УДК 517.958+517.984.5

© **Л.И. Данилов**
danilov@otf.pti.udm.ru

ОБ ОТСУТСТВИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В СПЕКТРЕ ДВУМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ДИРАКА И ШРЕДИНГЕРА

Ключевые слова: операторы Шредингера и Дирака, спектр, периодические электрический и магнитный потенциалы.

Abstract. We prove the absence of eigenvalues in the spectrum of two-dimensional periodic Dirac operator with martix coefficients of the class L^∞ and strongly subordinate matrix potential. We also obtain conditions for the absence of eigenvalues in the spectrum of two-dimensional periodic Schrödinger operator with variable metric.

Введение

Пусть $\mathcal{M}_2$ – пространство комплексных (2×2)-матриц, $\widehat{I}\in\mathcal{M}_2$ – единичная матрица,

$$\widehat{\sigma}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \widehat{\sigma}_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \widehat{\sigma}_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

– матрицы Паули. Предположим, что функции $h_{jl}\in L^\infty(\mathbf{R}^2;\mathbf{R})$, $j,l=1,2$, являются периодическими с решеткой периодов $\Lambda\subset\subset\mathbf{R}^2$ и $0<\varepsilon\leqslant h_{11}(x)h_{22}(x)-h_{12}(x)h_{21}(x)$ при почти всех (п.в.) $x\in\mathbf{R}^2$. Рассмотрим операторы Дирака

$$\widehat{\mathcal{D}}_0=\sum_{j=1}^{2}\widehat{\sigma}_j\bigl(-i\,\tfrac{\partial}{\partial x_j}\bigr),\ \widehat{\mathcal{D}}=\sum_{j=1}^{2}(h_{j1}\widehat{\sigma}_1+h_{j2}\widehat{\sigma}_2)\bigl(-i\,\tfrac{\partial}{\partial x_j}\bigr),$$

действующие в $L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)$ и имеющие область определения $D(\widehat{\mathcal{D}}_0) = D(\widehat{\mathcal{D}}) = H^1(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)$. Справедливы оценки

$$c_1\,\|\widehat{\mathcal{D}}_0\varphi\|^2 \leqslant \|\widehat{\mathcal{D}}\varphi\|^2 \leqslant c_2\,\|\widehat{\mathcal{D}}_0\varphi\|^2, \quad \varphi\in H^1(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)\,, \tag{0.1}$$

где константы $c_1>0$ и $c_2\geqslant c_1$ зависят от функций h_{jl} . Обозначим через $\mathbb{L}_\Lambda(\mathbf{R}^2)$ множество периодических с решеткой периодов $\Lambda\subset\mathbf{R}^2$ функций $W\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2;\mathbf{C})$ таких, что для любой функции $\varphi\in H^1(\mathbf{R}^2)$ функция $W\varphi$ принадлежит пространству $L^2(\mathbf{R}^2)$ и для любого $\varepsilon>0$ существует константа $C_{\varepsilon,W}\geqslant 0$ такая, что для всех функций $\varphi\in H^1(\mathbf{R}^2)$

$$\|W\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \leqslant \varepsilon\,\|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)} + C_{\varepsilon,W}\,\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}\,.$$

Если $V_l\in\mathbb{L}_\Lambda(\mathbf{R}^2)$, $l=0,\,1,\,2,\,3$, то

$$\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{V} = \widehat{\mathcal{D}} + V_0\widehat{I} + \sum_{l=1}^{3} V_l\widehat{\sigma}_l \tag{0.2}$$

– замкнутый оператор с областью определения $D(\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{V}) = H^1(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)\subset L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)$ ($\widehat{V}$ – матричный потенциал).

Следующая теорема является основным результатом данной работы, касающимся периодического оператора Дирака.

Т е о р е м а 0.1. *Пусть* $h_{jl}\in L^\infty(\mathbf{R}^2;\mathbf{R})$, $j,l=1,2$, – *периодические с решеткой периодов* $\Lambda\subset\mathbf{R}^2$ *функции и существует число* $\varepsilon>0$ *такое, что* $\varepsilon\leqslant h_{11}(x)h_{22}(x)-h_{12}(x)h_{21}(x)$ *при п.в.* $x\in\mathbf{R}^2$. *Предположим, что* $V_l\in\mathbb{L}_\Lambda(\mathbf{R}^2)$, $l=0,\,1,\,2,\,3$. *Тогда оператор* (0.2) *не имеет собственных значений.*

Если в условиях теоремы 0.1 оператор (0.2) самосопряжен, то его спектр абсолютно непрерывен. Для самосопряженных периодических эллиптических дифференциальных операторов абсолютная непрерывность спектра следует из отсутствия собственных значений [1]. Это утверждение носит общий характер и справедливо также для оператора Дирака $\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{V}$ (в последней ситуации доказательство приведено также в [2]).

Пусть $\mathbb{G}$ – множество непрерывно дифференцируемых невозрастающих функций $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ таких, что

$$\int_0^1 \frac{dr}{r\, g(r)} < +\infty$$

и $(g(r/2) - g(r))(g(r))^{-1} \to 0$ при $r \to +0$. Обозначим через $L^2\{g, \Lambda\}$, $g \in \mathbb{G}$, банахово пространство периодических с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$ функций $W \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2; \mathbf{C})$, для которых

$$\|W\|^2_{L^2\{g,\Lambda\}} = \sup_{x \in \mathbf{R}^2} \int\limits_{y:\, |x-y| \le 1} g(|x-y|)\, |W(y)|^2 d^2 y < +\infty\,.$$

Если $g \in \mathbb{G}$, то $g(r) \ln \frac{1}{r} \to +\infty$ при $r \to +0$, поэтому для любой функции $W \in L^2\{g, \Lambda\}$ функция W^2 принадлежит классу Като K_2 (см. [3]) и, следовательно, $W \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbf{R}^2)$.

Оператор (0.2) в случае $h_{jl} \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$, $j, l = 1, 2$, $V_l \in C^\infty(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$ при $l = 1, 2$ и V_l, $\partial V_l / \partial x_j \in L^\infty(\mathbf{R}^2)$ при $l = 0, 3$ и $j = 1, 2$ рассматривался в [4]. В [5; 6] доказана абсолютная непрерывность спектра оператора $\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{V}$ для постоянных функций h_{jl} и периодических (с общей решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$) эрмитовых матричных функций $\widehat{V}(x) = \widehat{V}^*(x)$, $x \in \mathbf{R}^2$, для которых $\widehat{V} \in L^\beta_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2; \mathcal{M}_2)$, $\beta > 2$ (в частном случае, когда $V_0 \in L^\beta_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$, $\beta > 2$, $V_3 \equiv m \in \mathbf{R}$ и $V_l \equiv 0$, $l = 1, 2$, этот результат получен в [7]). Более общие условия на периодические вещественнозначные функции V_l, $l = 0, 1, 2, 3$ (при постоянных функциях h_{jl}), приведены в [8]: достаточно, чтобы функции $V_0^2 \ln(1 + |V_0|)$, $V_3^2 \ln(1 + |V_3|)$ и $V_1^2 \ln^q(1 + |V_1|)$, $V_2^2 \ln^q(1 + |V_2|)$ для некоторого $q > 1$ принадлежали пространству $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$ (тогда $V_l \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbf{R}^2)$, $l = 0, 1, 2, 3$). В [9] доказано отсутствие собственных значений в спектре оператора (0.2), если $\widehat{V} \in L^\beta_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2; \mathcal{M}_2)$, $\beta > 2$ (и функции h_{jl} удовлетворяют условиям теоремы 0.1). Последний результат был усилен в [10] (и приведен также в [11]): в [10] предполагается, что для периодического с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$ матричного потенциала $\widehat{V}$ выполняются условия

$V_0, V_3 \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbf{R}^2)$ и $V_1, V_2 \in L^2\{g,\Lambda\} \subset \mathbb{L}_\Lambda(\mathbf{R}^2)$ для некоторой функции $g \in \mathbb{G}$.

Так как оператор $\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{V} - \lambda\widehat{I}$ (где $\widehat{I}$ – единичный оператор в $L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)$), $\lambda \in \mathbf{C}$, сводится к оператору $\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{V}$ при замене $V_0 - \lambda \to V_0$, то при доказательстве теоремы 0.1 достаточно доказать отсутствие собственного значения $\lambda = 0$. Будем также предполагать, что $\Lambda = \mathbf{Z}^2$ (не изменяя вида оператора $\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{V}$, можно сделать соответствующую линейную замену переменных). Обозначим $\mathbb{L}(\mathbf{R}^2) \doteq \mathbb{L}_{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{R}^2)$, $K = [0,1)^2$. Пусть $0 < q \leqslant p < +\infty$ и $F \geqslant 0$, $\Gamma(p,q,F)$ – множество упорядоченных наборов $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}$ периодических с целочисленной решеткой периодов $\mathbf{Z}^2$ функций из $L^\infty(\mathbf{R}^2;\mathbf{R})$ таких, что $q \leqslant \mathcal{G}(x) \leqslant p$, $q \leqslant \mathcal{H}(x) \leqslant p$ и $|\mathcal{F}(x)| \leqslant F$ при п.в. $x \in \mathbf{R}^2$; $\Gamma = \bigcup_{p,q,F} \Gamma(p,q,F)$. Умножая оператор Дирака (0.2) слева на (унитарную) матричную функцию

$$(h_{21}^2(x) + h_{22}^2(x))^{-1/2}\,(h_{22}(x)\widehat{I} - ih_{21}(x)\widehat{\sigma}_3)\,, \quad x \in \mathbf{R}^2,$$

получим оператор

$$\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{V} = (\mathcal{G}\widehat{\sigma}_1 + \mathcal{F}\widehat{\sigma}_2)\big(-i\,\tfrac{\partial}{\partial x_1}\big) + \mathcal{H}\widehat{\sigma}_2\big(-i\,\tfrac{\partial}{\partial x_2}\big) + \widehat{V}\,, \tag{0.3}$$

для которого $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma$ и (периодический с решеткой периодов $\mathbf{Z}^2$) матричный потенциал $\widehat{V}$ удовлетворяет условиям теоремы 0.1. Поэтому теорема 0.1 является непосредственным следствием теоремы 0.2.

Т е о р е м а 0.2. *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma$,

$$\widehat{V}(.) = V_0(.)\widehat{I} + \sum_{l=1}^{3} V_l(.)\widehat{\sigma}_l\,,$$

где $V_l \in \mathbb{L}(\mathbf{R}^2)$, $l = 0, 1, 2, 3$. *Тогда оператор Дирака* (0.3), *действующий в* $L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)$ *и имеющий областью определения* $D(\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{V})$ *класс Соболева* $H^1(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)$, *обратим (т.е. у него нет собственного значения* $\lambda = 0$ *).*

Будем далее коэффициенты Фурье функций $\varphi \in L^1(K;\mathbf{C}^d)$, $d=1,\,2$, обозначать через

$$\varphi_N = \int\limits_K \varphi(x)\, e^{-2\pi i\,(N,x)} d^2x\,, \quad N \in \mathbf{Z}^2.$$

Пусть $\widetilde{C}(K)$, $\widetilde{C}^1(K)$ и $\widetilde{H}^1(K)$ – пространства функций $f:K\to\mathbf{C}$, периодические продолжения которых (с решеткой периодов $\mathbf{Z}^2$) принадлежат $C(\mathbf{R}^2)$, $C^1(\mathbf{R}^2)$ и классу Соболева $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$ соответственно; $\widetilde{C}_0(K)$, $\widetilde{C}^1_0(K)$ и $\widetilde{H}^1_0(K)$ – соответствующие подпространства функций φ, для которых $\varphi_0=0$; $\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)=(\widetilde{H}^1(K))^2$. Функции, определенные на (элементарной) ячейке K, в дальнейшем будут также отождествляться с их периодическими продолжениями на все пространство $\mathbf{R}^2$. В пространствах $\mathbf{C}^d$, $L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^d)$ и $L^2(K;\mathbf{C}^d)$, $d=1,\,2$, нормы и скалярные произведения вводятся обычным образом (как правило, без указания в обозначениях самих пространств), при этом предполагается линейность скалярного произведения по второму сомножителю; $\nabla = (\partial/\partial x_1\,, \partial/\partial x_2)$, mes – мера Лебега в $\mathbf{R}^2$.

