \tfrac{x(s)-x(t)}{s-t} \quad \text{и} \quad B_x(t) = \lim_{s\to t+0} \tfrac{x(s)-x(t)}{s-t}. \tag{1.4}$$

Кроме того, существуют пределы (1.5)–(1.8) и справедливы равенства

$$A_x(t) = \lim_{\substack{\{\tau<0,\ s<0\} \\ (\tau,s)\to(0,0)}} \tfrac{x(t+\tau+s)-x(t+\tau)}{s}, \tag{1.5}$$

$$A_x(t) = \lim_{\substack{\{\tau+s<0,\ s>0\} \\ (\tau,s)\to(0,0)}} \tfrac{x(t+\tau+s)-x(t+\tau)}{s}, \tag{1.6}$$

$$B_x(t)=\lim_{\substack{\{\tau>0,\ s>0\}\\(\tau,s)\to(0,0)}}\frac{x(t+\tau+s)-x(t+\tau)}{s},\tag{1.7}$$

$$B_x(t)=\lim_{\substack{\{\tau+s>0,\ s<0\}\\(\tau,s)\to(0,0)}}\frac{x(t+\tau+s)-x(t+\tau)}{s}.\tag{1.8}$$

Действительно, заменив в первой формуле (1.3) τ на $t+\tau$ и s на $t+s$, получим, что

$$A_x(t)=\lim_{\substack{\{\tau\leqslant 0,\ s\leqslant 0,\ \tau\neq s\}\\(\tau,s)\to(0,0)}}\frac{x(t+s)-x(t+\tau)}{s-\tau}=\lim_{\substack{\{\tau\leqslant 0,\ \tau+s\leqslant 0,\ s\neq 0\}\\(\tau,s)\to(0,0)}}\frac{x(t+\tau+s)-x(t+\tau)}{s}.\tag{1.9}$$

В последнем равенстве мы заменили s на $\tau+s$. Множества, по которым вычисляются пределы (1.5) и (1.6), принадлежат множеству, по которому вычисляется предел (1.9), следовательно, пределы (1.5) и (1.6) существуют и, более того, они равны $A_x(t)$. Аналогично заменив во второй формуле (1.3) τ на $t+\tau$ и s на $t+s$, получим

$$B_x(t)=\lim_{\substack{\{\tau\geqslant 0,\ s\geqslant 0,\ \tau\neq s\}\\(\tau,s)\to(0,0)}}\frac{x(t+s)-x(t+\tau)}{s-\tau}=\lim_{\substack{\{\tau\geqslant 0,\ \tau+s\geqslant 0,\ s\neq 0\}\\(\tau,s)\to(0,0)}}\frac{x(t+\tau+s)-x(t+\tau)}{s},$$

откуда и следуют формулы (1.7) и (1.8).

Л е м м а 1.1. *Если* $x\in \mathrm{RD}[a,b]$, *то справедливы равенства*

$$\lim_{\tau\to t-0}A_x(\tau)=\lim_{\tau\to t-0}B_x(\tau)=A_x(t)\quad \forall t\in(a,b],\tag{1.10}$$

$$\lim_{\tau\to t+0}A_x(\tau)=\lim_{\tau\to t+0}B_x(\tau)=B_x(t)\quad \forall t\in[a,b).\tag{1.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу существенной значимости формул (1.10) и (1.11) в дальнейших построениях, приведем доказательство формул (1.10) в полном объеме, а доказательство формул (1.11) легко осуществляется симметричным образом. Согласно (1.5)

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall(\tau,s)\in U_\delta\implies \left|\tfrac{x(t+\tau+s)-x(t+\tau)}{s}-A_x(t)\right|<\varepsilon,$$

где $U_\delta=\{(\tau,s)\in\mathbb{R}^2:-\delta<\tau<0,\ -\delta<s<0\}$ – это квадратная область. Зафиксируем $\tau\in(-\delta,0)$. В соответствии с (1.4)

$$A_x(t+\tau)=\lim_{\substack{\{s<t+\tau\}\\ s\to t+\tau}}\tfrac{x(s)-x(t+\tau)}{s-t-\tau}=\lim_{\substack{\{s<0\}\\ s\to 0}}\tfrac{x(t+\tau+s)-x(t+\tau)}{s}$$

(заменили s на $t+\tau+s$). Тем самым найдется s (зависящее от τ) такое, что $(\tau,s)\in U_\delta$ и

$$\left|A_x(t+\tau)-\tfrac{x(t+\tau+s)-x(t+\tau)}{s}\right|<\varepsilon.$$

Следовательно, $|A_x(t+\tau)-A_x(t)|<2\varepsilon$ для всех $\tau\in(-\delta,0)$, т.е.

$$\lim_{\substack{\{\tau<0\}\\ \tau\to 0}}A_x(t+\tau)=A_x(t)\quad\text{или}\quad\lim_{\tau\to t-0}A_x(\tau)=A_x(t).$$

Для произвольного $\delta>0$ через V_δ обозначим треугольник $V_\delta=\{(\tau,s)\in\mathbb{R}^2:-\delta<\tau<0,\ 0<s<-\tau\}$. Согласно (1.6)

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall(\tau,s)\in V_\delta\implies \left|\tfrac{x(t+\tau+s)-x(t+\tau)}{s}-A_x(t)\right|<\varepsilon.$$

Зафиксируем $\tau\in(-\delta,0)$. В соответствии с (1.4)

$$B_x(t+\tau)=\lim_{\substack{\{s>t+\tau\}\\ s\to t+\tau}}\tfrac{x(s)-x(t+\tau)}{s-t-\tau}=\lim_{\substack{\{t>s>t+\tau\}\\ s\to t+\tau}}\tfrac{x(s)-x(t+\tau)}{s-t-\tau}.$$

Перешли от $\{s>t+\tau\}$ к подмножеству $\{t>s>t+\tau\}$. Таким образом, заменив s на $t+\tau+s$, получаем, что

$$B_x(t+\tau)=\lim_{\substack{\{\tau+s<0,\ s>0\}\\ s\to 0}}\tfrac{x(t+\tau+s)-x(t+\tau)}{s},$$

и поэтому найдется такое s (зависящее от τ), что $(\tau,s)\in V_\delta$ и

$$\left|B_x(t+\tau)-\tfrac{x(t+\tau+s)-x(t+\tau)}{s}\right|<\varepsilon.$$

Следовательно, $|B_x(t+\tau) - A_x(t)| < 2\varepsilon$ для всех $\tau \in (-\delta, 0)$, т.е.

$$\lim_{\substack{\{\tau<0\}\\ \tau\to 0}} B_x(t+\tau) = A_x(t) \quad \text{или} \quad \lim_{\tau\to t-0} B_x(\tau) = A_x(t).$$

Доказательство формул (1.11) опирается на (1.7) и (1.8).

С л е д с т в и е 1.1. *Если* $x \in \mathrm{RD}[a,b]$, *то функция* $A_x : (a,b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна слева, а функция* $B_x : [a,b) \to \mathbb{R}$ *непрерывна справа.*

С л е д с т в и е 1.2. *Пусть* $x \in \mathrm{RD}[a,b]$. *Функция* A_x *непрерывна в точке* $t \in (a,b)$ *тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывна функция* B_x. *При этом* $A_x(t) = B_x(t)$.

Действительно, если, например, функция A_x непрерывна в точке $t \in (a,b)$, то $\lim\limits_{\tau\to t-0} A_x(\tau) = A_x(t) = \lim\limits_{\tau\to t+0} A_x(\tau)$ и остается лишь сослаться на формулы (1.10), (1.11).

Наряду с A_x и B_x функция $x \in \mathrm{RD}[a,b]$ порождает функции

$$\hat{A}_x(t) = \begin{cases} B_x(a), & t = a \\ A_x(t), & t \in (a,b] \end{cases}, \hat{B}_x(t) = \begin{cases} B_x(t), & t \in [a,b) \\ A_x(b), & t = b \end{cases}, \tag{1.12}$$

определенные на всем отрезке $[a,b]$, причем согласно лемме 1.1

$$\hat{A}_x(t-0) = A_x(t-0) = A_x(t) = B_x(t-0) = \hat{B}_x(t-0) \quad \forall t \in (a,b], \tag{1.13}$$

$$\hat{A}_x(t+0) = A_x(t+0) = B_x(t) = B_x(t+0) = \hat{B}_x(t+0) \quad \forall t \in [a,b). \tag{1.14}$$

Таким образом, функции $\hat{A}_x$ и $\hat{B}_x$ имеют односторонние пределы, поэтому $\hat{A}_x, \hat{B}_x \in \mathrm{G}[a,b]$, т.е. $\hat{A}_x$ и $\hat{B}_x$ – прерывистые функции (о пространствах $\mathrm{G}[a,b]$, $\mathrm{G}_L[a,b]$, $\mathrm{G}_R[a,b]$ и $\mathrm{G}_0[a,b]$

см. [1-4]). Разность $\hat{A}_x - \hat{B}_x$ также является прерывистой функцией, следовательно, она имеет не более чем счетное множество точек разрыва. Кроме того, согласно (1.13) справедливо

$$\lim_{\tau \to t-0} (\hat{A}_x(\tau) - \hat{B}_x(\tau)) = \hat{A}_x(t-0) - \hat{B}_x(t-0) = 0 \quad \forall t \in (a,b],$$

поэтому $\hat{A}_x - \hat{B}_x \in \mathrm{G}_0[a,b]$. Таким образом, разность $\hat{A}_x - \hat{B}_x$ почти всюду на $[a,b]$ равна нулю, а множество ее точек разрыва не более чем счетно. Тем самым $A_x(\cdot) = B_x(\cdot)$ всюду на (a,b), за исключением разве что конечного или счетного множества точек.