Пусть $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma(p,q,F)$. Для всех $k=(k_1,k_2)\in\mathbf{R}^2$ и $\varkappa=(\varkappa_1,\varkappa_2)\in\mathbf{R}^2$ опеределим операторы

$$\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa) = (\mathcal{G}\widehat{\sigma}_1+\mathcal{F}\widehat{\sigma}_2)(k_1+i\varkappa_1-i\,\tfrac{\partial}{\partial x_1}) + \mathcal{H}\widehat{\sigma}_2(k_2+i\varkappa_2-i\,\tfrac{\partial}{\partial x_2})\,,$$

действующие в $L^2(K;\mathbf{C}^2)$, $D(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa)) = \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$. Положим

$$\widehat{d}_\pm(k+i\varkappa) = (\mathcal{G}\pm i\mathcal{F})(k_1+i\varkappa_1-i\,\tfrac{\partial}{\partial x_1}) \pm i\mathcal{H}(k_2+i\varkappa_2-i\,\tfrac{\partial}{\partial x_2})\,,$$

$$D(\widehat{d}_\pm(k+i\varkappa)) = \widetilde{H}^1(K)\subset L^2(K), \quad \widehat{d}_\pm \doteq \widehat{d}_\pm(0);$$

$$\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa) = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{d}_-(k+i\varkappa) \\ \widehat{d}_+(k+i\varkappa) & 0 \end{pmatrix}. \tag{0.4}$$

Существуют числа $c_1=c_1(p,q,F)>0$ и $c_2=c_2(p,q,F)\geqslant c_1$ такие, что для всех векторов $k\in\mathbf{R}^2$ и всех $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$

$$c_1\sum_{j=1}^{2}\|\big(k_j-i\,\tfrac{\partial}{\partial x_j}\big)\varphi\|^2 \leqslant \|\widehat{d}_\pm(k)\varphi\|^2 \leqslant c_2\sum_{j=1}^{2}\|\big(k_j-i\,\tfrac{\partial}{\partial x_j}\big)\varphi\|^2 \tag{0.5}$$

(можно положить $c_1 = q^6 p^{-2}(2q^2+F^2)^{-1}$, $c_2 = 2(p^2+F^2)$ [10, лемма 3.1]). Из (0.4) и (0.5) получаем, что для всех векторов $k \in \mathbf{R}^2$ и всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$

$$c_1 \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k)\varphi\|^2 \leqslant \|\widehat{\mathcal{D}}(k)\varphi\|^2 \leqslant c_2 \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k)\varphi\|^2, \tag{0.6}$$

при этом

$$\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k)\varphi\|^2 = \sum_{j=1}^{2} \|\big(k_j - i\,\tfrac{\partial}{\partial x_j}\big)\varphi\|^2.$$

Если $k_1 = \pi$, то $\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k)\varphi\| \geqslant \pi\,\|\varphi\|$, $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$. Из (0.6) следует, что операторы $\widehat{\mathcal{D}}(k)$, $k \in \mathbf{R}^2$, замкнуты. Если $k \notin 2\pi\mathbf{Z}^2$, то область значений $R(\widehat{\mathcal{D}}(k))$ операторов $\widehat{\mathcal{D}}(k)$ совпадает со всем пространством $L^2(K;\mathbf{C}^2)$, $\ker\widehat{\mathcal{D}}(k) = \{0\}$ и обратные операторы $\widehat{\mathcal{D}}^{-1}(k)$ компактны. Если $k \in 2\pi\mathbf{Z}^2$, то $R(\widehat{\mathcal{D}}(k))$ – (замкнутое) подпространство в $L^2(K;\mathbf{C}^2)$ и $\dim\operatorname{coker}\widehat{\mathcal{D}}(k) = \dim\ker\widehat{\mathcal{D}}(k) = 2$ (см., например, [10]).

Оператор Дирака $\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{V}$ (0.3) унитарно эквивалентен прямому интегралу

$$\int_{2\pi K}^{\oplus} (\widehat{\mathcal{D}}(k) + \widehat{V})\,\tfrac{d^2k}{(2\pi)^2}\,, \tag{0.7}$$

действующему в

$$\int_{2\pi K}^{\oplus} L^2(K;\mathbf{C}^2)\,\tfrac{d^2k}{(2\pi)^2}$$

(вектор $k = (k_1,k_2) \in 2\pi K \subset \mathbf{R}^2$ называется квазиимпульсом). Унитарная эквивалентность устанавливается с помощью преобразования Гельфанда (для периодического оператора Дирака см. [6; 12]). В (0.7) матричный потенциал $\widehat{V}$ является оператором в $L^2(K;\mathbf{C}^2)$, имеющим (так как $V_l \in \mathbb{L}(\mathbf{R}^2)$, $l = 0, 1, 2, 3$) нулевую грань относительно операторов $\widehat{\mathcal{D}}(k)$, $k \in 2\pi K$;

$$D(\widehat{\mathcal{D}}(k) + \widehat{V}) = D(\widehat{\mathcal{D}}(k)) = \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2).$$

Операторы $\widehat{\mathcal{D}}$ и $\widehat{\mathcal{D}}_0$ также унитарно эквивалентны прямым интегралам

$$\int_{2\pi K}^{\oplus} \widehat{\mathcal{D}}(k)\,\frac{d^2k}{(2\pi)^2} \quad \text{и} \quad \int_{2\pi K}^{\oplus} \widehat{\mathcal{D}}_0(k)\,\frac{d^2k}{(2\pi)^2}$$

соответственно, поэтому из (0.6) следуют неравенства (0.1) (после линейной замены переменных и, вообще говоря, с другими константами $c_1 > 0$ и $c_2 \geqslant c_1$). Так как матричный потенциал $\widehat{V}$, рассматриваемый как оператор в $L^2(K;\mathbf{C}^2)$, имеет нулевую грань относительно операторов $\widehat{\mathcal{D}}(k)$, $k \in \mathbf{R}^2$, и, следовательно, для всех $k \in \mathbf{R}^2 \backslash 2\pi\mathbf{Z}^2$ операторы $\widehat{V}\widehat{\mathcal{D}}^{-1}(k)$ компактны, то из представления оператора Дирака $\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{V}$ (0.3) в виде прямого интеграла (0.7) и аналитической теоремы Фредгольма вытекает, что если $\lambda = 0$ – собственное значение оператора (0.3), то $\lambda = 0$ – собственное значение операторов $\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa)+\widehat{V}$ (с областью определения $D(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa)+\widehat{V}) = \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2) \subset L^2(K;\mathbf{C}^2)$) для всех $k+i\varkappa \in \mathbf{C}^2$ (более подробно см. [1] и [13, § XIII.16]). Следовательно, для доказательства теоремы 0.2 достаточно найти комплексный вектор $k+i\varkappa \in \mathbf{C}^2$, для которого $\ker(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa)+\widehat{V}) = \{0\}$. Поэтому теорема 0.2 является следствием теоремы 0.3.

Т е о р е м а 0.3. *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma(p,q,F)$ *и*

$$\widehat{V}(.) = V_0(.)\widehat{I} + \sum_{l=1}^{3} V_l(.)\widehat{\sigma}_l\,,$$

где $V_l(.) \in \mathbb{L}(\mathbf{R}^2)$, $l = 0, 1, 2, 3$. *Тогда найдутся векторы* $k', \varkappa' \in \mathbf{R}^2$, *единичный вектор* $e \in \mathbf{R}^2 : |e| = 1$ *(для которого* $e_1 > 0$ *) и сколь угодно большие числа* $\widetilde{\mu} > 0$ *такие, что для всех векторов* $k \in \mathbf{R}^2 : k_1 = \pi$ *и всех вектор-функций* $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ *справедливо неравенство*

$$\|(\widehat{\mathcal{D}}(k+k'+i(\widetilde{\mu}e+\varkappa'))+\widehat{V})\varphi\| \geqslant e^{-c\tilde{\mu}}\,\|\varphi\|\,,$$

где $c = c(p,q,F) > 0$.

Доказательство теоремы 0.3 приведено в § 2.

1. Обозначения и вспомогательные утверждения

Обозначим через $\widetilde{H}_0^1\{g,\mathbf{Z}^2\}$, $g\in\mathbb{G}$, банахово пространство функций $\Phi\in\widetilde{H}_0^1(K)$, для которых

$$\|\Phi\|_{\tilde{H}_0^1\{g,\mathbf{Z}^2\}} \doteq \|\,|\nabla\Phi(.)|\,\|_{L^2\{g,\mathbf{Z}^2\}} < +\infty\,.$$

Так как $r^{\varepsilon}g(r)\to 0$ при $r\to +0$ для любого $\varepsilon>0$, то $\widetilde{C}_0^1(K)\subset\widetilde{H}_0^1\{g,\mathbf{Z}^2\}$ (вложение непрерывно). С другой стороны, $\widetilde{H}_0^1\{g,\mathbf{Z}^2\}\subset\widetilde{C}_0(K)$ и для всех $\Phi\in\widetilde{H}_0^1\{g,\mathbf{Z}^2\}$ выполняется оценка [10]

$$\|\Phi\|_{L^\infty(K)}\leqslant c_3\,\|\Phi\|_{\tilde{H}_0^1\{g,\mathbf{Z}^2\}}\,,$$

где $c_3=c_3(g)>0$.

Т е о р е м а 1.1 ([10]). *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}\in\Gamma(p,q,F)$ *и* $g\in\mathbb{G}$. *Тогда для любых функций* $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2\in L^2\{g,\mathbf{Z}^2\}$ *можно (однозначно) найти такие векторы* $k,\kappa\in\mathbf{R}^2$ *и функции* $\Phi,\,\Psi\in\widetilde{H}_0^1\{g,\mathbf{Z}^2\}\subset\widetilde{H}_0^1(K)\cap\widetilde{C}(K)$, *что умножение на функции* $e^{i\mu\Phi}$ *и* $e^{\mu\Psi}$ *для всех* $\mu\in\mathbf{C}$ *не выводит за пределы пространства* $\widetilde{H}^1(K)$ *(тогда операторы умножения на функции* $e^{i\mu\Phi}$ *и матричные функции* $e^{\mu\hat{\sigma}_3\Psi}$ *не выводят за пределы пространства* $\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ *),*

$$e^{\mu\hat{\sigma}_3\Psi}e^{-i\mu\Phi}\,\widehat{\mathcal{D}}(\mu(k+i\kappa))\,e^{i\mu\Phi}e^{\mu\hat{\sigma}_3\Psi}=\widehat{\mathcal{D}}(0)+\mu(\mathcal{C}_1\widehat{\sigma}_1+\mathcal{C}_2\widehat{\sigma}_2)$$

и при этом

$$\max\{\|\Phi\|_{L^\infty(K)},\|\Psi\|_{L^\infty(K)}\}\leqslant c_1'\,(\|\mathcal{C}_1\|_{L^2\{g,\mathbf{Z}^2\}}+\|\mathcal{C}_2\|_{L^2\{g,\mathbf{Z}^2\}})\,,$$

$$|k|^2+|\kappa|^2\leqslant c_2'\,(\|\mathcal{C}_1\|^2_{L^2(K)}+\|\mathcal{C}_2\|^2_{L^2(K)})\,,$$

где $c_1'=c_1'(p,q,F;g)>0$, $c_2'=c_2'(p,q,F)>0$. *Если* $\mathcal{C}_1\pm i\,\mathcal{C}_2\in\in R(\widehat{d}_\pm)$, *то* $k=\kappa=0$. *Если* $\mathcal{C}_1$ *и* $\mathcal{C}_2$ *– вещественнозначные функции, то* $\kappa=0$ *и функции* Φ *и* Ψ *также являются вещественнозначными.*

Т е о р е м а 1.2. *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma(p,q,F)$. *Тогда существуют (единственные) вектор* $\widetilde{\varkappa} \in \mathbf{R}^2$ *и вещественнозначные функции* $\Phi, \Psi \in \widetilde{H}^1_0(K)\cap \widetilde{C}(K)$ *(*$\Phi, \Psi \in \widetilde{H}^1_0\{g,\mathbf{Z}^2\}$ *для любой функции* $g\in\mathbb{G}$ *) такие, что*

1) для всех $\mu \in \mathbf{R}$ *умножение на функции* $e^{\mu\Phi}$ *и матричные функции* $e^{i\mu\hat\sigma_3\Psi}$ *не выводит за пределы пространства* $\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ *;*

2) для всех $k, \varkappa \in \mathbf{R}^2$ *и* $\mu\in\mathbf{R}$ *имеем*

$$e^{i\mu\hat\sigma_3\Psi}e^{\mu\Phi}\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa+i\mu\widetilde{\varkappa})e^{-\mu\Phi}e^{i\mu\hat\sigma_3\Psi} = \widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa)+i\mu\mathcal{H}\widehat{\sigma}_1\,; \quad (1.1)$$

3) $\max\{\|\Phi\|_{L^\infty(K)}\,,\,\|\Psi\|_{L^\infty(K)}\}\leqslant c_1^*$, $|\widetilde{\varkappa}|\leqslant c_2^*$, *где*

$$c_1^* = c_1^*(p,q,F)>0 \quad \text{и} \quad c_2^*=c_2^*(p,q,F)>0.$$

Теорема 1.2, являющаяся частным случаем теоремы 1.1, используется при доказательстве теоремы 0.3.