2. Регулярные производные

Анализируя пределы (1.4), легко заметить, что функция A_x совпадает с левой производной x'_- функции $x \in \mathrm{RD}[a,b]$, а функция B_x – с правой производной x'_+ этой функции. Другими словами, всякая функция $x \in \mathrm{RD}[a,b]$ обладает односторонними производными $x'_- : (a,b] \to \mathbb{R}$ и $x'_+ : [a,b) \to \mathbb{R}$ и выполнены равенства $x'_-(\cdot) = A_x(\cdot)$ и $x'_+(\cdot) = B_x(\cdot)$. Следовательно, $x'_-(\cdot) = x'_+(\cdot)$ всюду на (a,b), за исключением разве что конечного или счетного множества точек, и тем самым всякая регулярно дифференцируемая функция $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ почти всюду на $[a,b]$ имеет конечную двустороннюю производную x', причем множество точек, где производная x' не определена, не более чем счетно. *Таким образом, всякая функция $x \in \mathrm{RD}[a,b]$ имеет односторонние производные x'_- и x'_+, обладающие следующими свойствами: x'_- непрерывна слева, x'_+ непрерывна справа, обе имеют не более чем счетное множество точек разрыва, а в точках непрерывности они совпадают.*

Л е м м а 2.1. *Если $x \in \mathrm{RD}[a,b]$ имеет ограниченную производную, то $x \in \mathrm{C}^{(1)}[a,b]$ и, следовательно, справедливо равенство*

$$\mathrm{RD}[a,b] \cap \mathrm{BD}[a,b] = \mathrm{C}^{(1)}[a,b], \tag{2.1}$$

где через $\mathrm{BD}[a,b]$ *обозначено пространство функций с ограниченной на* $[a,b]$ *производной.*

Пусть $x \in \mathrm{RD}[a,b] \cap \mathrm{BD}[a,b]$. Так как $x \in \mathrm{RD}[a,b]$, то x имеет односторонние производные x'_- и x'_+, причем x'_- непрерывна слева, а x'_+ непрерывна справа, а так как x дифференцируема, то существует двусторонняя производная x' и эта функция непрерывна всюду на $[a,b]$ (это следует из равенств $x'(t) = x'_-(t)$ для всех $t \in (a,b]$ и $x'(t) = x'_+(t)$ для всех $t \in [a,b)$). Таким образом, $x \in \mathrm{C}^{(1)}[a,b]$. Обратное включение справедливо в силу примера 1.1 и очевидного включения $\mathrm{C}^{(1)}[a,b] \subset \mathrm{BD}[a,b]$.

Для любой $x \in \mathrm{RD}[a,b]$ определена функция двух переменных

$$\dot{x}(t,\lambda) = \begin{cases} x'_+(a), & t = a \\ (1-\lambda)x'_-(t) + \lambda x'_+(t), & t \in (a,b) \\ x'_-(b), & t = b \end{cases}, (t,\lambda) \in [a,b] \times [0,1], \tag{2.2}$$

причем если $x \in \mathrm{C}^{(1)}[a,b]$, то $\dot{x}(\cdot,\lambda) = x'(\cdot)$ для любого $\lambda \in [0,1]$ (на самом деле это утверждение справедливо при всех $\lambda \in \mathbb{R}$). Другими словами, если $x \in \mathrm{C}^{(1)}[a,b]$, то $\dot{x}(\cdot,\lambda)$ при любом λ совпадает с классической производной $x'(\cdot)$ и это наблюдение приводит нас к следующему определению.

Определение 2.1. Произвольное сечение $\dot{x}(\cdot,\lambda)$ функции (2.2) с фиксированным параметром $\lambda \in [0,1]$ называется *регулярной производной* функции $x \in \mathrm{RD}[a,b]$.

Замечание 2.1. Регулярной производной функции $x \in \mathrm{RD}[a,b]$ можно было бы называть произвольное сечение выпуклой оболочки функций $x'_-(t)$ и $x'_+(t)$ (при $t \in (a,b)$), однако мы считаем такой подход избыточным для тех целей и задач, которые решаются в настоящей работе. Следует также отметить, что к семейству регулярных производных можно было бы относиться как к многозначной функции, однако и такой подход избыточен в дальнейших построениях.

Л е м м а 2.2. *Если* $x \in \mathrm{RD}[a,b]$, $(t,\lambda) \in [a,b]\times[0,1]$, *то*

$$\dot{x}(t,\lambda) = (1-\lambda)\hat{A}_x(t) + \lambda\hat{B}_x(t), \tag{2.3}$$

т.е. $\dot{x}(\cdot,\lambda)$ *есть выпуклая комбинация функций* $\hat{A}_x(\cdot)$ *и* $\hat{B}_x(\cdot)$.

Если $\mu = 1-\lambda$ и $t = a$, то в соответствии с (1.12)

$$\mu\hat{A}_x(a) + \lambda\hat{B}_x(a) = \mu B_x(a) + \lambda B_x(a) = B_x(a) = x'_+(a) = \dot{x}(a,\lambda)$$

и аналогично для $t = b$. Если же $t \in (a,b)$, то

$$\mu\hat{A}_x(t) + \lambda\hat{B}_x(t) = \mu A_x(t) + \lambda B_x(t) = \mu x'_-(t) + \lambda x'_+(t) = \dot{x}(t,\lambda).$$

Т е о р е м а 2.1. *Для любой* $x \in \mathrm{RD}[a,b]$ *и для любого* $\lambda \in [0,1]$ *функция* $\dot{x}(\cdot,\lambda)$ *непрерывна справа в точке* a *; непрерывна слева в точке* b *; непрерывна в любой точке* $t \in (a,b)$ *, где непрерывна хотя бы одна односторонняя производная* $x'_-(\cdot)$ *или* $x'_+(\cdot)$ *, и при этом выполнены равенства* $\dot{x}(t,\lambda) = x'_-(t) = x'_+(t) = x'(t)$ *; наконец, в каждой точке разрыва* $t_k \in (a,b)$ *(их количество не более чем счетно) величина* $\dot{x}(t_k,\lambda)$ *есть выпуклая комбинация чисел* $x'_-(t_k)$ *и* $x'_+(t_k)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mu = 1-\lambda$ и $t = b$, то согласно (2.3) и (1.13)

$$\dot{x}(b-0,\lambda) = \mu\hat{A}_x(b-0) + \lambda\hat{B}_x(b-0)) = A_x(b) = x'_-(b) = \dot{x}(b,\lambda)$$

и аналогично для $t = a$ (используя (1.14)). Пусть $t \in (a,b)$, и допустим, что функция x'_- непрерывна в точке t . Так как $x'_-(\cdot) = A_x(\cdot)$, то в соответствии со следствием 1.2 функции A_x и B_x также непрерывны в точке t и $A_x(t) = B_x(t)$. Следовательно, все выражения, входящие в (1.13) и (1.14), равны между собой и поэтому

$$\dot{x}(t-0,\lambda) = \mu\hat{A}_x(t-0) + \lambda\hat{B}_x(t-0)) = \mu\hat{A}_x(t) + \lambda\hat{B}_x(t)) = \dot{x}(t,\lambda).$$

Аналогично $\dot{x}(t+0,\lambda) = \dot{x}(t,\lambda)$. Кроме того, справедливы равенства $\dot{x}(t,\lambda) = A_x(t) = B_x(t)$, поэтому $\dot{x}(t,\lambda) = x'_-(t) = x'_+(t) =$

$= x'(t)$. Наконец, поскольку $\hat{A}_x, \hat{B}_x \in \mathrm{G}[a,b]$, то множество точек разрыва этих функций (а вместе с ними и функций $\dot{x}(\cdot,\lambda)$, $x'_-(\cdot)$, $x'_+(\cdot)$) не более чем счетно, и нам остается лишь сослаться на лемму 2.2, согласно которой величина $\dot{x}(t_k,\lambda)$ есть выпуклая комбинация чисел $x'_-(t_k)$ и $x'_+(t_k)$.

П р и м е р 2.1. Семейство регулярных производных для недифференцируемой функции из примера 1.2 имеет вид

$$\dot{x}(t,\lambda) = \begin{cases} -1 & \text{при } t \in [-1,0) \\ 2\lambda - 1 & \text{при } t = 0 \\ 1 & \text{при } t \in (0,1] \end{cases}, \qquad \lambda \in [0,1],$$

а совокупность графиков всех этих функций образует на плоскости переменных (t,x) связное множество $\{(t,x) : -1 \leqslant t < 0, x = -1\} \cup \{(t,x) : t = 0, -1 \leqslant x \leqslant 1\} \cup \{(t,x) : 0 < t \leqslant 1, x = 1\}$.