Вещественнозначные функции Φ, Ψ и вектор $\widetilde{\varkappa}\in\mathbf{R}^2$, определяемые в теореме 1.2, однозначно находятся из условия

$$i\widehat{d}_+(\Phi - i\Psi) = -(\mathcal{G}+i\mathcal{F})\widetilde{\varkappa}_1 - i\mathcal{H}(\widetilde{\varkappa}_2+i)\,,$$

являющегося следствием (1.1), причем $\widetilde{\varkappa}_1>0$ [9]. Если $\mu\in 2\pi\mathbf{Z}$, то оператор умножения на матричную функцию $e^{-i\mu\hat\sigma_3(\Psi-x_2)}$ действует в $L^2(K;\mathbf{C}^2)$ (линейное многообразие $\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ инвариантно относительно действия этого оператора). При $\mu\in 2\pi\mathbf{Z}$, $k, \varkappa\in\mathbf{R}^2$ имеем

$$\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa+i\mu\widetilde{\varkappa}) = e^{-i\mu\hat\sigma_3(\Psi-x_2)}e^{-\mu\Phi}\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa)e^{\mu\Phi}e^{-i\mu\hat\sigma_3(\Psi-x_2)}. \quad (1.2)$$

Л е м м а 1.1 ([10]). *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}\in\Gamma$. *Тогда для функции* $\Psi\in\widetilde{H}^1_0(K)\cap\widetilde{C}(K)$, *определяемой в теореме 1.2, при всех* $\lambda\in\mathbf{R}$

$$\operatorname{mes}\{x\in K : \Psi(x)-x_2=\lambda\}=0\,.$$

Пусть $k\in\mathbf{R}^2$ и $\mu\in\mathbf{R}$. Для всех $N\in\mathbf{Z}^2$ обозначим

$$G_N^{\pm}(k;\mu) = \big((k_1+2\pi N_1)^2+(k_2+2\pi N_2\pm\mu)^2\big)^{1/2}\,;$$

$$G_N(k;\mu) = \min\{G_N^-(k;\mu), G_N^+(k;\mu)\}\,.$$

Если $k_1 = \pi$, то $G_N(k;\mu) \geqslant \pi$. Для всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ положим

$$\|\varphi\|_* = \Big(\sum_{N\in\mathbf{Z}^2} G_N^2(k;\mu)\,|\varphi_N|^2\Big)^{1/2},$$

$$\|\varphi\|_{*,\pm} = \Big(\sum_{N\in\mathbf{Z}^2} (G_N^\pm(k;\mu))^2\,|\varphi_N|^2\Big)^{1/2}.$$

Л е м м а 1.2. *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\} \in \Gamma(p,q,F)$. *Тогда для всех векторов* $k \in \mathbf{R}^2$, *всех чисел* $\mu \in \mathbf{R}$ *и всех функций* $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ *выполняются оценки*

$$c_1\,\|\varphi\|^2_{*,\pm} \leqslant \|(\widehat{d}_\pm(k) + i\mu\mathcal{H})\varphi\|^2 \leqslant c_2\,\|\varphi\|^2_{*,\pm}\,.$$

Лемма 1.2 является следствием оценок (0.5) (с теми же константами $c_1 = c_1(p,q,F) > 0$ и $c_2 = c_2(p,q,F) \geqslant c_1$).

Для множества $\mathcal{O} \subset \mathbf{Z}^2$ обозначим $\mathcal{L}(\mathcal{O}) = \{\psi \in L^2(K) : \psi_N = 0$ при $N \in \mathbf{Z}^2\backslash\mathcal{O}\}$, $\mathcal{L}(\mathbf{Z}^2) = L^2(K)$, $\mathcal{L}(\varnothing) = \{0\}$; $\widehat{P}^{\,\mathcal{O}}$ – ортогональный проектор в $L^2(K)$, ставящий в соответствие функциям $\varphi \in L^2(K)$ функции

$$\widehat{P}^{\,\mathcal{O}}\varphi = \sum_{N\in\mathcal{O}} \varphi_N e^{2\pi i\,(N,x)}$$

($\widehat{P}^{\emptyset}\varphi = 0$); $\#\,\mathcal{O}$ – число векторов конечного множества $\mathcal{O} \subset \mathbf{Z}^2$.

При $a \geqslant 2\pi$ определим (непустые конечные) множества

$$T^\pm(a) = \{N \in \mathbf{Z}^2 : G_N^\pm(k;\mu) \leqslant a\}$$

(в приведенных обозначениях не отмечается зависимость от вектора $k \in \mathbf{R}^2$ и числа $\mu \in \mathbf{R}$, которые будут предварительно задаваться).

Л е м м а 1.3 ([10]). *Для каждой функции* $W \in \mathbb{L}(\mathbf{R}^2)$ *существуют число* $c_4(W) \geqslant 0$ *и невозрастающая функция* h_W :

$[2\pi, +\infty) \to [0, +\infty)$, *для которой* $h_W(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$, *такие, что для всех* $\mu \geqslant 4\pi$ *справедливы следующие три утверждения:*

1) для всех векторов $k \in \mathbf{R}^2 : k_1 = \pi$ *и для всех функций* $\varphi \in \mathcal{L}(T^{\pm}(\mu/2))$

$$\|W\varphi\| \leqslant c_4(W)\, \|\varphi\|_{*,\,\pm} = c_4(W)\, \|\varphi\|_* \,;$$

2) если $2\pi \leqslant a \leqslant \mu/2$, *то для всех векторов* $k \in \mathbf{R}^2$ *и всех функций* $\varphi \in \mathcal{L}(T^{\pm}(\mu/2) \backslash T^{\pm}(a))$

$$\|W\varphi\| \leqslant h_W(a) \|\varphi\|_* \,;$$

3) для всех векторов $k \in \mathbf{R}^2$ *и всех функций*

$$\varphi \in \widetilde{H}^1(K) \cap \mathcal{L}(\mathbf{Z}^2 \backslash (T^+(\mu/2) \cup T^-(\mu/2)))$$

выполняется неравенство $\|W\varphi\| \leqslant 3h_W(\mu)\, \|\varphi\|_*$.

З а м е ч а н и е 1.1. Из пунктов 1) и 3) следует, что число $c_4(W)$ можно выбрать так, чтобы неравенство

$$\|W\varphi\| \leqslant c_4(W)\, \|\varphi\|_*$$

было справедливо для всех $\mu \geqslant 4\pi$, всех векторов $k \in \mathbf{R}^2 : k_1 = \pi$ и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$.

Следующая теорема усиливает теорему 6.2 из [10], и ее доказательство непосредственно вытекает из доказательства этой теоремы. Фактически в теореме 1.3 сформулировано то, что в действительности доказано в [10, § 6] (при этом чтобы не вносить каких-либо изменений в предложенное в [10] доказательство теоремы 6.2, утверждения леммы 1.3 сформулированы так, как они приведены в [10]).

Для произвольного множества $\mathbf{M}' \subset \mathbf{N}$ обозначим

$$\mathcal{Q}\,(\mathbf{M}') = \overline{\lim_{N \to +\infty}}\ \frac{\#\{\nu \in \mathbf{M}' : \nu \leqslant N\}}{N}\,.$$

Т е о р е м а 1.3. *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}\in\Gamma(p,q,F)$, $V_\pm\in\in\mathbb{L}(\mathbf{R}^2)$ *и* Ψ *– вещественнозначная функция из* $\widetilde{C}(K)$, *для которой* $\operatorname{mes}\{x\in K:\Psi(x)-x_2=\lambda\}=0$ *при любом* $\lambda\in\mathbf{R}$. *Тогда для любого числа* $a\geqslant 2\pi$, *для которого*

$$\max\{h^2_{V_-}(a),h^2_{V_+}(a)\}\leqslant\frac{1}{36}\,\frac{c_1^2}{c_1+4\,(\max\{c_4(V_-),c_4(V_+)\})^2}$$

(где $c_1=c_1(p,q,F)>0$ *– число из неравенств* (0.5) *и леммы 1.2, а функции* $h_{V_\pm}$ *и числа* $c_4(V_\pm)$ *определены в лемме 1.3), найдется множество* $\mathbf{M}=\mathbf{M}\,(p,q,F;\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H};\Psi;V_+\,,V_-\,;a)\subset\mathbf{N}$ *такое, что* $\mathcal{Q}\,(\mathbf{N}\backslash\mathbf{M})=0$ *и для всех* $\mu\in\pi\mathbf{M}$ *(при* $\mu\geqslant 2a$*), всех векторов* $k\in\mathbf{R}^2:k_1=\pi$ *и всех функций* $\varphi_\pm\in\widetilde{H}^1(K)$ *справедлива оценка*

$$\begin{gathered}\|(\widehat{d}_+(k)+i\mu\mathcal{H})\varphi_++e^{-2i\mu\Psi}\,V_-\varphi_-\|^2+\\+\|(\widehat{d}_-(k)+i\mu\mathcal{H})\varphi_-+e^{2i\mu\Psi}\,V_+\varphi_+\|^2\geqslant\\\geqslant\frac{c_1}{6}\,\left(\|\widehat{P}^{\,T^+(a)}\varphi_+\|^2_*+\|\widehat{P}^{\,T^-(a)}\varphi_-\|^2_*\right)+\frac{c_1^2}{6(c_1+4\,(\max\{c_4(V_-),c_4(V_+)\})^2)}\times\\\times\left(\|\widehat{P}^{\,\mathbf{Z}^2\backslash T^+(a)}\varphi_+\|^2_{*,\,+}+\|\widehat{P}^{\,\mathbf{Z}^2\backslash T^-(a)}\varphi_-\|^2_{*,\,-}\right).\end{gathered}$$

Т е о р е м а 1.4. *Пусть* $\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}\}\in\Gamma(p,q,F)$, $\widetilde{V}_0\in\in\mathbb{L}(\mathbf{R}^2)$, $\widetilde{V}_3\in\mathbb{L}(\mathbf{R}^2)$ *и* Ψ *– вещественнозначная функция из* $\widetilde{C}(K)$, *для которой* $\operatorname{mes}\{x\in K:\Psi(x)-x_2=\lambda\}=0$ *при любом* $\lambda\in\mathbf{R}$. *Тогда для любого числа* $a\geqslant 2\pi$, *для которого*

$$\max_{\pm}\,h^2_{\tilde{V}_0\pm\tilde{V}_3}(a)\leqslant\frac{1}{36}\frac{c_1^2}{c_1+4\,(\max\{c_4(\tilde{V}_0-\tilde{V}_3),c_4(\tilde{V}_0+\tilde{V}_3)\})^2}\;,\tag{1.3}$$

найдется множество

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}\,(p,q,F;\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H};\Psi;\widetilde{V}_0+\widetilde{V}_3\,,\widetilde{V}_0-\widetilde{V}_3\,;a)\subset\mathbf{N}$$

такое, что $\mathcal{Q}\,(\mathbf{N}\backslash\mathbf{M})=0$ *и для всех* $\mu\in\pi\mathbf{M}:\mu\geqslant 2a$, *всех векторов* $k\in\mathbf{R}^2:k_1=\pi$ *и всех вектор-функций*

$$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_+\\\varphi_-\end{pmatrix}\in\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$$

справедлива оценка

$$\|(\widehat{\mathcal{D}}(k)+i\mu\mathcal{H}\widehat{\sigma}_1+e^{2i\mu\hat{\sigma}_3\Psi}(\widetilde{V}_0\widehat{I}+\widetilde{V}_3\widehat{\sigma}_3))\varphi\|^2\geqslant$$

$$\geqslant\frac{c_1}{6}\Bigg(\sum_{\pm}\|\widehat{P}^{\,T^{\pm}(a)}\varphi_{\pm}\|_*^2+$$

$$+\frac{c_1}{c_1+4\,(\max\{c_4(\tilde{V}_0-\tilde{V}_3),c_4(\tilde{V}_0+\tilde{V}_3)\})^2}\sum_{\pm}\|\widehat{P}^{\,\mathbf{Z}^2\setminus T^{\pm}(a)}\varphi_{\pm}\|_{*,\,\pm}^2\Bigg)\,.$$

Теорема 1.4 непосредственно вытекает из теоремы 1.3, если положить $V_{\pm}=\widetilde{V}_0\pm\widetilde{V}_3$, так как

$$\widehat{\mathcal{D}}(k)+i\mu\mathcal{H}\widehat{\sigma}_1+e^{2i\mu\hat{\sigma}_3\Psi}\,(\widetilde{V}_0\widehat{I}+\widetilde{V}_3\widehat{\sigma}_3)=\begin{pmatrix}e^{2i\mu\Psi}\,V_+ & \widehat{d}_-(k)+i\mu\mathcal{H}\\ \widehat{d}_+(k)+i\mu\mathcal{H} & e^{-2i\mu\Psi}\,V_-\end{pmatrix}.$$

Для функций $W\in L^2(K)$ при $b\geqslant 0$ определим функции

$$K\ni x\to W(b;x)=\begin{cases}W(x) & ,\ \text{если } |W(x)|\leqslant b,\\ 0 & ,\ \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Л е м м а 1.4. *Пусть $W\in\mathbb{L}(\mathbf{R}^2)\subset L^2(K)$. Тогда существует невозрастающая функция $\widetilde{h}_W:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, для которой $\widetilde{h}_W(t)\to 0$ при $t\to+\infty$, такая, что для всех $\mu\in\mathbf{R}$, всех векторов $k\in\mathbf{R}^2: k_1=\pi$ и всех функций $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$ (для каждого из знаков $+$ и $-$) справедлива оценка*

$$\|(W(.)-W(b;.))\varphi(.)\|\leqslant\widetilde{h}_W(b)\,\|\varphi\|_{*,\,\pm}\,,\ b\geqslant 0\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $W\in\mathbb{L}(\mathbf{R}^2)$, то (см., например, лемму 5.3 в [10]) для любого $\varepsilon>0$ найдется число $C'_{\varepsilon,W}\geqslant 0$ такое, что для всех $\mu\in\mathbf{R}$, всех векторов $k\in\mathbf{R}^2$ и всех функций $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$ (и для каждого из знаков $+$ и $-$)

$$\|W\varphi\|\leqslant\varepsilon\,\|\varphi\|_{*,\,\pm}+C'_{\varepsilon,W}\,\|\varphi\|\,. \tag{1.4}$$