3. Полнота пространства регулярно дифференцируемых функций

Напомним некоторые свойства, связанные с алгеброй $\mathrm{G}[a,b]$ $(= \mathrm{G})$ прерывистых на $[a,b]$ функций. Известно, что алгебраические эндоморфизмы $\mathrm{P} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ и $\mathrm{Q} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ такие, что

$$\mathrm{P} : x(t) \to x_L(t) = \begin{cases} x(a+0), & t = a \\ x(t-0), & t \in (a,b] \end{cases},$$

$$\mathrm{Q} : x(t) \to x_R(t) = \begin{cases} x(t+0), & t \in [a,b) \\ x(b-0), & t = b \end{cases}$$

обладают следующими свойствами:

$$\operatorname{Im} \mathrm{P} = \mathrm{G}_L, \ \operatorname{Ker} \mathrm{P} = \mathrm{G}_0, \ \operatorname{Im} \mathrm{Q} = \mathrm{G}_R, \ \operatorname{Ker} \mathrm{Q} = \mathrm{G}_0, \tag{3.1}$$

$$\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}, \ \mathrm{P}\,\mathrm{Q} = \mathrm{P}, \ \mathrm{Q}\,\mathrm{P} = \mathrm{Q}, \ \mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q}, \tag{3.2}$$

где $\mathrm{G}_L = \mathrm{G}_L[a,b]$ – это подалгебра в G, состоящая из тех функций x, что $x(a+0) = x(a)$ и $x(t-0) = x(t)$ для всех $t \in (a,b]$, а $\mathrm{G}_R = \mathrm{G}_R[a,b]$ – это подалгебра в G, состоящая из тех функций x, что $x(t+0) = x(t)$ для всех $t \in [a,b)$ и $x(b-0) = x(b)$. Функции из G_L называются непрерывными слева, а функции из G_R – непрерывными справа прерывистыми функциями. Напомним еще, что через $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G}_0[a,b]$ обозначена алгебра таких функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}$, что при любом $\varepsilon > 0$ множество $\{t \in [a,b] : |x(t)| \geqslant \varepsilon\}$ конечно. Известно также, что алгебры G_L и G_R изоморфны между собой и обе изоморфны фактор-алгебре $\mathrm{G}\,/\,\mathrm{G}_0$ (считаем функции $x, y \in \mathrm{G}$ эквивалентными и пишем $x \sim y$, если $x - y \in \mathrm{G}_0$; отметим также, что $\mathrm{P}\,x \sim \mathrm{Q}\,x$ для всех $x \in \mathrm{G}$).

Кроме того, алгебры G_L и G_R замкнуты в G по норме

$$\|x\| = \sup_{t \in [a,b]} |x(t)| \qquad \forall x \in \mathrm{G}, \tag{3.3}$$

а поскольку G – банахова алгебра относительно этой нормы, то и алгебры G_L и G_R банаховы. Алгебра G_0 также замкнута в G по норме (3.3), причем $\mathrm{G} = \mathrm{G}_L \oplus \mathrm{G}_0$ и $\mathrm{G} = \mathrm{G}_R \oplus \mathrm{G}_0$, т.е. всякая прерывистая функция $x \in \mathrm{G}$ единственным образом представима в виде $x = x_L + x_0$ или $x = x_R + x_0$, где $x_L \in \mathrm{G}_L$, $x_R \in \mathrm{G}_R$, а $x_0 \in \mathrm{G}_0$. Следует также отметить, что проекторы P и Q непрерывны по норме (3.3), что следует из неравенств

$$\|\,\mathrm{P}\,x\| \leqslant \|x\| \quad \text{и} \quad \|\,\mathrm{Q}\,x\| \leqslant \|x\| \qquad \forall x \in \mathrm{G}\,. \tag{3.4}$$

В частности, для всех $x \in \mathrm{G}$ справедливо равенство

$$\|\,\mathrm{P}\,x\| = \|\,\mathrm{Q}\,x\|. \tag{3.5}$$

Действительно, в силу (3.2) и (3.3) $\|\,\mathrm{P}\,x\| = \|\,\mathrm{P}\,\mathrm{Q}\,x\| \leqslant \|\,\mathrm{Q}\,x\|$ и аналогично $\|\,\mathrm{Q}\,x\| \leqslant \|\,\mathrm{P}\,x\|$.

Для любого $\lambda \in [0,1]$ через $\mathrm{G}^\lambda = \mathrm{G}^\lambda[a,b]$ обозначим подпространство в пространстве G, состоящее из тех x, что

$$x = (1-\lambda)\,\mathrm{P}\,x + \lambda\,\mathrm{Q}\,x. \tag{3.6}$$

Очевидно, $G^0 = G_L$ и $G^1 = G_R$. Легко проверить, что G^λ является алгеброй тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$. Любопытно выглядит пространство $G^{\frac{1}{2}}$, в котором всякая функция обладает тем свойством, что ее значение в любой внутренней точке $t \in (a, b)$ есть полусумма левого и правого пределов.

Л е м м а 3.1. *Любые два пространства из семейства* $\{G^\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ *изоморфны между собой. Пространство* G^λ *банахово по норме* (3.3). *Если* $x \in G^\lambda$, *то* $\|x\| = \|\mathrm{P}\,x\| = \|\mathrm{Q}\,x\|$.

Доказательство. Включение $\mathrm{P}(G^\lambda) \subseteq G^0$ $(= G_L)$ справедливо в силу (3.1). Покажем, что $\mathrm{P}(G^\lambda) = G^0$. Действительно, пусть $y \in G^0$, $z = Qy$ и $x = \mu y + \lambda z$, где $\lambda \in [0, 1]$ и $\mu = 1 - \lambda$. Согласно (3.2)

$$\mathrm{Q}\,x = \mu\,\mathrm{Q}\,y + \lambda\,\mathrm{Q}\,z = \mu\,\mathrm{Q}\,y + \lambda \mathrm{Q}^2 y = \mu\,\mathrm{Q}\,y + \lambda\,\mathrm{Q}\,y = \mathrm{Q}\,y = z,$$

$$\mathrm{P}\,x = \mu\,\mathrm{P}\,y + \lambda\,\mathrm{P}\,z = \mu\,\mathrm{P}\,y + \lambda\,\mathrm{P}\,\mathrm{Q}\,y = \mu\,\mathrm{P}\,y + \lambda\,\mathrm{P}\,y = \mathrm{P}\,y = y.$$

Равенство $\mathrm{P}\,y = y$ справедливо в силу включения $y \in G^0$ (см. (3.6) при $\lambda = 0$). Таким образом, $x = \mu y + \lambda z = \mu\,\mathrm{P}\,x + \lambda\,\mathrm{Q}\,x$, т.е. $x \in G^\lambda$, причем $\mathrm{P}\,x = y$, а это и означает, что $\mathrm{P}(G^\lambda) = G^0$.

Пусть $x \in G^\lambda$, и предположим, что $\mathrm{P}\,x = 0$, т.е. $x \in \operatorname{Ker}\mathrm{P}$. Согласно (3.1) $x \in G_0$ и $x \in \operatorname{Ker}\mathrm{Q}$, поэтому $\mathrm{Q}\,x = 0$, а поскольку $x \in G^\lambda$, то $x = \mu\,\mathrm{P}\,x + \lambda\,\mathrm{Q}\,x = 0$. Таким образом, пространства G^λ и G^0 изоморфны, каково бы ни было $\lambda \in [0, 1]$.

Пусть последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in G^\lambda$, фундаментальна, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m > N \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Элементы последовательности $\{\mathrm{P}\,x_n\}$ принадлежат банахову пространству G^0, а элементы последовательности $\{\mathrm{Q}\,x_n\}$ принадлежат банахову пространству G^1, причем в силу (3.4)

$$\|\mathrm{P}\,x_n - \mathrm{P}\,x_m\| \leqslant \|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \|\mathrm{Q}\,x_n - \mathrm{Q}\,x_m\| \leqslant \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Следовательно, существуют пределы $y = \lim\limits_n \mathrm{P}\,x_n$ и $z = \lim\limits_n \mathrm{Q}\,x_n$, причем $y \in G^0$ и $z \in G^1$, а значит, $\mathrm{P}\,y = y$ и $\mathrm{Q}\,z = z$. Поскольку проекторы P и Q непрерывны, то в соответствии с (3.2)

$$\mathrm{Q}\,x_n = \mathrm{Q}\,\mathrm{P}\,x_n = \mathrm{Q}(\mathrm{P}\,x_n) \to \mathrm{Q}\,y \text{ и } \mathrm{P}\,x_n = \mathrm{P}\,\mathrm{Q}\,x_n = \mathrm{P}(\mathrm{Q}\,x_n) \to \mathrm{P}\,z.$$

Тем самым $\mathrm{Q}\,y = z$ и $\mathrm{P}\,z = y$. Пусть $x = \mu y + \lambda z$. В силу включения $x_n \in \mathrm{G}^\lambda$ справедливо $x_n = \mu\,\mathrm{P}\,x_n + \lambda\,\mathrm{Q}\,x_n \to \mu y + \lambda z = x$, причем $\mathrm{P}\,x = \mu\,\mathrm{P}\,y + \lambda\,\mathrm{P}\,z = \mu y + \lambda y = y$ и $\mathrm{Q}\,x = \mu\,\mathrm{Q}\,y + \lambda\,\mathrm{Q}\,z = \mu z + \lambda z = z$, следовательно, $x = \mu y + \lambda z = \mu\,\mathrm{P}\,x + \lambda\,\mathrm{Q}\,x$, т.е. $x \in \mathrm{G}^\lambda$. Таким образом, всякая фундаментальная последовательность в G^λ сходится к элементу этого пространства, т.е. G^λ – банахово.