Для чисел $a \geqslant 2\pi$ и функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ обозначим

$$\varphi_{\pm}^{(a)} = \widehat{P}^{\,T^{\pm}(a)}\varphi, \quad \widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a)} = \widehat{P}^{\,\mathbf{Z}^2 \setminus T^{\pm}(a)}\varphi\,,$$

где $T^{\pm}(a) = \{N \in \mathbf{Z}^2 : G_N^{\pm}(k;\mu) \leqslant a\}$ (функции $\varphi_{\pm}^{(a)}$ и $\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a)}$ зависят (кроме числа a) также от вектора $k \in \mathbf{R}^2$ и числа μ из $\mathbf{R}$, но в их обозначениях это не отмечается). Справедливы оценки

$$1 \leqslant \# T^{\pm}(a) < 6\pi a^2.$$

Для всех чисел $b \geqslant 0$, $a \geqslant 2\pi$, $\mu \in \mathbf{R}$, всех векторов $k \in \in \mathbf{R}^2 : k_1 = \pi$ и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ (так как в этом случае $\pi\|\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_{*,\,\pm}$) имеем (для каждого из знаков)

$$\|(W(.) - W(b;.))\varphi(.)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|(W(.) - W(b;.))\varphi_{\pm}^{(a)}(.)\| + \|(W(.) - W(b;.))\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a)}(.)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|W(.) - W(b;.)\|_{L^2(K)}\,\|\varphi_{\pm}^{(a)}\|_{L^\infty(K)} + \|W\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a)}\| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{6\pi}\,a\,\|W(.) - W(b;.)\|_{L^2(K)}\,\|\varphi_{\pm}^{(a)}\| + \varepsilon\,\|\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a)}\|_{*,\,\pm} + C'_{\varepsilon,\,W}\,\|\widetilde{\varphi}_{\pm}^{(a)}\| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sqrt{\tfrac{6}{\pi}}\,a\,\|W(.) - W(b;.)\|_{L^2(K)} + \varepsilon + \tfrac{C'_{\varepsilon,\,W}}{a}\right)\|\varphi\|_{*,\,\pm}\,.$$

Обозначим

$$\widetilde{h}_W(b) = \inf_{\varepsilon > 0}\ \min_{a \geq 2\pi}\ \left(\sqrt{\tfrac{6}{\pi}}\,a\,\|W(.) - W(b;.)\|_{L^2(K)} + \varepsilon + \tfrac{C'_{\varepsilon,\,W}}{a}\right).$$

Так как $\|W(.) - W(b;.)\|_{L^2(K)} \downarrow 0$ при $b \to +\infty$, то функция $\widetilde{h}_W$ удовлетворяет требуемым условиям. $\square$

2. Доказательство теоремы 0.3

Определим при $l = 1, 2$ и $b \geqslant 0$ функции

$$\mathbf{R}^2 \ni x \to V_l(b;x) = \begin{cases} V_l(x) & , \ \text{если } |V_l(x)| \leqslant b, \\ 0 & , \ \text{в противном случае}. \end{cases}$$

В соответствии с леммой 1.4 (так как $V_l \in \mathbb{L}(\mathbf{R}^2)$, $l = 1, 2$) выберем число $b = b(p, q, F; V_1, V_2) \geqslant 0$ так, чтобы для всех $\mu \in \mathbf{R}$, всех векторов $k \in \mathbf{R}^2 : k_1 = \pi$ и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ (для каждого из знаков $+$ и $-$) выполнялись неравенства

$$\|(V_l(.) - V_l(b; .))\varphi(.)\|^2 \leqslant \tfrac{c_1}{192} \|\varphi\|^2_{*,\pm}, \quad l = 1, 2, \tag{2.1}$$

Так как $V_l(b; .) \in L^\infty(K)$ (следовательно, $V_l(b; .) \in L^2\{g, \mathbf{Z}^2\}$ для всех функций $g \in \mathbb{G}$) и $\|V_l(b; .)\|_{L^\infty(K)} \leqslant b$, $l = 1, 2$, то из теоремы 1.1 следует, что существуют векторы k', $\kappa' \in \mathbf{R}^2$ и функции Φ', $\Psi' \in \widetilde{H}^1_0(K) \cap \widetilde{C}(K)$ (более того, Φ', $\Psi' \in \widetilde{H}^1_0\{g, \mathbf{Z}^2\}$ для любой функции $g \in \mathbb{G}$) такие, что операторы умножения на функции $e^{\pm i\Phi'}$ и матричные функции $e^{\pm\hat{\sigma}_3\Psi'}$ не выводят за пределы пространства $\widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2)$, для всех векторов $k, \kappa \in \mathbf{R}^2$

$$e^{\hat{\sigma}_3\Psi'} e^{-i\Phi'} (\widehat{\mathcal{D}}(k + k' + i(\kappa + \kappa')) + \widehat{V})\, e^{i\Phi'} e^{\hat{\sigma}_3\Psi'} = \tag{2.2}$$

$$= \widehat{\mathcal{D}}(k + i\kappa) + \sum_{l=1}^{2} (V_l(.) - V_l(b; .))\widehat{\sigma}_l + \widetilde{V}_0\widehat{I} + \widetilde{V}_3\widehat{\sigma}_3 ,$$

где $\widetilde{V}_0\widehat{I} + \widetilde{V}_3\widehat{\sigma}_3 = e^{2\hat{\sigma}_3\Psi'}(V_0\widehat{I} + V_3\widehat{\sigma}_3)$ и, следовательно,

$$\widetilde{V}_0 = V_0 \operatorname{ch}2\Psi' + V_3 \operatorname{sh}2\Psi', \quad \widetilde{V}_3 = V_0 \operatorname{sh}2\Psi' + V_3 \operatorname{ch}2\Psi',$$

и при этом

$$\max\{\|\Phi'\|_{L^\infty(K)}, \|\Psi'\|_{L^\infty(K)}\} \leqslant c''_1 b, \tag{2.3}$$

$$|k'|^2 + |\kappa'|^2 \leqslant 2c'_2 b^2,$$

где $c''_1 = c''_1(p, q, F) > 0$ и $c'_2 = c'_2(p, q, F) > 0$ (константа c'_2 определена в теореме 1.1). Из (2.3) получаем, что $\widetilde{V}_0, \widetilde{V}_3 \in \mathbb{L}(\mathbf{R}^2)$. Пусть $\Phi, \Psi \in \widetilde{H}^1_0(K) \cap \widetilde{C}(K)$ и $\widetilde{\kappa} \in \mathbf{R}^2$ – вещественнозначные функции и вектор, определяемые для функций $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ в теореме 1.2. Из равенства (1.1) для всех $k \in \mathbf{R}^2$ и $\mu \in \mathbf{R}$ получаем

$$e^{i\mu\hat{\sigma}_3\Psi} e^{\mu\Phi} (\widehat{\mathcal{D}}(k + i\mu\widetilde{\kappa}) + \sum_{l=1}^{2} (V_l(.) - V_l(b; .))\widehat{\sigma}_l + \widetilde{V}_0\widehat{I} + \widetilde{V}_3\widehat{\sigma}_3)\, e^{-\mu\Phi} e^{i\mu\hat{\sigma}_3\Psi} \tag{2.4}$$

$$= \widehat{\mathcal{D}}(k) + i\mu\mathcal{H}\widehat{\sigma}_1 + \sum_{l=1}^{2}(V_l(.) - V_l(b;.))\widehat{\sigma}_l + e^{2i\mu\hat{\sigma}_3\Psi}(\widetilde{V}_0\widehat{I} + \widetilde{V}_3\widehat{\sigma}_3)\,.$$

Обозначим

$$\varepsilon_0 = \tfrac{1}{16}\, c_1\big(c_1 + 4(\max\{c_4(\widetilde{V}_0 - \widetilde{V}_3), c_4(\widetilde{V}_0 + \widetilde{V}_3)\})^2\big)^{-1/2}.$$

Выберем число $a = a(p,q,F;\widehat{V}) \geqslant 2\pi$ так, чтобы выполнялись неравенство (1.3) (с рассматриваемыми функциями $\widetilde{V}_0$ и $\widetilde{V}_3$) и неравенства

$$C'_{\varepsilon_0\,,V_l} \leqslant \varepsilon_0 a\,,\ l = 1,2$$

(где константы $C'_{\varepsilon_0\,,V_l}$ взяты из оценки (1.4)). Тогда из леммы 1.1 и теоремы 1.4 следует, что существует множество $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$, зависящее от p, q, F, функций $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ и матричного потенциала $\widehat{V}$, такое, что $\mathcal{Q}(\mathbf{N}\backslash\mathbf{M}) = 0$ и для всех $\mu \in \pi\mathbf{M}$, всех векторов $k \in \mathbf{R}^2 : k_1 = \pi$ и всех вектор-функций

$$\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_+\\ \varphi_-\end{pmatrix} \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2) \tag{2.5}$$

справедлива оценка

$$\|(\widehat{\mathcal{D}}(k) + i\mu\mathcal{H}\widehat{\sigma}_1 + e^{2i\mu\hat{\sigma}_3\Psi}(\widetilde{V}_0\widehat{I} + \widetilde{V}_3\widehat{\sigma}_3))\varphi\|^2 \geqslant \tag{2.6}$$

$$\geqslant \tfrac{c_1}{6}\sum_{\pm}\|\widehat{P}^{\,T^{\pm}(a)}\varphi_\pm\|_*^2 + \tfrac{128}{3}\,\varepsilon_0^2\sum_{\pm}\|\widehat{P}^{\,\mathbf{Z}^2\backslash T^{\pm}(a)}\varphi_\pm\|_{*,\,\pm}^2\,.$$

С другой стороны, с помощью оценок (1.4) и (2.1) для всех вектор-функций (2.5) получаем

$$\big\|\big(\sum_{l=1}^{2}(V_l(.) - V_l(b;.))\widehat{\sigma}_l\big)\varphi(.)\big\|^2 \leqslant 2\sum_{l=1}^{2}\big\|(V_l(.) - V_l(b;.))\varphi(.)\big\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{l=1}^{2}\sum_{\pm}\|(V_l(.) - V_l(b;.))(\widehat{P}^{\,T^{\pm}(a)}\varphi_\pm)(.)\|^2 +$$

$$+4\sum_{l=1}^{2}\sum_{\pm}\|V_l\widehat{P}^{\,\mathbf{Z}^2\setminus T^{\pm}(a)}\varphi_{\pm}\|^2\leqslant\tfrac{c_1}{24}\sum_{\pm}\|\widehat{P}^{\,T^{\pm}(a)}\varphi_{\pm}\|^2_{*,\,\pm}+$$

$$+8\sum_{l=1}^{2}\sum_{\pm}\Bigl(\varepsilon_0^2\,\|\widehat{P}^{\,\mathbf{Z}^2\setminus T^{\pm}(a)}\varphi_{\pm}\|^2_{*,\,\pm}+(C'_{\varepsilon_0\,,\,V_l})^2\,\|\widehat{P}^{\,\mathbf{Z}^2\setminus T^{\pm}(a)}\varphi_{\pm}\|^2\Bigr)\leqslant$$

$$\leqslant\tfrac{c_1}{24}\sum_{\pm}\|\widehat{P}^{\,T^{\pm}(a)}\varphi_{\pm}\|^2_{*,\,\pm}+32\,\varepsilon_0^2\sum_{\pm}\|\widehat{P}^{\,\mathbf{Z}^2\setminus T^{\pm}(a)}\varphi_{\pm}\|^2_{*,\,\pm}$$

(использована оценка $\|\widehat{P}^{\,\mathbf{Z}^2\setminus T^{\pm}(a)}\varphi_{\pm}\|\leqslant a^{-1}\|\widehat{P}^{\,\mathbf{Z}^2\setminus T^{\pm}(a)}\varphi_{\pm}\|^2_{*,\,\pm}$). Поэтому из (2.6) вытекает, что для всех $\mu\in\pi\mathbf{M}$, всех векторов $k\in\mathbf{R}^2:k_1=\pi$ и всех вектор-функций (2.5)

$$\Bigl\|\bigl(\widehat{\mathcal{D}}(k)+i\mu\mathcal{H}\widehat{\sigma}_1+\sum_{l=1}^{2}(V_l(.)-V_l(b;.))\widehat{\sigma}_l+e^{\,2i\mu\hat{\sigma}_3\Psi}(\widetilde{V}_0\widehat{I}+\widetilde{V}_3\widehat{\sigma}_3)\bigr)\varphi\Bigr\|^2\geqslant$$

$$\geqslant\tfrac12\,\Bigl\|\bigl(\widehat{\mathcal{D}}(k)+i\mu\mathcal{H}\widehat{\sigma}_1+e^{\,2i\mu\hat{\sigma}_3\Psi}(\widetilde{V}_0\widehat{I}+\widetilde{V}_3\widehat{\sigma}_3)\bigr)\varphi\Bigr\|^2-$$

$$-\Bigl\|\Bigl(\sum_{l=1}^{2}(V_l(.)-V_l(b;.))\widehat{\sigma}_l\Bigr)\varphi\Bigr\|^2\geqslant$$

$$\geqslant\tfrac{c_1}{24}\sum_{\pm}\Bigl\|\widehat{P}^{\,T^{\pm}(a)}\varphi_{\pm}\Bigr\|^2_{*,\,\pm}+\tfrac{32}{3}\,\varepsilon_0^2\sum_{\pm}\Bigl\|\widehat{P}^{\,\mathbf{Z}^2\setminus T^{\pm}(a)}\varphi_{\pm}\Bigr\|^2_{*,\,\pm}\geqslant$$

$$\geqslant\tfrac{32}{3}\,\varepsilon_0^2\sum_{\pm}\|\varphi_{\pm}\|^2_{*,\,\pm}\geqslant\tfrac{32}{3}\,\varepsilon_0^2\sum_{N\,\in\,\mathbf{Z}^2}G_N^2(k;\mu)|\varphi_N|^2\geqslant\tfrac{32}{3}\,\pi^2\varepsilon_0^2\,\|\varphi\|^2.$$

Так как $\|\Phi\|_{L^{\infty}(K)}\leqslant c_1^*=c_1^*(p,q,F)$ (см. теорему 1.2), то из (2.4) и полученных неравенств следует оценка

$$\|\bigl(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\mu\widetilde{\kappa})+\sum_{l=1}^{2}(V_l(.)-V_l(b;.))\widehat{\sigma}_l+\widetilde{V}_0\widehat{I}+\widetilde{V}_3\widehat{\sigma}_3\bigr)\varphi\|\geqslant\qquad(2.7)$$

$$\geqslant\tfrac{4\sqrt{2}\,\pi}{\sqrt{3}}\;\varepsilon_0\,e^{-2c_1^*\mu}\|\varphi\|\,.$$

Наконец, (2.7) и (2.2) приводят к оценке

$$\|\bigl(\widehat{\mathcal{D}}(k+k'+i(\mu\widetilde{\kappa}+\kappa'))+\widehat{V}\bigr)\varphi\|\geqslant\tfrac{4\sqrt{2}\,\pi}{\sqrt{3}}\,\varepsilon_0\,e^{-4c_1''b}e^{-2c_1^*\mu}\,\|\varphi\|\,,$$

справедливой для всех $\mu \in \pi\mathbf{M}$, всех векторов $k \in \mathbf{R}^2 : k_1 = \pi$ и всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2)$. Для вектора $\widetilde{\varkappa} \in \mathbf{R}^2$ имеем $\widetilde{\varkappa}_1 > 0$ [9] и

$$\tfrac{\sqrt{c_1}}{p+F} \leqslant |\widetilde{\varkappa}| \leqslant \tfrac{p}{\sqrt{c_1}}$$

(см. доказательства леммы 4.1 и теоремы 4.1 и [10]), поэтому осталось положить $e = \widetilde{\varkappa}/|\widetilde{\varkappa}|$ и

$$c = c(p, q, F) = 3c_1^* \, \tfrac{p+F}{\sqrt{c_1}} \, .$$

При этом достаточно выбирать числа $\widetilde{\mu} \in \pi|\widetilde{\varkappa}|\mathbf{M}$, для которых

$$4c_1''b - \ln\big(\tfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \, \pi\varepsilon_0 \big) \leqslant c_1^* \, \tfrac{\tilde{\mu}}{|\tilde{\varkappa}|} \, .$$

Теорема доказана.

3. Отсутствие собственных значений в спектре двумерного периодического оператора Шредингера

В этом и следующем разделах работы результаты о двумерном периодическом операторе Дирака, приведенные в предыдущих разделах, применяются при доказательстве отсутствия собственных значений в спектре двумерного периодического оператора Шредингера. Будут также существенно использованы утверждения из [10] и [11].

Пусть $\mathbf{R}^2 \ni x \to \widehat{G}(x) = (G_{jl})_{j,l=1,2}$ – вещественная симметрическая положительно определенная матричная функция (метрика), $\widehat{G}, \widehat{G}^{-1} \in L^\infty(\mathbf{R}^2; \mathcal{M}_2)$, $\mathbf{R}^2 \ni x \to A(x) = (A_1(x), A_2(x)) \in \mathbf{C}^2$ – векторнозначная функция (векторный потенциал). Функции $\widehat{G}$ и A предполагаются периодическими с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$, $A_j \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbf{R}^2)$, $j = 1, 2$. Рассмотрим полуторалинейную форму в $L^2(\mathbf{R}^2)$

$$\mathcal{W}(\widehat{G}, A; \psi, \varphi) = \sum_{j,l=1}^{2} \big(\big(-i\,\tfrac{\partial}{\partial x_j} - \overline{A}_j\big)\psi, G_{jl}\big(-i\,\tfrac{\partial}{\partial x_l} - A_l\big)\varphi \big)$$

с областью определения $Q(\mathcal{W}) = H^1(\mathbf{R}^2)$, $\psi, \varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$ (черта означает комплексное сопряжение).

Обозначим через $\mathbb{V}_\Lambda$ множество полуторалинейных форм $\mathcal{V}(\psi, \varphi)$ в $L^2(\mathbf{R}^2)$ (линейных по второму аргументу), $\psi, \varphi \in \in Q(\mathcal{V}) = H^1(\mathbf{R}^2)$, для которых

1) $\mathcal{V}(\psi(. - \gamma), \varphi(. - \gamma)) = \mathcal{V}(\psi, \varphi)$ для всех $\psi, \varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$ и всех $\gamma \in \Lambda$ (т.е. $\mathcal{V}$ – периодическая форма с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$);

2) $\mathcal{V}(e^{i(k,x)}\psi, \varphi) = \mathcal{V}(\psi, e^{-i(k,x)}\varphi)$ для всех $k \in \mathbf{R}^2$ (и всех $\psi, \varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$);

3) для любого $\varepsilon > 0$ существует число $C_\varepsilon = C_\varepsilon(\mathcal{V}) \geqslant 0$ такое, что для всех $\varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$

$$|\mathcal{V}(\varphi, \varphi)| \leqslant \varepsilon \, \|\nabla \varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)} + C_\varepsilon \, \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} \,. \tag{3.1}$$

Формы $\mathcal{V} \in \mathbb{V}_\Lambda$ для функций $\psi, \varphi \in H^1(\mathbf{R}^2) \cap C_0(\mathbf{R}^2)$ (где $C_0(\mathbf{R}^2)$ – пространство финитных функций из $C(\mathbf{R}^2)$) могут иметь вид

$$\mathcal{V}(\psi, \varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}^2} \overline{\psi} \varphi \, d\mu \,, \tag{3.2}$$

где μ – комплексная периодическая с решеткой периодов Λ борелевская мера (с локально конечной полной вариацией). Однако не всякую форму $\mathcal{V} \in \mathbb{V}_\Lambda$ можно представить в виде (3.2) [10, § 7]. Если

$$\mathcal{V}(\psi, \varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}^2} V \overline{\psi} \varphi \, d^2x \,, \ \psi, \varphi \in H^1(\mathbf{R}^2) \,, \tag{3.3}$$

где V – периодическая (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$) функция из класса Като K_2, то $\mathcal{V} \in \mathbb{V}_\Lambda$ [3; 14].

При сделанных предположениях относительно периодических функций $\widehat{G}$ и A и в случае $\mathcal{V} \in \mathbb{V}_\Lambda$ квадратичная форма $\mathcal{W}(\widehat{G}, A; \varphi, \varphi) + \mathcal{V}(\varphi, \varphi)$, $\varphi \in Q(\mathcal{W} + \mathcal{V}) = H^1(\mathbf{R}^2) \subset L^2(\mathbf{R}^2)$, является замкнутой и секториальной. Поэтому она порождает m-секториальный оператор $\widehat{H}(\widehat{G}; A, \mathcal{V})$ в $L^2(\mathbf{R}^2)$ с некоторой областью определения $D(\widehat{H}(\widehat{G};A,\mathcal{V}))\subset H^1(\mathbf{R}^2)$ [15] (если $\varphi\in$ $\in D(\widehat{H}(\widehat{G};A,\mathcal{V}))$, то для всех $\psi\in H^1(\mathbf{R}^2)$ имеем

$$(\psi,\widehat{H}(\widehat{G};A,\mathcal{V})\varphi)=\mathcal{V}(\psi,\varphi)).$$

Оператор $\widehat{H}(\widehat{G};A,\mathcal{V})$ можно формально записать в виде

$$\sum_{j,l=1}^{2}\bigl(-i\,\tfrac{\partial}{\partial x_j}-A_j\bigr)G_{jl}\bigl(-i\,\tfrac{\partial}{\partial x_l}-A_l\bigr)+V\,, \tag{3.4}$$

где V – периодический (обобщенный) скалярный потенциал, который, если является обычной (измеримой) функцией $V:\mathbf{R}^2\to$ $\mathbf{C}$ (например, из класса Като K_2), определяет форму $\mathcal{V}\in\mathbb{V}_\Lambda$ по формуле (3.3).

Следующая теорема является основным результатом данной работы, относящимся к периодическому оператору Шредингера.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть* $\widehat{G}=(G_{jl})_{j,l=1,2}$ – *вещественная симметрическая положительно определенная матричная функция, периодическая с решеткой периодов* $\Lambda\subset\mathbf{R}^2$, $\widehat{G},\widehat{G}^{-1}\in$ $\in L^\infty(\mathbf{R}^2;\mathcal{M}_2)$. *Предположим, что* $\det\widehat{G}\in H^1_{\rm loc}(\mathbf{R}^2)$,

$$\tfrac{\partial}{\partial x_j}\,\det\widehat{G}\in\mathbb{L}_\Lambda(\mathbf{R}^2)\,,\ j=1,2\,,$$

$$A_j\in\mathbb{L}_\Lambda(\mathbf{R}^2)\,,\ j=1,2\,,\ \mathcal{V}\in\mathbb{V}_\Lambda\,.$$

Тогда оператор $\widehat{H}(\widehat{G};A,\mathcal{V})$ *не имеет собственных значений.*

З а м е ч а н и е 3.1. Утверждение теоремы 3.1 остается в силе, если вместо форм $\mathcal{V}\in\mathbb{V}_\Lambda$ рассматривать формы $\mathcal{V}$ (с областью определения $Q(\mathcal{V})=H^1(\mathbf{R}^2)\subset L^2(\mathbf{R}^2)$), удовлетворяющие условиям 1) и 2) из определения множества $\mathbb{V}_\Lambda$, а вместо условия 3) потребовать, чтобы оценка (3.1) выполнялась для некоторого достаточно малого числа $\varepsilon>0$, зависящего от Λ, $\widehat{G}$ и A (в этом случае оператор Шредингера $\widehat{H}(\widehat{G};A,\mathcal{V})$ также определяется как m-секториальный оператор в $L^2(\mathbf{R}^2)$, порождаемый (замкнутой и секториальной) квадратичной формой $\mathcal{W}(\widehat{G},A;\varphi,\varphi)+\mathcal{V}(\varphi,\varphi)$, $\varphi\in Q(\mathcal{W}+\mathcal{V})=H^1(\mathbf{R}^2)\subset L^2(\mathbf{R}^2)$).

З а м е ч а н и е 3.2. Если в условиях теоремы 3.1 A_j , $j = 1, 2$, – вещественнозначные функции, а форма $\mathcal{V}$ эрмитова, то оператор $\widehat{H}(\widehat{G}; A, \mathcal{V})$ самосопряжен и, следовательно (так как оператор $\widehat{H}(\widehat{G}; A, \mathcal{V})$ не имеет собственных значений), его спектр абсолютно непрерывен [1].