Поскольку $\lambda, \mu \geqslant 0$, то в соответствии с (3.5) для любого $x \in \mathrm{G}^\lambda$

$$\|x\| \leqslant \mu\|\,\mathrm{P}\,x\| + \lambda\|\,\mathrm{Q}\,x\| = \|\,\mathrm{P}\,x\| = \|\,\mathrm{Q}\,x\| \leqslant \|x\|.$$

Воспользовались оценками (3.4), справедливыми для всех $x \in \mathrm{G}$.

З а м е ч а н и е 3.1. При доказательстве третьего утверждения леммы 3.1 мы впервые реально использовали условие $\lambda \in [0,1]$ (воспользовались неравенством $\mu \geqslant 0$). Другими словами, несмотря на то что все предыдущие выкладки справедливы при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, мы придаем равенству $\|x\| = \|\,\mathrm{P}\,x\|$ (для всех $\lambda \in [0,1]$ и $x \in \mathrm{G}^\lambda$) принципиальное значение и поэтому вводим ограничение $\lambda \in [0,1]$.

З а м е ч а н и е 3.2. Если $x \in \mathrm{RD}[a,b]$, то в соответствии с (1.12)–(1.14)

$$\mathrm{P}(\hat{A}_x) = \begin{cases} \hat{A}_x(a+0), & t = a \\ \hat{A}_x(t-0), & t \in (a,b] \end{cases} = \begin{cases} B_x(a), & t = a \\ A_x(t), & t \in (a,b] \end{cases} = \hat{A}_x,$$

$$\mathrm{Q}(\hat{B}_x) = \begin{cases} \hat{B}_x(t+0), & t \in [a,b) \\ \hat{B}_x(b-0), & t = b \end{cases} = \begin{cases} B_x(t), & t \in [a,b) \\ A_x(b), & t = b \end{cases} = \hat{B}_x,$$

следовательно, $\hat{A}_x \in \mathrm{G}^0$, а $\hat{B}_x \in \mathrm{G}^1$. Аналогично

$$\mathrm{Q}(\hat{A}_x) = \begin{cases} \hat{A}_x(t+0), & t \in [a,b) \\ \hat{A}_x(b-0), & t = b \end{cases} = \begin{cases} B_x(t), & t \in [a,b) \\ A_x(b), & t = b \end{cases} = \hat{B}_x,$$

$$\mathrm{P}(\hat{B}_x) = \begin{cases} \hat{B}_x(a+0), \ t=a \\ \hat{B}_x(t-0), \ \ t \in (a,b] \end{cases} = \begin{cases} B_x(a), \ t=a \\ A_x(t), \ \ t \in (a,b] \end{cases} = \hat{A}_x.$$

Если $\lambda \in [0,1]$, $\mu = 1-\lambda$ и $y = \dot{x}(\cdot,\lambda)$, то $y = \mu\hat{A}_x + \lambda\hat{B}_x$ и

$$\mathrm{P}\, y = \mu\, \mathrm{P}(\hat{A}_x) + \lambda\, \mathrm{P}(\hat{B}_x) = \mu\hat{A}_x + \lambda\hat{A}_x = \hat{A}_x,$$

$$\mathrm{Q}\, y = \mu\, \mathrm{Q}(\hat{A}_x) + \lambda\, \mathrm{Q}(\hat{B}_x) = \mu\hat{B}_x + \lambda\hat{B}_x = \hat{B}_x,$$

следовательно, $y = \dot{x}(\cdot,\lambda) = \mu\hat{A}_x + \lambda\hat{B}_x = \mu\,\mathrm{P}\,y + \lambda\,\mathrm{Q}\,y$, поэтому $y \in \mathrm{G}^\lambda$. *Таким образом,* $\dot{x}(\cdot,\lambda) \in \mathrm{G}^\lambda[a,b]$ *при любом* $\lambda \in [0,1]$. *Другими словами, всякая регулярная производная* $\dot{x}(\cdot,\lambda)$ *принадлежит соответствующему банахову пространству* G^λ *, причем для любых* $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ *имеет место равенство* $\|\dot{x}(\cdot,\lambda_1)\| = \|\dot{x}(\cdot,\lambda_2)\|$.

При любом $\lambda \in [0,1]$ гомоморфизм линейных пространств

$$\Phi_\lambda : \mathrm{RD}[a,b] \to \mathbb{R} \times \mathrm{G}^\lambda[a,b],$$

$$\Phi_\lambda : x \to (x(a), \dot{x}(\cdot,\lambda))$$

инъективен. Действительно, равенство $\Phi_\lambda(x) = 0$ означает, что $x(a) = 0$ и $\dot{x}(t,\lambda) = 0$ для всех $t \in [a,b]$, поэтому $\dot{x}(\cdot,\lambda)$ всюду непрерывна и совпадает с классической производной $x'(\cdot)$. Тем самым $x(t) \equiv 0$ и, следовательно, $\operatorname{Ker}\Phi_\lambda = \{0\}$. Доказательству сюръективности Φ_λ предшествует следующая

Т е о р е м а 3.1. *Пусть* $y \in \mathrm{G}[a,b]$, $c \in \mathbb{R}$. *Если* $x(t) = c + \int\limits_a^t y(\xi)\,d\xi$ *, то* $x \in \mathrm{RD}[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $y_L = \mathrm{P}\,y$ непрерывна слева во всех точках $t \in (a,b]$ и $y - y_L \in \mathrm{G}_0[a,b]$. В силу последнего включения для любых $\tau, s \in [a,b]$ справедливо равенство $\int\limits_\tau^s [y(\xi) - y_L(\xi)]\,d\xi = 0$, поэтому для любых $t \in (a,b]$ и

$\tau, s \in (a,t]$ имеет место цепочка

$$\int\limits_{\tau}^{s} y(\xi)\,d\xi - y_{L}(t)(s-\tau) = \int\limits_{\tau}^{s} [y(\xi) - y_{L}(t)]\,d\xi = \int\limits_{\tau}^{s} [y_{L}(\xi) - y_{L}(t)]\,d\xi.$$

Так как y_L непрерывна слева, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что при всех $\xi \in (t-\delta, t]$ выполнено $|y_L(\xi) - y_L(t)| < \varepsilon$, поэтому для всех $\tau, s \in (t-\delta, t]$ справедлива оценка

$$\left|x(s) - x(\tau) - y_{L}(t)(s-\tau)\right| = \left|\int\limits_{\tau}^{s} y(\xi)\,d\xi - y_{L}(t)(s-\tau)\right| < \varepsilon|s-\tau|$$

и, следовательно,

$$\lim_{\substack{(\tau,s)\in(a,t]^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}} \tfrac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau} = y_{L}(t) = y(t-0) \qquad \forall t \in (a,b]. \tag{3.7}$$

Аналогично

$$\lim_{\substack{(\tau,s)\in[t,b)^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}} \tfrac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau} = y(t+0) \qquad \forall t \in [a,b), \tag{3.8}$$

что и требовалось доказать.

Согласно теореме 3.1 пара $(c,y) \in \mathbb{R} \times \mathrm{G}^{\lambda}[a,b]$ порождает регулярно дифференцируемую функцию $x(t) = c + \int\limits_{a}^{t} y(\xi)\,d\xi$, где $t \in [a,b]$. Равенство $x(a) = c$ очевидно. Поскольку $x \in \mathrm{RD}[a,b]$, то определено сечение $\dot{x}(\cdot,\lambda)$. Если $\mu = 1-\lambda$ и $t \in (a,b)$, то

$$\dot{x}(t,\lambda) = \mu\hat{A}_x(t) + \lambda\hat{B}_x(t) = \mu A_x(t) + \lambda B_x(t) =$$

$$= \mu y(t-0) + \lambda y(t+0) = y(t).$$

Предпоследнее равенство справедливо в силу (3.7) и (3.8), а последнее – в силу включения $y \in \mathrm{G}^{\lambda}[a,b]$. В силу этих же обстоятельств имеет место цепочка равенств

$$\dot{x}(a,\lambda) = \mu\hat{A}_x(a) + \lambda\hat{B}_x(a) = B_x(a) = y(a+0) = y(a)$$

и аналогично $\dot{x}(b,\lambda) = y(b)$. Таким образом, $\dot{x}(t,\lambda) = y(t)$ для всех $t \in [a,b]$, поэтому $\operatorname{Im}\Phi_\lambda = \mathbb{R} \times \mathrm{G}^\lambda[a,b]$ и, следовательно,

$$\mathrm{RD}[a,b] \approx \mathbb{R} \times \mathrm{G}^\lambda[a,b] \qquad \forall\lambda \in [0,1]. \tag{3.9}$$

Т е о р е м а 3.2. *Пространство* $\mathrm{RD}[a,b]$ *банахово относительно нормы*

$$\|x\| = |x(a)| + \sup_{t\in[a,b]} |\dot{x}(t,\lambda)| \qquad \forall x \in \mathrm{RD}[a,b], \tag{3.10}$$

которая не зависит от $\lambda \in [0,1]$ *.*

Доказательство немедленно следует из изоморфизма (3.9) и полноты пространств $\mathbb{R}$ и $\mathrm{G}^\lambda[a,b]$ по соответствующим нормам. Независимость от λ следует из замечания 3.2.