Пусть A_j , $j = 1, 2$, и V – вещественнозначные (периодические с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$) функции. Двумерный периодический оператор Шредингера

$$\sum_{j=1}^{2} \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} - A_j\right)^2 + V\,, \ x \in \mathbf{R}^2, \tag{3.5}$$

рассматривался в работах [13; 16; 17]. В [18] доказана абсолютная непрерывность спектра оператора (3.5) при $V \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$, $A \in L^{2q}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}^2)$, $q > 1$. Последний результат был усилен в статье [8], в которой предполагалось, что $V \ln(1 + |V|) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$ и $|A|^2 \ln^q(1 + |A|) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$, $q > 1$. В [14] исследовался оператор (3.5) с потенциалом V из класса Като K_2 (и при $A \equiv 0$). Периодический оператор Шредингера (3.4) с переменной метрикой $\widehat{G}$ впервые рассматривался А. Морамом [4] при $\widehat{G} \in C^\infty(\mathbf{R}^2; \mathcal{M}_2)$, $\det \widehat{G} \equiv 1$, $A_j \in C^\infty(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$, $j = 1, 2$, и $V \in L^\infty(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$. В дальнейшем П. Кучментом и С. Левендорским [19] для случая $\widehat{G} \in C^{m+\alpha}(\mathbf{R}^2; \mathcal{M}_2)$, $m \in \mathbf{Z}_+$, $\alpha \in (0, 1)$, было доказано существование периодических изотермических координат $y(x) \in C^{m+1+\alpha}(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}^2)$, приводящих матричную функцию $\widehat{G}$ к скалярному виду; их использование позволило ослабить ограничения на $\widehat{G}$, A и V , сведя рассматриваемую задачу к случаю постоянной матрицы $\widehat{G}$. Периодические изотермические координаты применялись в серии работ М.Ш. Бирманом, Т.А. Суслиной и Р.Г. Штеренбергом. В [20] доказана абсолютная непрерывность спектра оператора (3.4) при $\widehat{G} \in W^2_{2q,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2; \mathcal{M}_2)$, $A \in L^{2q}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}^2)$, $q > 1$, $V = V_1 + \sigma \delta_\Sigma$, где V_1 – периодическая (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$) функция из пространства $L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$, Σ – периодическая (с той же решеткой периодов

Λ) система кусочно-гладких кривых, δ_Σ – дельта-функция, сосредоточенная на Σ, $\sigma \in L^q_{\rm loc}(\Sigma;\mathbf{R})$. В последующих работах [21; 22; 23] ослаблялись условия на функции $\widehat{G}$, A и V. В [23] приведены условия, полученные Р.Г. Штеренбергом:

$$\det \widehat{G} \in H^1_{\rm loc}(\mathbf{R}^2)\,, \quad \tfrac{\partial}{\partial x_j} \det \widehat{G} \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbf{R}^2)\,,\ j = 1,\,2\,, \tag{3.6}$$

$$|A|^2\, l(|A|) \in L^1_{\rm loc}(\mathbf{R}^2)\,, \tag{3.7}$$

где $l(t) \doteq l_m^q(t)\prod_{i=1}^{m-1} l_i(t)$, $m\in\mathbf{N}$, $q>1$, $l_1(t) = 1+\ln(1+t)$, $l_i(t) = 1+\ln l_{i-1}(t)$, $i = 2,\dots,m$, $t \geqslant 0$, и скалярный потенциал V определяется как обобщенная функция $d\mu/d^2x$, где μ – периодический борелевский заряд, удовлетворяющий некоторым дополнительным условиям (см. [22]). При этом замыкание (в $L^2(\mathbf{R}^2)$) квадратичной формы

$$\mathcal{V}(\varphi,\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}^2} |\varphi|^2 d\mu\,, \quad \varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)\cap C_0(\mathbf{R}^2)\,,$$

не обязательно ограничено относительно формы $\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)}$, $\varphi \in H^1(\mathbf{R}^2)$. Наконец, в замечательной работе [24] (см. также [25]) было ослаблено ограничение (3.7) на векторный потенциал A: достаточно предполагать, что $A_j \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbf{R}^2)$, $j = 1,2$. В данной работе применяется другой подход к исследованию двумерного периодического оператора Шредингера (3.4), не использующий периодическую замену координат, приводящую матричную функцию (метрику) $\widehat{G}(.)$ к скалярному виду, и опирающийся на результаты о периодическом операторе Дирака. Этот подход предложен в [10] и использовался также в [11] и [26]. При этом условие (3.6) на матричную функцию $\widehat{G}(.)$ получается из приближенной факторизации оператора Шредингера (при $V\equiv 0$), а не как условие, обеспечивающее применение периодических изотермических координат. В [11] (см. также [26]) доказано отсутствие собственных значений в спектре периодического оператора

Шредингера $\widehat{H}(\widehat{G};A,\mathcal{V})$ (формально записываемого в виде (3.4)), если выполнены условия (3.6), $\mathcal{V}\in\mathbb{V}_\Lambda$ и

$$A_j\in L^2\{g,\Lambda\}\subset\mathbb{L}_\Lambda(\mathbf{R}^2)\,,\quad j=1,2\,, \tag{3.8}$$

для некоторой функции $g\in\mathbb{G}$ (форма $\mathcal{V}$ не обязательно эрмитова, а функции A_j , $j=1,2$, выбираются комплекснозначными). В более ранней работе [10] накладывалось дополнительное условие на форму $\mathcal{V}$: предполагалось, что существует неотрицательная форма $\mathcal{V}^+\in\mathbb{V}_\Lambda$ такая, что $|\mathcal{V}(\varphi,\varphi)|\leqslant\mathcal{V}^+(\varphi,\varphi)$ для всех $\varphi\in H^1(\mathbf{R}^2)$. Условие (3.8) на векторный потенциал A шире, чем условие (3.7). Для любого периодического (с решеткой периодов Λ) векторного потенциала $A:\mathbf{R}^2\to\mathbf{C}^2$, удовлетворяющего условию $|A|^2\widetilde{g}(|A|)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$, где функция $[0,+\infty)\ni t\to\widetilde{g}(t)\in[0,+\infty)$ не убывает и функция $(0,+\infty)\ni$ $\ni t\to\widetilde{g}(t^{-1})$ принадлежит $\mathbb{G}$ (в частности, это справедливо, если $\widetilde{g}(.)=l(.)$), существует функция $g\in\mathbb{G}$ такая, что $A_j\in L^2\{g,\Lambda\}$, $j=1,2$ [26]. В этой работе для периодического оператора Шредингера (3.4) предполагается (как и в [24]), что $A_j\in\mathbb{L}_\Lambda(\mathbf{R}^2)$, $j=1,2$.

При доказательстве теоремы 3.1 , делая линейную замену переменных, можно считать, что $\Lambda=\mathbf{Z}^2$, $K=[0,1)^2$ (при этом условия, наложенные на функции $\widehat{G}$, A и форму $\mathcal{V}$, не изменяются. Обозначим $\mathbb{V}\doteq\mathbb{V}_{\mathbf{Z}^2}$. Делая замену формы

$$\mathcal{V}(\psi,\varphi)-\lambda\int\limits_{\mathbf{R}^2}\overline{\psi}\varphi\,d^2x\to\mathcal{V}(\psi,\varphi)\,,\quad \psi,\,\varphi\in H^1(\mathbf{R}^2)\,,$$

где $\lambda\in\mathbf{C}$, также можно ограничиться только доказательством обратимости оператора $\widehat{H}(\widehat{G};A,\mathcal{V})$. Поэтому теорема 3.1 следует из теоремы 3.2.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть $\widehat{G}=(G_{jl})_{j,l=1,2}$ – вещественная симметрическая положительно определенная матричная функция, периодическая с решеткой периодов $\mathbf{Z}^2\subset\mathbf{R}^2$, $\widehat{G},\,\widehat{G}^{-1}\in$*

$\in L^\infty(\mathbf{R}^2;\mathcal{M}_2)$. *Предположим, что* $\det\widehat{G}\in H^1_{\rm loc}(\mathbf{R}^2)$,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\,\det\widehat{G}\in\mathbb{L}(\mathbf{R}^2)\,,\quad j=1,2\,,$$

$$A_j\in\mathbb{L}(\mathbf{R}^2)\,,\ j=1,2\,,\quad \mathcal{V}\in\mathbb{V}\,.$$

Тогда оператор $\widehat{H}(\widehat{G};A,\mathcal{V})$ *обратим (т.е. у него нет собственного значения* $\lambda=0$ *).*

Будем далее предполагать, что $\Lambda=\mathbf{Z}^2$ и $K=[0,1)^2$. Пусть $k,\,\kappa\in\mathbf{R}^2$, $A_j\in\mathbb{L}(\mathbf{R}^2)$, $j=1,2$,

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\widehat{G},A;k+i\kappa;\psi,\varphi)=$$

$$=\sum_{j,\,l\,=\,1}^{2}\big((-i\,\tfrac{\partial}{\partial x_j}-\overline{A}_j+k_j-i\kappa_j)\psi,G_{jl}\big(-i\,\tfrac{\partial}{\partial x_l}-A_l+k_l+i\kappa_l)\varphi\big)$$

– полуторалинейная форма в $L^2(K)$, $\psi,\,\varphi\in Q(\widetilde{\mathcal{W}})=\widetilde{H}^1(K)$. Выберем любую функцию $\theta\in C^\infty(\mathbf{R})$, для которой $\theta(\xi)=1$ при $\xi\leqslant 0$ и $\theta(\xi)=0$ при $\xi\geqslant 1$. Положим

$$\theta_N(x)=\theta(|x_1|-N)\,\theta(|x_2|-N),\quad N\in\mathbf{N},\quad x\in\mathbf{R}^2.$$

Для формы $\mathcal{V}\in\mathbb{V}$ определим полуторалинейную форму в $L^2(K)$

$$\widetilde{\mathcal{V}}(\psi,\varphi)=\lim_{N\to+\infty}\tfrac{1}{(2N)^2}\,\mathcal{V}(\theta_N\psi,\theta_N\varphi)\,,\tag{3.9}$$

$\psi,\varphi\in Q(\widetilde{\mathcal{V}})=\widetilde{H}^1(K)$. Предел в (3.9) существует и не зависит от выбора функции θ [10] (функции ψ и φ считаются периодически продолженными на все пространство $\mathbf{R}^2$). Из оценки (3.1) для формы $\mathcal{V}$ следует, что для всех $\varepsilon>0$, всех векторов $k\in\mathbf{R}^2$ и всех функций $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$

$$|\widetilde{\mathcal{V}}(\varphi,\varphi)|\leqslant\varepsilon\,\|(k-i\nabla)\varphi\|^2_{L^2(K;\mathbf{C}^2)}+C_\varepsilon\,\|\varphi\|^2_{L^2(K)}\,.$$

Т е о р е м а 3.3 ([26]). *Пусть* $\mathcal{V} \in \mathbb{V}$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется число* $C'_\varepsilon = C'_\varepsilon(\mathcal{V}) \geqslant 0$ *такое, что для всех векторов* $k \in \mathbf{R}^2 : k_1 = \pi$ *и всех функций* $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K)$

$$|\widetilde{\mathcal{V}}(\psi,\varphi)| \leqslant \varepsilon \, \|(k - i\nabla)\psi\|_{L^2(K;\mathbf{C}^2)} \, \|(k - i\nabla)\varphi\|_{L^2(K;\mathbf{C}^2)} + \\ + C'_\varepsilon \, \|\psi\|_{L^2(K)} \, \|\varphi\|_{L^2(K)} \, .$$

Из условия 2) в определении множества $\mathbb{V} = \mathbb{V}_{\mathbf{Z}^2}$ получаем (см. [10]), что

$$\widetilde{\mathcal{V}}(\overline{f}\psi, \varphi) = \widetilde{\mathcal{V}}(\psi, f\varphi) \tag{3.10}$$

для всех функций $f \in \widetilde{C}^1(K)$ (и всех $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K)$).

При условиях, наложенных на функции $\widehat{G}$, A и форму $\mathcal{V}$, квадратичная форма

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\widehat{G}, A; k + i\varkappa; \varphi, \varphi) + \widetilde{\mathcal{V}}(\varphi,\varphi), \varphi \in Q(\widetilde{\mathcal{W}} + \widetilde{\mathcal{V}}) = \widetilde{H}^1(K) \subset L^2(K),$$

для всех $k + i\varkappa \in \mathbf{C}^2$ замкнута и секториальна. Пусть

$$\widehat{H}(\widehat{G}; A, \mathcal{V}; k + i\varkappa)$$

– m-секториальный оператор, порождаемый этой формой [15], $D(\widehat{H}(\widehat{G}; A, \mathcal{V}; k + i\varkappa)) \subset \widetilde{H}^1(K) \subset L^2(K)$. Оператор $\widehat{H}(\widehat{G}; A, \mathcal{V})$ унитарно эквивалентен прямому интегралу

$$\int_{2\pi K}^{\oplus} \widehat{H}(\widehat{G}; A, \mathcal{V}; k) \, \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \; ,$$

действующему в

$$\int_{2\pi K}^{\oplus} L^2(K) \, \frac{d^2k}{(2\pi)^2}$$

(см. [10; 27; 28]). Так как операторы $\widehat{H}(\widehat{G}; A, \mathcal{V}; k+i\varkappa)$ имеют компактную резольвенту, то для доказательства отсутствия в спектре оператора $\widehat{H}(\widehat{G}; A, \mathcal{V})$ собственного значения $\lambda = 0$ достаточно доказать (аналогично случаю периодического оператора Дирака), что найдутся векторы k, $\varkappa \in \mathbf{R}^2$ такие, что оператор $\widehat{H}(\widehat{G}; A, \mathcal{V}; k + i\varkappa)$ обратим [1; 19; 28]. Поэтому теорема 3.2 является следствием следующей теоремы.