С л е д с т в и е 3.1. *Если* $x \in \mathrm{RD}[a,b]$ *, то справедливо тождество*

$$x(t) = x(a) + \int\limits_a^t \dot{x}(s,\lambda)\,ds \qquad \forall(t,\lambda) \in [a,b]\times[0,1]. \tag{3.11}$$

С л е д с т в и е 3.2. *Если* $x \in \mathrm{RD}[a,b]$ *, то* x *– липшицева функция, т.е.* $x \in \mathrm{Lip}[a,b]$ *и, следовательно, имеет место диаграмма*

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & \mathrm{BD} & & & & & & \mathrm{C} & & \\ & \nearrow & & \searrow & & & & \nearrow & & \searrow & \\ \mathrm{C}^{(1)} & & & & \mathrm{Lip} \;\rightarrow\; \mathrm{AC} \;\rightarrow\; \mathrm{CBV} & & & & & & \mathrm{G} \;\;, \\ & \searrow & & \nearrow & & & & \searrow & & \nearrow & \\ & & \mathrm{RD} & & & & & & \mathrm{BV} & & \end{array}$$

где стрелки обозначают отношение включения пространств.

Действительно, согласно (3.11) для любых $\tau, s \in [a,b]$

$$|x(s) - x(\tau)| \leqslant \left|\int\limits_\tau^s \dot{x}(t,\lambda)\,dt\right| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |\dot{x}(t,\lambda)| \cdot |s-\tau|,$$

откуда и следует включение $\mathrm{RD} \subset \mathrm{Lip}$. Это включение строгое, так как, например, функция из примера 1.3 липшицева, но не является регулярно дифференцируемой.

4. Регулярная производная сложной функции

Л е м м а 4.1. *Пусть* $x, y \in \mathrm{RD}[a,b]$, $u = x + y$, $v = xy$ *и* $w = x/y$ *(для такой* y *, что* $y(t) \neq 0$ *при всех* $t \in [a,b]$ *). Тогда* $u, v, w \in \mathrm{RD}[a,b]$ *и справедливы формулы*

$$\dot{u}(t,\lambda) = \dot{x}(t,\lambda) + \dot{y}(t,\lambda), \qquad \dot{v}(t,\lambda) = x(t)\,\dot{y}(t,\lambda) + y(t)\,\dot{x}(t,\lambda),$$

$$\dot{w}(t,\lambda) = \tfrac{\dot{x}(t,\lambda)\,y(t) - \dot{y}(t,\lambda)\,x(t)}{y^2(t)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $u \in \mathrm{RD}[a,b]$ очевидно. В силу непрерывности функций x и y при всех $t \in (a,b]$ справедливы цепочки равенств

$$A_v(t) = \lim_{\substack{(\tau,s)\in(a,t]^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}} \tfrac{x(s)(y(s)-y(\tau))}{s-\tau} + \lim_{\substack{(\tau,s)\in(a,t]^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}} \tfrac{y(\tau)(x(s)-x(\tau))}{s-\tau} =$$

$$= x(t)A_y(t) + y(t)A_x(t).$$

$$A_w(t) = \lim_{\substack{(\tau,s)\in(a,t]^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}} \tfrac{x(s)-x(\tau)}{(s-\tau)y(s)} - \lim_{\substack{(\tau,s)\in(a,t]^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}} \tfrac{x(\tau)(y(s)-y(\tau))}{y(s)y(\tau)(s-\tau)} =$$

$$= \tfrac{A_x(t)\,y(t) - A_y(t)\,x(t)}{y^2(t)}.$$

Использовали очевидные тождества

$$v(s) - v(\tau) = x(s)(y(s) - y(\tau)) + y(\tau)(x(s) - x(\tau)),$$

$$w(s) - w(\tau) = \tfrac{x(s)-x(\tau)}{y(s)} - \tfrac{x(\tau)(y(s)-y(\tau))}{y(s)y(\tau)}.$$

Аналогичные формулы имеют место и для величин $B_v(t)$ и $B_w(t)$ (при $t \in [a,b)$), а формулы для регулярных производных выводятся путем несложных естественных преобразований.

Т е о р е м а 4.1. *Пусть* $x \in \mathrm{RD}[a,b]$. *Если* $\alpha = \min\limits_{[a,b]} x(\cdot)$, $\beta = \max\limits_{[a,b]} x(\cdot)$, $f \in \mathrm{RD}[\alpha,\beta]$, $y = f(x(\cdot))$, *то* $y \in \mathrm{RD}[a,b]$ *и справедливы формулы*

$$A_y(t) = \begin{cases} B_f(x(t))\,A_x(t) & \textit{при} \quad A_x(t) < 0 \\ 0 & \textit{при} \quad A_x(t) = 0 \\ A_f(x(t))\,A_x(t) & \textit{при} \quad A_x(t) > 0 \end{cases}, \qquad t \in (a,b],$$

$$B_y(t) = \begin{cases} A_f(x(t))\,B_x(t) & \textit{при} \quad B_x(t) < 0 \\ 0 & \textit{при} \quad B_x(t) = 0 \\ B_f(x(t))\,B_x(t) & \textit{при} \quad B_x(t) > 0 \end{cases}, \qquad t \in [a,b).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $t \in (a,b]$ и произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $x \in \mathrm{RD}[a,b]$, то определена функция $A_x : (a,b] \to \mathbb{R}$, существует $\delta_1 > 0$ такое, что для всех $\tau, s \in (t-\delta_1, t]$

$$|x(s) - x(\tau) - A_x(t)(s-\tau)| \leqslant \varepsilon|s-\tau| \tag{4.1}$$

и в соответствии с (3.11) для всех $\tau, s \in (a,b]$ справедливо

$$x(s) - x(\tau) = \int\limits_{\tau}^{s} A_x(\xi)\,d\xi. \tag{4.2}$$

1. Предположим, что $A_x(t) > 0$. Поскольку функция $A_x(\cdot)$ непрерывна слева, то существует $\delta_2 > 0$ такое, что $A_x(\xi) > 0$ для всех $\xi \in (t-\delta_2, t]$. В частности, в силу (4.2) для любых $\tau, s \in (t-\delta_2, t]$, таких, что $\tau < s$, справедливо $x(\tau) < x(s)$, т.е. x строго монотонно возрастает на полуинтервале $(t-\delta_2, t]$.

Пусть $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Функция x строго монотонно возрастает на $(t-\delta_3, t]$, причем для всех $\tau, s \in (t-\delta_3, t]$ справедлива оценка (4.1). Пусть $z = x(t)$. Покажем, что $z \neq \alpha$. Действительно, если бы это было не так, то выполнялось бы равенство

$x(t) = \min\limits_{\xi\in[a,b]} x(\xi)$, т.е. $x(t) \leqslant x(\xi)$ для всех $\xi \in [a,b]$. В частности, это было бы верно для всех $\xi \in (t-\delta_3, t]$, что противоречит строго монотонному возрастанию функции x на этом множестве. Таким образом, $z = x(t) \in (\alpha, \beta]$.

Так как $f \in \mathrm{RD}[\alpha,\beta]$, то определена функция $A_f : (\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ и существует $\rho > 0$ такое, что для всех $u, v \in (z-\rho, z]$

$$|f(v) - f(u) - A_f(z)(v-u)| \leqslant \varepsilon|v-u|.$$

Другими словами, включение $u,v \in (x(t)-\rho, x(t)]$ влечет оценку

$$|f(v) - f(u) - A_f(x(t))(v-u)| \leqslant \varepsilon|v-u|. \tag{4.3}$$

Найдется $\delta \in (0,\delta_3]$ такое, что $x(\tau) \in (x(t)-\rho, x(t)]$, как только $\tau \in (t-\delta, t]$. Действительно, если $x(t-\delta_3) \geqslant x(t)-\rho$, то $\delta = \delta_3$. Если же $x(t-\delta_3) < x(t)-\rho$, то в силу непрерывности x существует $\delta \in (0,\delta_3)$ такое, что $x(t-\delta) = x(t)-\rho$. В обоих случаях ссылаемся на монотонный рост функции x на полуинтервале $(t-\delta, t]$.

Итак, если $\tau, s \in (t-\delta, t]$, то $x(\tau), x(s) \in (x(t)-\rho, x(t)]$, причем если $\tau < s$, то $x(\tau) < x(s)$. В силу (4.3) и (4.1) имеем оценки $|M - pN| \leqslant \varepsilon N$ и $|N - qK| \leqslant \varepsilon K$, в которых используются следующие обозначения: $M = y(s) - y(\tau) = f(x(s)) - f(x(\tau))$, $N = x(s) - x(\tau)$, $K = s - \tau$, $p = A_f(x(t))$, $q = A_x(t)$. Заметим, что $N > 0, K > 0, q > 0$. Проделав несложные преобразования, получим двустороннюю оценку

$$pqK - \varepsilon(|p-\varepsilon| + q)K \leqslant M \leqslant pqK + \varepsilon(|p+\varepsilon| + q)K,$$

$$-\varepsilon(|p-\varepsilon| + q) \leqslant \tfrac{y(s)-y(\tau)}{s-\tau} - A_f(x(t))\,A_x(t) \leqslant \varepsilon(|p+\varepsilon| + q).$$

Тем самым предел

$$A_y(t) = \lim_{\substack{(\tau,s)\in(a,t]^2_* \\ (\tau,s)\to(t,t)}} \tfrac{y(s)-y(\tau)}{s-\tau} \tag{4.4}$$

существует и $A_y(t) = A_f(x(t))\,A_x(t)$.

2. Если $A_x(t) < 0$, то, повторив во многом выкладки предыдущего пункта, получим двустороннюю оценку

$$-\varepsilon(|p+\varepsilon|-q) \leqslant \tfrac{y(s)-y(\tau)}{s-\tau} - B_f(x(t))\,A_x(t) \leqslant \varepsilon(|p-\varepsilon|-q),$$

в которой $p = B_f(x(t))$ и $q = A_x(t) < 0$. Заметим еще, что здесь справедливо неравенство $x(t) \neq \beta$, а в аналоге формулы (4.3) вместо величины $A_f(x(t))$ стоит величина $B_f(x(t))$. Таким образом, предел (4.4) существует и в данном случае, причем $A_y(t) = B_f(x(t))\,A_x(t)$.

3. Пусть, наконец, $A_x(t) = 0$. Оценка (4.1) принимает здесь вид $|x(s)-x(\tau)| \leqslant \varepsilon|s-\tau|$. Поскольку f липшицева (как элемент пространства $\mathrm{RD}[\alpha,\beta]$), то существует константа $\Lambda \geqslant 0$, что $|f(v)-f(u)| \leqslant \Lambda|v-u|$ для всех $u,v \in [\alpha,\beta]$. Таким образом,

$$|y(s)-y(\tau)| = |f(x(s))-f(x(\tau))| \leqslant \Lambda|x(s)-x(\tau)| \leqslant \varepsilon\Lambda|s-\tau|,$$

поэтому предел (4.4) существует и $A_y(t) = 0$.

Доказательство существования предела

$$B_y(t) = \lim_{\substack{(\tau,s)\in[t,b)^2_* \\ (\tau,s)\to(t,t)}} \tfrac{y(s)-y(\tau)}{s-\tau}$$

при $t \in [a,b)$ осуществляется симметричным образом.

З а м е ч а н и е 4.1. Аналог теоремы 4.1 хорошо известен в следующих двух случаях: 1) если $x \in \mathrm{D}[a,b]$, $f \in \mathrm{D}[\alpha,\beta]$, то $y \in \mathrm{D}[a,b]$; 2) если $x \in \mathrm{Lip}[a,b]$, $f \in \mathrm{Lip}[\alpha,\beta]$, то $y \in \mathrm{Lip}[a,b]$. Что касается абсолютно непрерывных функций, то для них аналогичное утверждение, вообще говоря, не верно. Точнее, справедливы следующие два утверждения: 1) если x монотонна на $[a,b]$, а $f \in \mathrm{AC}[\alpha,\beta]$, то $y \in \mathrm{AC}[a,b]$; 2) если $x \in \mathrm{AC}[a,b]$, $f \in \mathrm{Lip}[\alpha,\beta]$, то $y \in \mathrm{AC}[a,b]$.

П р и м е р 4.1. Если $f(x) = |x|$, то f регулярно дифференцируема, поэтому для любой функции $x \in \mathrm{RD}[a,b]$ справедливо включение $|x| \in \mathrm{RD}[a,b]$. Это наблюдение позволяет утверждать, что модуль всякой непрерывно дифференцируемой функции есть функция регулярно дифференцируемая. Например, функция $y(t) = |\sin t|$, $t \in [a, b]$, регулярно дифференцируема (она является кусочно гладкой). Более содержательным является следующий пример. Если $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$ такова, что $y(0) = 0$ и $y(t) = |t^3 \sin \frac{\pi}{t}|$ при $t \neq 0$, то множество точек, где регулярная производная терпит разрыв, есть счетное множество. Легко проверить, что

$$\dot{y}(t, \lambda) = \begin{cases} \quad 0 & , \quad t = 0 \\ (-1)^n (t^3 \sin \frac{\pi}{t})', & t \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}), \quad n = 1, 2, \ldots \\ \frac{\pi}{n}(2\lambda - 1) & , \quad t = \frac{1}{n}, \quad n = 2, 3, \ldots \\ \quad -\pi & , \quad t = 1 \end{cases} .$$

Если $x \in \mathrm{RD}[a, b]$, то $x \in \mathrm{CBV}[a, b]$ и тем самым определена функция полной вариации $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ такая, что $y(a) = 0$ и $y(t) = \operatorname*{Var}_{\xi \in [a, t]} x(\xi)$ при всех $t \in (a, b]$. Известно, что y – непрерывная функция. Покажем, что $y \in \mathrm{RD}[a, b]$. Действительно, если $t \in (a, b]$, то существует $A_x(t)$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \tau, s \in (t - \delta, t]^2_* \implies \left| \tfrac{x(s) - x(\tau)}{s - \tau} - A_x(t) \right| < \varepsilon.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\tau < s$. Зафиксируем произвольное разбиение $\tau = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = s$ отрезка $[\tau, s]$. При всех $k = 1, \ldots, n$ справедливы оценки

$$\left| \tfrac{x(\xi_k) - x(\xi_{k-1})}{\xi_k - \xi_{k-1}} - A_x(t) \right| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \left| \tfrac{|x(\xi_k) - x(\xi_{k-1})|}{\xi_k - \xi_{k-1}} - |A_x(t)| \right| < \varepsilon,$$

поэтому

$$-\varepsilon(\xi_k - \xi_{k-1}) < |x(\xi_k) - x(\xi_{k-1})| - |A_x(t)|(\xi_k - \xi_{k-1}) < \varepsilon(\xi_k - \xi_{k-1}),$$

$$-\varepsilon(s - \tau) < \sum_{k=1}^{n} |x(\xi_k) - x(\xi_{k-1})| - |A_x(t)|(s - \tau) < \varepsilon(s - \tau).$$

В силу произвольности разбиения $\tau = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = s$ имеем

$$-\varepsilon(s-\tau) < \operatorname*{Var}_{\xi\in[\tau,s]} x(\xi) - |A_x(t)|(s-\tau) \leqslant \varepsilon(s-\tau),$$

$$-\varepsilon(s-\tau) < y(s) - y(\tau) - |A_x(t)|(s-\tau) \leqslant \varepsilon(s-\tau),$$

$$\left|\tfrac{y(s)-y(\tau)}{s-\tau} - |A_x(t)|\right| \leqslant \varepsilon,$$

т.е. $A_y(t) = |A_x(t)|$. Аналогично $B_y(t) = |B_x(t)|$ при $t \in [a,b)$. Таким образом, $y \in \mathrm{RD}[a,b]$.

П р и м е р 4.2. Если $x(t) = |t|$, $t \in [-1,1]$, то легко проверить, что $y(t) = 1 + t$. При этом $A_x(t) = -1$ при $t \leqslant 0$ и $A_x(t) = 1$ при $t > 0$, а $A_y(t) \equiv 1$.

5. Эквивалентные нормы в пространстве $\mathrm{RD}[a,b]$

Очевидно, что пространство

$$\Big\{x : [a,b] \to \mathbb{R} \Big| \sup_{(\tau,s)\in\Delta} \big|X(\tau,s)\big| < \infty\Big\}$$

совпадает с пространством функций, удовлетворяющих на $[a,b]$ условию Липшица. Обозначим его через $\mathrm{Lip}[a,b]$. Напомним, что через Δ обозначено множество $\{(\tau,s) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant \tau < s \leqslant b\}$, а $X(\tau,s) = \frac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau}$ – это функция двух переменных $(\tau,s) \in [a,b]^2_*$ (в данном случае $(\tau,s) \in \Delta$). Легко проверить, что функционал

$$\|x\|_{\mathrm{Lip}} = |x(a)| + \sup_{(\tau,s)\in\Delta} \big|X(\tau,s)\big| \qquad \forall x \in \mathrm{Lip}[a,b]$$

является нормой в $\mathrm{Lip}[a,b]$. Приводимое ниже утверждение известно специалистам, изучающим гельдеровы пространства, тем не менее мы приводим его доказательство в полном объеме и в терминах, принятых в настоящей работе.

Т е о р е м а 5.1. *Пространство* $\mathrm{Lip}[a,b]$ *банахово относительно нормы* $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathrm{Lip}[a,b]$, фундаментальна, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для всех $n, m > N$ выполнены неравенства $|x_n(a) - x_m(a)| < \varepsilon$ и

$$\sup_{(\tau,s)\in\Delta} \left|\tfrac{x_n(s)-x_m(s)-x_n(\tau)+x_m(\tau)}{s-\tau}\right| < \varepsilon.$$

В частности, для функций $X_n(\tau,s) = \frac{x_n(s)-x_n(\tau)}{s-\tau}$, заданных на Δ , справедливо неравенство $\sup\limits_{(\tau,s)\in\Delta} \bigl|X_n(\tau,s) - X_m(\tau,s)\bigr| < \varepsilon$. Это означает, что последовательность $\{X_n(\tau,s)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно (на множестве Δ) сходится в себе и, следовательно, равномерно сходится к некоторой функции $\hat{X}(\tau,s)$, заданной на Δ . Другими словами, существует $\hat{X}(\tau,s)$ такая, что

$$\lim_n \sup_{(\tau,s)\in\Delta} \bigl|X_n(\tau,s) - \hat{X}(\tau,s)\bigr| = 0.$$

В силу последнего равенства справедливы следующие два утверждения: во-первых, $\sup\limits_{(\tau,s)\in\Delta} \bigl|\hat{X}(\tau,s)\bigr| < \infty$ и, во-вторых, имеет место поточечная сходимость $\lim\limits_n X_n(\tau,s) = \hat{X}(\tau,s)$.