Т е о р е м а 3.4. *Пусть функции* $\widehat{G}$, A *и форма* $\mathcal{V}$ *удовлетворяют условиям теоремы 3.2. Тогда найдутся такие векторы* $k,\, \kappa \in \mathbf{R}^2$, *что для любой ненулевой функции* $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ *можно выбрать функцию* $\psi \in \widetilde{H}^1(K)$ *такую, что*

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\widehat{G}, A; k + i\kappa; \psi, \varphi) + \widetilde{\mathcal{V}}(\psi, \varphi) \neq 0\,.$$

4. Теорема 4.1 и ее доказательство

Пусть матричная функция $\mathbf{R}^2 \ni x \to \widehat{G}(x) \in \mathcal{M}_2$ удовлетворяет условиям теоремы 3.2. Определим функции $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \in L^\infty(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$ так, что $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma$ и

$$G_{11} = \mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2\,, \quad G_{22} = \mathcal{H}^2\,, \quad G_{12} = G_{21} = \mathcal{F}\mathcal{H}\,.$$

Тогда $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma(p, q, F)$ для некоторых чисел p, q и F; $\mathcal{G}\mathcal{H} = \sqrt{\det \widehat{G}}$ и, следовательно,

$$\mathcal{G}\mathcal{H} \in \widetilde{H}^1(K)\,, \quad \tfrac{\partial \mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_j} \in \mathbb{L}(\mathbf{R}^2)\,,\ j = 1, 2\,.$$

Более того, для любого $\tau \in \mathbf{R}$ умножение на функцию $(\mathcal{F}\mathcal{G})^\tau$ не выводит за пределы пространства $\widetilde{H}^1(K)$ и для всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$

$$(\mathcal{F}\mathcal{G})^{-\tau}\, \tfrac{\partial}{\partial x_j}\, (\mathcal{F}\mathcal{G})^\tau \varphi = \tfrac{\tau}{\mathcal{F}\mathcal{G}}\, \tfrac{\partial \mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_j}\, \varphi + \tfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,,\ j = 1, 2\,.$$

Вектор $\widetilde{\kappa} = \widetilde{\kappa}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}) \in \mathbf{R}^2$ и вещественнозначные функции $\Phi,\, \Psi \in \widetilde{H}^1_0(K) \cap \widetilde{C}(K)$ будем далее (в этом разделе) выбирать (по функциям $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$) в соответствии с теоремой 1.2. Обозначим $\Omega(x) = \Psi(x) - x_2$, $x \in K$.

Т е о р е м а 4.1. *Пусть функции* $\widehat{G}$, A *и форма* $\mathcal{V}$ *удовлетворяют условиям теоремы 3.2. Тогда найдутся числа*

$$C(\widehat{G}, A, \mathcal{V}) > 0, \quad \mu_0 = \mu_0(\widehat{G}, A, \mathcal{V}) > 0$$

и векторы $k^0 = k^0(\widehat{G}, A) \in \mathbf{R}^2$ *и* $\kappa^0 = \kappa^0(\widehat{G}, A) \in \mathbf{R}^2$ *такие, что для всех векторов* $k \in \mathbf{R}^2 : k_1 + k^0_1 = \pi$, *всех чисел*

$\mu \in 2\pi\mathbf{N} : \mu \geqslant \mu_0$ и каждой вектор-функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$, для которой $\widehat{\sigma}_1\varphi = \varphi$ (т.е. $\varphi_1 = \varphi_2$), можно найти такую ненулевую вектор-функцию

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)\,,$$

что

$$\Big|\sum_{s=1}^{2}\big(\widetilde{\mathcal{W}}(\widehat{G},A;k-i\kappa^0+i\mu\widetilde{\kappa};\psi_s,\varphi_1)+\widetilde{\mathcal{V}}(\psi_s,\varphi_1)\big)\Big| \geqslant$$

$$\geqslant C(\widehat{G},A,\mathcal{V})\,\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k+k^0)e^{i\mu\hat{\sigma}_3\Omega}e^{-\mu\Phi}\psi\|\cdot\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k+k^0)e^{-i\mu\hat{\sigma}_3\Omega}e^{\mu\Phi}\varphi\|\,.$$

Так как для всех векторов $k \in \mathbf{R}^2 : k_1 = \pi$ и всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ справедлива оценка $\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k)\varphi\| \geqslant \pi\,\|\varphi\|$, то из теоремы 4.1 непосредственно следует теорема 3.4.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4.1. Для вектор-функций $\psi,\,\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ и чисел $\mu \in 2\pi\mathbf{Z}$ будем обозначать

$$\psi'_\mu = e^{i\mu\hat{\sigma}_3\Omega}e^{-\mu\Phi}\psi\,,\quad \varphi'_\mu = e^{-i\mu\hat{\sigma}_3\Omega}e^{\mu\Phi}\varphi\,.$$

Положим $\widehat{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}_0\widehat{I} + \mathcal{Q}_3\widehat{\sigma}_3$, где $\mathcal{Q}_l \in \mathbb{L}(\mathbf{R}^2)$, $l = 0,3$, $\widehat{I} \in \mathcal{M}_2$ – единичная матрица; $\widehat{\mathcal{Q}}^* = \overline{\mathcal{Q}}_0\widehat{I} + \overline{\mathcal{Q}}_3\widehat{\sigma}_3$. Определим полуторалинейные формы

$$\mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}};\psi,\varphi) = (\widehat{\mathcal{Q}}^*\psi, -i\,\tfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}) - (-i\,\tfrac{\partial\psi}{\partial x_j}, \widehat{\mathcal{Q}}\varphi)\,,\ j = 1,2\,,$$

$\psi,\varphi \in Q(\mathcal{R}_j) = \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2) \subset L^2(K;\mathbf{C}^2)$. Если $\psi,\,\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ и $\widehat{\sigma}_1\varphi = \varphi$, то для всех $\mu \in 2\pi\mathbf{Z}$ выполняются равенства [10]

$$\mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}};\psi,\varphi) = \mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}};\psi'_\mu, \widehat{\sigma}_1\varphi'_\mu)\,,\ j = 1,2\,. \tag{4.1}$$

Л е м м а 4.1 ([10]). *Пусть $\mathcal{Q}_l \in \mathbb{L}(\mathbf{R}^2)$, $l = 0,3$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $C''_\varepsilon = C''_\varepsilon(\widehat{\mathcal{Q}}) \geqslant 0$ такое, что для всех векторов $k' \in \mathbf{R}^2 : k'_1 = \pi$ и всех вектор-функций $\psi,\,\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ справедливы неравенства*

$$|\mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}};\psi,\varphi)| \leqslant \varepsilon\,\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi\|\cdot\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi\| + C''_\varepsilon\,\|\psi\|\cdot\|\varphi\|\,,\ j = 1,2\,.$$

Л е м м а 4.2. *Для всех чисел* $\mu \in 2\pi\mathbf{Z}$, *всех векторов* $k' \in \mathbf{R}^2$ *и всех вектор-функций* $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$, *для которых* $\widehat{\sigma}_1\varphi = \varphi$, *имеем*

$$\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')e^{i\mu\hat{\sigma}_3\Omega}\varphi\| = \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')e^{-i\mu\hat{\sigma}_3\Omega}\varphi\|\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как для всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ (см., например, [10, теорема 3.2])

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_j}\ \varphi \in L^2(K;\mathbf{C}^2)$$

и

$$e^{-i\mu\hat{\sigma}_3\Omega}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\ e^{i\mu\hat{\sigma}_3\Omega}\,\varphi = i\mu\widehat{\sigma}_3\ \frac{\partial\Omega}{\partial x_j}\ \varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\ ,\ j = 1,2\,,$$

то при условии $\widehat{\sigma}_1\varphi = \varphi$ получаем

$$\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')e^{i\mu\hat{\sigma}_3\Omega}\varphi\|^2 = \Bigl\|\Bigl(\widehat{\mathcal{D}}_0(k') + i\mu\Bigl(\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\,\widehat{\sigma}_1 - \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\,\widehat{\sigma}_2\Bigr)\Bigr)\varphi\Bigr\|^2 =$$

$$= \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi\|^2 + \mu^2\,\Bigl\|\Bigl(\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\,\widehat{\sigma}_1 - \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\,\widehat{\sigma}_2\Bigr)\varphi\Bigr\|^2 =$$

$$= \Bigl\|\Bigl(\widehat{\mathcal{D}}_0(k') - i\mu\Bigl(\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\,\widehat{\sigma}_1 - \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\,\widehat{\sigma}_2\Bigr)\Bigr)\varphi\Bigr\|^2 = \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')e^{-i\mu\hat{\sigma}_3\Omega}\varphi\|^2\,.$$

$\square$

Следствием равенства (4.1) и лемм 4.1 и 4.2 является лемма 4.3.

Л е м м а 4.3. *Пусть* $\mathcal{Q}_l \in \mathbb{L}(\mathbf{R}^2)$, $l = 0,3$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует число* $C''_\varepsilon = C''_\varepsilon(\widehat{\mathcal{Q}}) \geqslant 0$ *(то же, что и в лемме 4.1) такое, что для всех векторов* $k' \in \mathbf{R}^2 : k'_1 = \pi$, *всех чисел* $\mu \in 2\pi\mathbf{Z}$ *и всех вектор-функций* $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$: $\widehat{\sigma}_1\varphi = \varphi$ *справедливы неравенства*

$$|\mathcal{R}_j(\widehat{\mathcal{Q}};\psi,\varphi)| \leqslant \varepsilon\,\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi'_\mu\|\cdot\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi'_\mu\| + C''_\varepsilon\,\|\psi'_\mu\|\cdot\|\varphi'_\mu\|\,,\ j = 1,2\,.$$

Л е м м а 4.4. *Пусть* $\mathcal{K}, \mathcal{P} \in \mathbb{L}(\mathbf{R}^2)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется число* $\widetilde{C}_\varepsilon = \widetilde{C}_\varepsilon(\mathcal{K}, \mathcal{P}) \geqslant 0$ *такое, что для всех векторов* $k' \in \mathbf{R}^2 : k_1' = \pi$ *и всех вектор-функций* $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2)$

$$\|\mathcal{K}\psi\| \cdot \|\mathcal{P}\varphi\| \leqslant \varepsilon \, \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi\| + \widetilde{C}_\varepsilon \, \|\psi\| \cdot \|\varphi\| \, .$$

Доказательство леммы 4.4 аналогично доказательству леммы 2.1 в [10].

Обозначим

$$\widehat{\mathcal{D}}(A; k + i\varkappa) = \widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa) - (\mathcal{G}\widehat{\sigma}_1 + \mathcal{F}\widehat{\sigma}_2)A_1 - \mathcal{H}\widehat{\sigma}_2 A_2$$

(оператор $\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa)$ определяется по функциям $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ во введении), $D(\widehat{\mathcal{D}}(A; k+i\varkappa)) = D(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa)) = \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2) \subset L^2(K; \mathbf{C}^2)$. Для всех $k + i\varkappa \in \mathbf{C}^2$ и $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2)$ справедливо равенство (где $\overline{A} = (\overline{A}_1, \overline{A}_2)$)

$$\sum_{s=1}^{2} \widetilde{\mathcal{W}}(\widehat{G}, A; k + i\varkappa; \psi_s, \varphi_s) - \tag{4.2}$$
$$-(\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}; k - i\varkappa)\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{H}}\,\psi, \tfrac{1}{\mathcal{G}\mathcal{H}}\,\widehat{\mathcal{D}}(A; k + i\varkappa)\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{H}}\,\varphi) =$$
$$-\tfrac{i}{2}\,\mathcal{R}_1\Big(\tfrac{\mathcal{F}^2+\mathcal{G}^2}{\mathcal{G}\mathcal{H}}\,\tfrac{\partial \mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_1} + \tfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}\,\tfrac{\partial \mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_2}\,; \psi, \varphi\Big) -$$
$$-\tfrac{i}{2}\,\mathcal{R}_2\Big(\tfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}\,\tfrac{\partial \mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_1} + \tfrac{\mathcal{H}}{\mathcal{G}}\,\tfrac{\partial \mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_2}\,; \psi, \varphi\Big) -$$
$$-i\mathcal{R}_1(\mathcal{G}\mathcal{H}A_2\widehat{\sigma}_3; \psi, \varphi) + i\mathcal{R}_2(\mathcal{G}\mathcal{H}A_1\widehat{\sigma}_3; \psi, \varphi) -$$
$$-\Big(\tfrac{\partial \mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_1}\,\psi, A_2\widehat{\sigma}_3\,\varphi\Big) + \Big(\tfrac{\partial \mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_2}\,\psi, A_1\widehat{\sigma}_3\,\varphi\Big) - \tfrac{1}{4}\Big(\tfrac{1}{\mathcal{H}}\,\tfrac{\partial \mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_1}\,\psi, \tfrac{1}{\mathcal{H}}\,\tfrac{\partial \mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_1}\,\varphi\Big) -$$
$$-\tfrac{1}{4}\Big(\tfrac{1}{\mathcal{G}\mathcal{H}}\Big(\mathcal{F}\,\tfrac{\partial \mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_1} + \mathcal{H}\,\tfrac{\partial \mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_2}\Big)\psi, \tfrac{1}{\mathcal{G}\mathcal{H}}\Big(\mathcal{F}\,\tfrac{\partial \mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_1} + \mathcal{H}\,\tfrac{\partial \mathcal{G}\mathcal{H}}{\partial x_2}\Big)\varphi\Big)$$

(правая часть приведенного равенства не зависит от комплексного вектора $k + i\varkappa \in \mathbf{C}^2$). Выражая в последних четырех слагаемых правой части равенства (4.2) вектор-функции ψ и φ через вектор-функции ψ'_μ и φ'_μ, $\mu \in 2\pi\mathbf{Z}$, из равенства (4.2) с помощью лемм 4.3 и 4.4 получаем теорему 4.2.