Числовая последовательность $\{x_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, поэтому имеет предел. Обозначим его через $\hat{x}$ и составим функции $x(t) = \hat{x} + \hat{X}(t,a)(t-a)$ для $t \in [a,b]$ и $X(\tau,s) = \frac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau}$ для $(\tau,s) \in \Delta$. Так как для всех $t \in [a,b]$

$$x_n(t) = x_n(a) + X_n(t,a)(t-a) \underset{n}{\to} \hat{x} + \hat{X}(t,a)(t-a) = x(t),$$

то $\lim\limits_n x_n(t) = x(t)$. Таким образом, для всех $(\tau,s) \in \Delta$

$$X(\tau,s) = \tfrac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau} = \lim_n \tfrac{x_n(s)-x_n(\tau)}{s-\tau} = \lim_n X_n(\tau,s) = \hat{X}(\tau,s),$$

поэтому

$$\|x_n - x\|_{\mathrm{Lip}} = |x_n(a) - x(a)| + \sup_{(\tau,s)\in\Delta} \left|\tfrac{x_n(s)-x(s)-x_n(\tau)+x(\tau)}{s-\tau}\right| =$$

$$= |x_n(a) - x(a)| + \sup_{(\tau,s)\in\Delta} \left| X_n(\tau,s) - \hat{X}(\tau,s) \right| \underset{n}{\to} 0$$

и $\sup\limits_{(\tau,s)\in\Delta} \left| X(\tau,s) \right| = \sup\limits_{(\tau,s)\in\Delta} \left| \hat{X}(\tau,s) \right| < \infty$, т.е. построенная предельная функция x действительно является липшицевой. $\square$

Кроме нормы (3.10), которую можно записать в виде

$$\|x\|_{\mathrm{RD}} = |x(a)| + \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|_{\mathrm{G}} \quad \forall x \in \mathrm{RD}[a,b],$$

в $\mathrm{RD}[a,b]$ определены нормы

$$\|x\|_1 = \max\{|x(a)|, \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|_{\mathrm{G}}\}, \quad \|x\|_2 = \max\{\|x\|_{\mathrm{C}}, \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|_{\mathrm{G}}\},$$

$$\|x\|_3 = \max\{\|x\|_{\mathrm{BV}}, \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|_{\mathrm{G}}\}, \quad \|x\|_{\mathrm{Lip}} = |x(a)| + \sup_{(\tau,s)\in\Delta} \left| \tfrac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau} \right|,$$

и все они эквивалентны. Более того, как мы выясним ниже, для всех $x \in \mathrm{RD}[a,b]$ справедливо равенство $\|x\|_{\mathrm{RD}} = \|x\|_{\mathrm{Lip}}$. Эквивалентность норм $\|\cdot\|_{\mathrm{RD}}$ и $\|\cdot\|_1$ следует из неравенств $\|x\|_1 \leqslant \|x\|_{\mathrm{RD}} \leqslant 2\|x\|_1$. Так как $|x(a)| \leqslant \|x\|_{\mathrm{C}}$, то $\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2$. В случае, если $\|x\|_{\mathrm{C}} \leqslant \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|_{\mathrm{G}}$, имеем $\|x\|_2 = \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|_{\mathrm{G}} \leqslant \|x\|_1$. Если же $\|x\|_{\mathrm{C}} \geqslant \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|_{\mathrm{G}}$, то $\|x\|_2 = \|x\|_{\mathrm{C}}$. В этом случае для всех $t \in [a,b]$ справедливо равенство (3.11), поэтому

$$|x(t)| \leqslant |x(a)| + (b-a)\|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|_{\mathrm{G}} \leqslant (1+b-a)\|x\|_1 \quad \forall t \in [a,b],$$

следовательно, $\|x\|_2 = \|x\|_{\mathrm{C}} \leqslant (1+b-a)\|x\|_1$ и окончательно

$$\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant (1+b-a)\|x\|_1 \quad \forall x \in \mathrm{RD}[a,b].$$

Неравенство $\|x\|_1 \leqslant \|x\|_3$ очевидно. Если $\|x\|_{\mathrm{BV}} \leqslant \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|_{\mathrm{G}}$, то $\|x\|_3 = \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|_{\mathrm{G}} \leqslant \|x\|_1$. Пусть $\|x\|_{\mathrm{BV}} \geqslant \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|_{\mathrm{G}}$, тогда $\|x\|_3 = \|x\|_{\mathrm{BV}}$ и в соответствии с (3.11) для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$ такое, что

$$\operatorname*{Var}_{[a,b]} x < \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} |x(\tau_k) - x(\tau_{k-1})| = \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} \left| \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \dot{x}(s,\lambda)\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} (\tau_k - \tau_{k-1}) \sup_{t\in[\tau_{k-1},\tau_k]} |\dot{x}(t,\lambda)| \leqslant \varepsilon + (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |\dot{x}(t,\lambda)|.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\operatorname*{Var}_{[a,b]} x \leqslant (b-a)\|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|_{\mathrm{G}}$ и

$$\|x\|_{\mathrm{BV}} = |x(a)| + \operatorname*{Var}_{[a,b]} x \leqslant |x(a)| + (b-a)\|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|_{\mathrm{G}} \leqslant (1+b-a)\|x\|_1,$$

поэтому $\|x\|_1 \leqslant \|x\|_3 \leqslant (1+b-a)\|x\|_1$ для всех $x \in \mathrm{RD}[a,b]$.

Л е м м а 5.1. *Если* $x \in \mathrm{RD}[a,b]$, *то* $\|x\|_{\mathrm{RD}} = \|x\|_{\mathrm{Lip}}$. *Другими словами,*

$$\sup_{t\in[a,b]} |\dot{x}(t,\lambda)| = \sup_{(\tau,s)\in\Delta} \left|\tfrac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau}\right| \text{ и } \|x\|_{\mathrm{RD}} = |x(a)| + \sup_{(\tau,s)\in\Delta} \left|\tfrac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau}\right|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $a \leqslant \tau < s \leqslant b$, то в соответствии с (3.11)

$$|x(s)-x(\tau)| = \left|\int_{\tau}^{s} \dot{x}(t,\lambda)\,dt\right| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |\dot{x}(t,\lambda)| \cdot (s-\tau),$$

поэтому

$$l(x) \doteq \sup_{(\tau,s)\in\Delta} \left|\tfrac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau}\right| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |\dot{x}(t,\lambda)|.$$

Докажем противоположное неравенство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для любого $t \in (a,b]$ найдутся $\tau, s \in (a,t]$ такие, что $\tau \neq s$ и $\left|\tfrac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau} - A_x(t)\right| < \varepsilon$, поэтому $|A_x(t)| < \varepsilon + l(x)$. Аналогично $|B_x(t)| < \varepsilon + l(x)$ для любого $t \in [a,b)$. Таким образом, для всех $(t,\lambda) \in [a,b] \times [0,1]$ справедливо

$$|\dot{x}(t,\lambda)| = |(1-\lambda)\hat{A}_x(t) + \lambda\hat{B}_x(t)| < \varepsilon + l(x),$$

а в силу произвольности $\varepsilon > 0$ для всех $t \in [a,b]$ имеет место оценка $|\dot{x}(t,\lambda)| \leqslant l(x)$, что и требовалось.

З а м е ч а н и е 5.1. Аналогичным образом можно показать, что для произвольной функции $x \in \mathrm{BD}[a,b]$ справедливо

$$\|x\|_{\mathrm{BD}} \doteq |x(a)| + \sup_{t\in[a,b]} |x'(t)| = |x(a)| + \sup_{(\tau,s)\in\Delta} \left|\tfrac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau}\right| = \|x\|_{\mathrm{Lip}}.$$

В частности, для произвольной $x \in \mathrm{C}^{(1)}[a,b]$ справедливо

$$\|x\|_{\mathrm{C}^{(1)}} \doteq |x(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| = |x(a)| + \sup_{(\tau,s)\in\Delta} \left|\tfrac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau}\right| = \|x\|_{\mathrm{Lip}}.$$

Эта норма эквивалентна общеупотребительной норме

$$\|x\| = \max\big(\max_{t\in[a,b]} |x(t)|,\ \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| \big).$$

Таким образом, полные пространства (каждое по своей норме) $\mathrm{C}^{(1)}[a,b]$, $\mathrm{BD}[a,b]$, $\mathrm{RD}[a,b]$ замкнуты в пространстве $\mathrm{Lip}[a,b]$ по норме $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$, которая на самом деле является для них общей.

6. Аппроксимация регулярно дифференцируемых функций ломаными

Функция $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *ломаной функцией (или кусочно линейной функцией)*, если существует конечное разбиение $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$ и числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ такие, что для всех $k = 1, \ldots, n$ и для всех $\tau, s \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$ справедливо равенство $x(s) - x(\tau) = c_k(s-\tau)$. Множество всех ломаных, определенных на отрезке $[a,b]$, является линейным пространством. Очевидно также, что всякая ломаная является регулярно дифференцируемой функцией (поэтому она липшицева, непрерывна и имеет ограниченное изменение). В частности, для всякой ломаной функции справедливо равенство

$$\|x\|_{\mathrm{RD}} = |x(a)| + \max\{|c_1|, |c_2|, \ldots, |c_n|\}.$$

Т е о р е м а 6.1. *Функция $x \in \mathrm{RD}[a,b]$ тогда и только тогда, когда существует последовательность ломаных функций $\{x_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\|x_n - x\|_{\mathrm{Lip}} \underset{n}{\to} 0$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{RD}[a,b]$, и зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $x \in \mathrm{RD}[a,b]$, то для произвольной точки $t \in (a,b)$ существует $\delta_t > 0$ такое, что $t - \delta_t \geqslant a$, $t + \delta_t \leqslant b$,

$$\sup |X(\tau,s) - X(\tau',s')| \leqslant \varepsilon \quad \text{по всем} \quad (\tau,s),(\tau',s') \in (t-\delta_t, t]_*^2,$$

$$\sup|X(\tau,s)-X(\tau',s')|\leqslant\varepsilon \quad \text{по всем} \quad (\tau,s),(\tau',s')\in[t,t+\delta_t)^2_*.$$

Другими словами, колебание функции $X(\tau,s)$ на каждом из множеств $(t-\delta_t,t]^2_*$ и $[t,t+\delta_t)^2_*$ не превосходит ε. Аналогично существуют $\delta_a>0$ и $\delta_b>0$ такие, что колебание функции $X(\tau,s)$ на множествах $[a,a+\delta_a)^2_*$ и $(b-\delta_b,b]^2_*$ также не превосходит ε. Семейство квадратов

$$[a,a+\delta_a)^2,\ \Big\{(t-\delta_t,t]^2,\ [t,t+\delta_t)^2\Big\}_{t\in(a,b)},\ (b-\delta_b,b]^2$$

образует бесконечную систему множеств, покрывающую главную диагональ квадрата $[a,b]^2$, являющуюся компактным множеством в $\mathbb{R}^2$. Следовательно, из этого семейства можно выделить конечное подпокрытие

$$[a,a+\delta_a)^2,\ (s_1-\delta_{s_1},s_1]^2,\ [s_1,s_1+\delta_{s_1})^2,\ (s_2-\delta_{s_2},s_2]^2,\ [s_2,s_2+\delta_{s_2})^2,$$

$$\ldots,\ (s_m-\delta_{s_m},s_m]^2,\ [s_m,s_m+\delta_{s_m})^2,\ (b-\delta_b,b]^2,$$

порождающее конечное разбиение $a=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_n=b$ такое, что

$$\tau_0=a,\ \tau_1\in(s_1-\delta_{s_1},a+\delta_a),\ \tau_2=s_1,\ \tau_3\in(s_2-\delta_{s_2},s_1+\delta_{s_1}),\ \ldots$$

$$\ldots\ ,\tau_{2k-1}\in(s_k-\delta_{s_k},s_{k-1}+\delta_{s_{k-1}}),\ \tau_{2k}=s_k,\ \ldots$$

$$\ldots\ ,\tau_{2m}=s_m,\ \tau_{2m+1}\in(b-\delta_b,s_m+\delta_{s_m}),\ \tau_{2m+2}=b.$$

(Здесь $n=2m+2$, а точки вида τ_{2k-1} произвольны.) Семейство квадратов $\{[\tau_{k-1},\tau_k]^2\}_{k=1}^n$ покрывает главную диагональ квадрата $[a,b]^2$, и на каждом множестве $[\tau_{k-1},\tau_k]^2_*$ колебание функции $X(\tau,s)$ не превосходит ε, поэтому справедлива оценка $|X(\tau,s)-X(\tau',s')|\leqslant\varepsilon$, как только $(\tau,s),(\tau',s')\in[\tau_{k-1},\tau_k]^2_*$.

Произвольные точки $(\xi_k,\eta_k)\in[\tau_{k-1},\tau_k]^2_*$ (по одной точке из каждого множества $[\tau_{k-1},\tau_k]^2_*$) порождают ломаную функцию $y:[a,b]\to\mathbb{R}$, что $y(a)=x(a)$ и $y(s)-y(\tau)=X(\xi_k,\eta_k)(s-\tau)$ для всех $k=1,\ldots,n$ и для всех $\tau,s\in[\tau_{k-1},\tau_k]$. Поскольку

$x(s)-x(\tau)=X(\tau,s)(s-\tau)$ для всех $(\tau,s)\in[a,b]^2_*$, то для разности $z=y-x$ при всех $(\tau,s)\in[\tau_{k-1},\tau_k]^2_*$ справедливо $z(a)=0$,

$$z(s)-z(\tau)=(X(\xi_k,\eta_k)-X(\tau,s))(s-\tau) \text{ и } |z(s)-z(\tau)|\leqslant\varepsilon|s-\tau|. \tag{6.1}$$

Поскольку $x,y\in \mathrm{RD}[a,b]$, то $z\in\mathrm{RD}[a,b]$ и определены функции $A_z:(a,b]\to\mathbb{R}$ и $B_z:[a,b)\to\mathbb{R}$. Для любого $t\in(a,b]$ существует $\delta>0$ такое, что

$$\left|\tfrac{z(s)-z(\tau)}{s-\tau}-A_z(t)\right|<\varepsilon\quad\forall(\tau,s)\in(t-\delta,t]^2_*. \tag{6.2}$$

Для любого $t\in(a,b]$ существует k такое, что $t\in(\tau_{k-1},\tau_k]$, следовательно, для любых $(\tau,s)\in(t-\delta,t]^2_*\cap(\tau_{k-1},\tau_k]^2_*$ справедливы оценки (6.1) и (6.2). Таким образом, для любого $t\in(a,b]$

$$|A_z(t)|<\varepsilon+\left|\tfrac{z(s)-z(\tau)}{s-\tau}\right|\leqslant 2\varepsilon.$$

Аналогично можно показать, что $|B_z(t)|<2\varepsilon$ для всех $t\in[a,b)$, поэтому $|\dot z(t,\lambda)|<2\varepsilon$ для всех $(t,\lambda)\in[a,b]\times[0,1]$ и $\|z\|_{\mathrm{RD}}<2\varepsilon$.

Обратное утверждение теоремы следует из полноты пространства $\mathrm{RD}[a,b]$ по норме $\|\cdot\|_{\mathrm{RD}}$.

Следствие 6.1. *Пространство* $\mathrm{RD}[a,b]$ *является замыканием по норме* $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ *пространства ломаных, определенных на отрезке* $[a,b]$.

Следствие 6.2. *Пространство* $\mathrm{RD}[a,b]$ *является замыканием пространства* $\mathrm{KC}^{(1)}[a,b]$ *по норме* $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$.

Следствие 6.3. *Если* $x\in\mathrm{RD}[a,b]$, *то существует последовательность ломаных* $\{x_n:[a,b]\to\mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что* $\|x_n-x\|_{\mathrm{BV}}\underset{n}{\to}0$ *и* $\|x_n-x\|_{\mathrm{C}}\underset{n}{\to}0$ *(т.е. последовательность* $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к функции* $x(t)$ *равномерно на* $[a,b]$*).*

Утверждение следует из очевидных неравенств $\|x\|_{\mathrm{BV}}\leqslant\|x\|_3$ и $\|x\|_{\mathrm{C}}\leqslant\|x\|_2$. Следует также отметить, что вторая часть следствия согласуется с известным утверждением об аппроксимации любой непрерывной функции ломаными функциями в топологии равномерной сходимости.

7. Пространство сплайнов

Функция $x \in \mathrm{C}^{(m)}[a,b]$ называется *сплайном порядка* m, если существует конечное разбиение $a=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_n=b$ и числа $c_1,c_2,\ldots,c_n$ такие, что для всех $k=1,\ldots,n$ и для всех $\tau,s\in[\tau_{k-1},\tau_k]$ справедливо $x^{(m)}(s)-x^{(m)}(\tau)=c_k(s-\tau)$. Множество всех сплайнов порядка m, определенных на $[a,b]$, является линейным пространством. Легко показать, что производная от сплайна порядка m (при $m>0$) есть сплайн порядка $m-1$, а сплайнами нулевого порядка являются ломаные функции.

Через $\mathrm{RD}^{(m)}[a,b]$ обозначим подпространство в $\mathrm{C}^{(m)}[a,b]$, состоящее из тех функций x, что $x^{(m)}\in\mathrm{RD}[a,b]$. В этом пространстве определена норма $\|x\|_{(m)}=\max\bigl\{\|x\|_{\mathrm{C}^{(m)}},\|x^{(m)}\|_{\mathrm{Lip}}\bigr\}$, относительно которой пространство $\mathrm{RD}^{(m)}[a,b]$ является полным. Пространство $\mathrm{RD}^{(m)}[a,b]$ является замыканием по норме $\|\cdot\|_{(m)}$ пространства сплайнов порядка m, определенных на $[a,b]$. Доказательство этих утверждений оставляем читателю.

Список литературы

1. Родионов В.И. Квазиинтегральные уравнения в пространстве прерывистых функций // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1997. Вып. 2(10). С. 3-51.
2. Родионов В.И. Абстрактные дифференциальные уравнения в пространстве прерывистых функций // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2002. Вып. 2(25). С. 87-90.
3. Hönig Ch.S. Volterra-Stieltjes integral equations. Mathematics Studies 16. Amsterdam: North-Holland, 1975. 152 p.
4. Tvrdý M. Regulated functions and the Perron-Stieltjes integral // Časopis pešt. mat. 1989. Vol. 114. P. 187-209.