Т е о р е м а 4.2. *Для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $C^*_\varepsilon = C^*_\varepsilon(\widehat{G}, A) \geqslant 0$ *, что для всех векторов* $k, \varkappa \in \mathbf{R}^2$ *и* $k' \in \mathbf{R}^2 : k'_1 = \pi$ *, всех чисел* $\mu \in 2\pi\mathbf{Z}$ *и всех вектор-функций* $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2) : \widehat{\sigma}_1 \varphi = \varphi$ *выполняется неравенство*

$$\Big| \sum_{s=1}^{2} \widetilde{\mathcal{W}}(\widehat{G}, A; k + i\varkappa + i\mu\widetilde{\varkappa}; \psi_s, \varphi_s) -$$

$$-(\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}; k - i\varkappa - i\mu\widetilde{\varkappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\,\psi, \tfrac{1}{\mathcal{GH}}\,\widehat{\mathcal{D}}(A; k + i\varkappa + i\mu\widetilde{\varkappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\,\varphi)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\,\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi'_\mu\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi'_\mu\| + C^*_\varepsilon\,\|\psi'_\mu\| \cdot \|\varphi'_\mu\|\,.$$

Т е о р е м а 4.3. *Существуют векторы* $k^0, \varkappa^0 \in \mathbf{R}^2$ *и число* $\widetilde{C} > 0$ *, зависящие от функций* $\widehat{G}$ *и* A *, такие, что для любого числа* $\mu \in 2\pi\mathbf{Z}$ *, любого вектора* $k \in \mathbf{R}^2$ *, для которого* $k_1 + k_1^0 = \pi$ *, и любой вектор-функции* $\varphi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2)$ *можно найти ненулевую вектор-функцию* $\psi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2)$ *такую, что*

$$(\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}; k + i\varkappa^0 - i\mu\widetilde{\varkappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\,\psi, \tfrac{1}{\mathcal{GH}}\,\widehat{\mathcal{D}}(A; k - i\varkappa^0 + i\mu\widetilde{\varkappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\,\varphi) \geqslant$$

$$\geqslant \widetilde{C}\,\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k + k^0)\psi'_\mu\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k + k^0)\varphi'_\mu\|\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1.2) при $k, \varkappa \in \mathbf{R}^2$ (и при $\mu \in 2\pi\mathbf{Z}$, $\Omega = \Psi - x_2$) для всех вектор-функций $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2)$ вытекает равенство

$$(\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}; k - i\varkappa - i\mu\widetilde{\varkappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\,\psi, \tfrac{1}{\mathcal{GH}}\,\widehat{\mathcal{D}}(A; k + i\varkappa + i\mu\widetilde{\varkappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\,\varphi) = \quad (4.3)$$

$$= (\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}; k - i\varkappa)\sqrt{\mathcal{GH}}\,\psi'_\mu\,, \tfrac{1}{\mathcal{GH}}\,e^{-2i\mu\widehat{\sigma}_3\Omega}\,\widehat{\mathcal{D}}(A; k + i\varkappa)\sqrt{\mathcal{GH}}\,\varphi'_\mu)\,.$$

Определим (как и при доказательстве теоремы 0.3) при $j = 1, 2$ и $b \geqslant 0$ функции

$$\mathbf{R}^2 \ni x \to A_j(b; x) = \begin{cases} A_j(x) & , \text{ если } |A_j(x)| \leqslant b, \\ 0 & , \text{ в противном случае}. \end{cases}$$

Так как $A_j \in \mathbb{L}(\mathbf{R}^2)$, $j = 1, 2$, и для всех векторов $k' \in \mathbf{R}^2$ и всех вектор-функций $\chi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2)$

$$\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\chi\|^2 = \sum_{j=1}^{2} \|(k'_j - i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,)\,\chi\|^2 = \sum_{N\,\in\,\mathbf{Z}^2} |k' + 2\pi N|^2\,|\chi_N|^2\,,$$

то из леммы 1.4 (в условиях которой достаточно ограничиться только случаем $\mu = 0$) и оценок (0.6) следует, что можно выбрать число $b = b(p, q, F; A) \geqslant 0$ такое, что для всех векторов $k' \in \mathbf{R}^2 : k'_1 = \pi$ и всех вектор-функций $\chi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2)$ выполняются неравенства

$$\|\big(\widehat{\mathcal{D}}(A(.) - A(b;.); k') - \widehat{\mathcal{D}}(k')\big)\chi\| = \tag{4.4}$$

$$= \|\big((\mathcal{G}\widehat{\sigma}_1 + \mathcal{F}\widehat{\sigma}_2)(A_1(.) - A_1(b;.)) + \mathcal{H}\widehat{\sigma}_2(A_2(.) - A_2(b;.))\big)\chi(.)\| \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2}\,\|\widehat{\mathcal{D}}(k')\chi\|\,,$$

$$\|\big(\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}(.) - \overline{A}(b;.); k') - \widehat{\mathcal{D}}(k')\big)\chi\| = \tag{4.5}$$

$$= \|\big((\mathcal{G}\widehat{\sigma}_1 + \mathcal{F}\widehat{\sigma}_2)(\overline{A}_1(.) - \overline{A}_1(b;.)) + \mathcal{H}\widehat{\sigma}_2(\overline{A}_2(.) - \overline{A}_2(b;.))\big)\chi(.)\| \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2}\,\|\widehat{\mathcal{D}}(k')\chi\|\,.$$

Имеем $\|A_j(b;.)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \leqslant b$, $j = 1, 2$. Поэтому из теоремы 1.1 следует, что существуют векторы $k^0, \varkappa^0 \in \mathbf{R}^2$ и функции $\Phi_0, \Psi_0 \in \widetilde{H}^1_0(K) \cap \widetilde{C}(K)$ (более того, $\Phi_0, \Psi_0 \in \widetilde{H}^1_0\{g, \mathbf{Z}^2\}$ для всех функций $g \in \mathbb{G}$), зависящие от функций $\widehat{G}$ и A , такие, что

$$\max\{\|\Phi_0\|_{L^\infty(K)}, \|\Psi_0\|_{L^\infty(K)}\} \leqslant c_5\, b\,, \tag{4.6}$$

$$|k^0|^2 + |\varkappa^0|^2 \leqslant c_6\, b^2\,, \tag{4.7}$$

где $c_5 = c_5\,(p, q, F) > 0$ и $c_6 = c_6\,(p, q, F) > 0$, умножение на функции $e^{\pm i\Phi_0}$ и матричные функции $e^{\pm\hat{\sigma}_3\Psi_0}$ не выводит за пределы пространства $\widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2)$ и для всех векторов $k, \varkappa \in \mathbf{R}^2$

$$\widehat{\mathcal{D}}(A(b;.); k + i\varkappa) = e^{\hat{\sigma}_3\Psi_0} e^{-i\Phi_0} \widehat{\mathcal{D}}(k + k^0 + i\varkappa + i\varkappa^0) e^{i\Phi_0} e^{\hat{\sigma}_3\Psi_0}$$

и, следовательно, также

$$\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}(b;.);k-i\kappa)=e^{\hat\sigma_3\overline{\Psi}_0}e^{-i\overline{\Phi}_0}\widehat{\mathcal{D}}(k+k^0-i\kappa-i\kappa^0)e^{i\overline{\Phi}_0}e^{\hat\sigma_3\overline{\Psi}_0}\,.$$

Положим $k'=k+k^0$. Будем выбирать векторы $k\in\mathbf{R}^2$, для которых $k_1'=k_1+k_1^0=\pi$. Обозначим

$$\psi_\mu''=e^{i\overline{\Phi}_0}e^{\hat\sigma_3\overline{\Psi}_0}\sqrt{\mathcal{GH}}\,\psi_\mu'\,,\quad \varphi_\mu''=e^{i\Phi_0}e^{\hat\sigma_3\Psi_0}\sqrt{\mathcal{GH}}\,\varphi_\mu'\,.$$

Из равенства (4.3) получаем

$$(\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A};k+i\kappa^0-i\mu\widetilde{\kappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\,\psi,\,\tfrac{1}{\mathcal{GH}}\,\widehat{\mathcal{D}}(A;k-i\kappa^0+i\mu\widetilde{\kappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\,\varphi)=$$
$$=(\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}(.)-\overline{A}(b;.);k')\psi_\mu''\,,\,\tfrac{1}{\mathcal{GH}}\,e^{2\hat\sigma_3(\Psi_0-i\mu\Omega)}\,\widehat{\mathcal{D}}(A(.)-A(b;.);k')\varphi_\mu'')\,. \tag{4.8}$$

Так как $k_1'=\pi$, то $\ker\widehat{\mathcal{D}}(k')=\{0\}$ и $R(\widehat{\mathcal{D}}(k'))=L^2(K;\mathbf{C}^2)$. Отсюда и из (4.4), (4.5) следует, что также

$$\ker\widehat{\mathcal{D}}(A(.)-A(b;.);k')=\ker\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}(.)-\overline{A}(b;.);k')=\{0\}$$

и

$$R(\widehat{\mathcal{D}}(A(.)-A(b;.);k'))=R(\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}(.)-\overline{A}(b;.);k'))=L^2(K;\mathbf{C}^2)$$

(при этом $D(\widehat{\mathcal{D}}(A(.)-A(b;.);k'))=D(\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}(.)-\overline{A}(b;.);k'))=$ $=\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$). Будем далее для каждой векторной функции φ из $\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ выбирать такую вектор-функцию $\psi\in\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$ (которая зависит также от $\mu\in2\pi\mathbf{Z}$, k' и функций $\widehat{G}$ и A (а также от числа $b=b(p,q,F;A)$)), что

$$\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}(.)-\overline{A}(b;.);k')\psi_\mu''=\tfrac{1}{\mathcal{GH}}\,e^{2\hat\sigma_3(\Psi_0-i\mu\Omega)}\,\widehat{\mathcal{D}}(A(.)-A(b;.);k')\varphi_\mu''$$

(для ненулевой вектор-функции φ вектор-функция ψ также ненулевая). Имеем

$$\|\widehat{\mathcal{D}}(k')\psi_\mu'\|\leqslant e^{2\,c_5b}\left\|e^{-\hat\sigma_3\overline{\Psi}_0}e^{i\overline{\Phi}_0}\,\widehat{\mathcal{D}}(k')\,e^{-i\overline{\Phi}_0}e^{-\hat\sigma_3\overline{\Psi}_0}\;\frac{1}{\sqrt{\mathcal{GH}}}\,\psi_\mu''\right\|= \tag{4.9}$$

$$= e^{2\,c_5 b} \left\| \widehat{\mathcal{D}}(-\overline{A}(b;.); k' + k^0 - i\kappa^0)\, \tfrac{1}{\sqrt{\mathcal{GH}}}\, \psi''_\mu \right\|,$$

$$\|\widehat{\mathcal{D}}(k')\varphi'_\mu\| \leqslant e^{2\,c_5 b} \left\| e^{-\hat\sigma_3 \Psi_0} e^{i\Phi_0}\, \widehat{\mathcal{D}}(k')\, e^{-i\Phi_0} e^{-\hat\sigma_3 \Psi_0}\, \tfrac{1}{\sqrt{\mathcal{GH}}}\, \varphi''_\mu \right\| = \tag{4.10}$$

$$= e^{2\,c_5 b} \left\| \widehat{\mathcal{D}}(-A(b;.); k' + k^0 + i\kappa^0)\, \tfrac{1}{\sqrt{\mathcal{GH}}}\, \varphi''_\mu \right\|.$$

Так как $A_j \in \mathbb{L}(\mathbf{R}^2)$, $j = 1, 2$, $(\mathcal{GH})^{-1/2} \in \widetilde{H}^1(K)$,

$$\frac{\partial (\mathcal{GH})^{-1/2}}{\partial x_j} = -\tfrac{1}{2}\, (\mathcal{GH})^{-3/2}\, \frac{\partial \mathcal{GH}}{\partial x_j} \in \mathbb{L}(\mathbf{R}^2)$$

и для всех вектор-функций $\chi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^2)$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\, \frac{1}{\sqrt{\mathcal{GH}}}\, \chi = -\tfrac{1}{2}\, (\mathcal{GH})^{-3/2}\, \frac{\partial \mathcal{GH}}{\partial x_j}\, \chi + \frac{1}{\sqrt{\mathcal{GH}}}\, \frac{\partial \chi}{\partial x_j}, \ j = 1, 2,$$

то из оценок (4.9) и (4.10) (см. также (4.7)) следует, что существует число $c_7 = c_7\,(\widehat{G}, A) > 0$ такое, что

$$\|\widehat{\mathcal{D}}(k')\psi'_\mu\| \leqslant c_7\, \|\widehat{\mathcal{D}}(k')\psi''_\mu\|, \quad \|\widehat{\mathcal{D}}(k')\varphi'_\mu\| \leqslant c_7\, \|\widehat{\mathcal{D}}(k')\varphi''_\mu\|. \tag{4.11}$$

Используя оценки (0.6), (4.4), (4.5), (4.6) и (4.11), из (4.8) получаем

$$(\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}; k + i\kappa^0 - i\mu\widetilde{\kappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\, \psi,\ \tfrac{1}{\mathcal{GH}}\, \widehat{\mathcal{D}}(A; k - i\kappa^0 + i\mu\widetilde{\kappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\, \varphi) \geqslant$$

$$\geqslant p^{-2} e^{-2\,c_5 b}\, \|\widehat{\mathcal{D}}(\overline{A}(.) - \overline{A}(b;.); k')\psi''_\mu\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}(A(.) - A(b;.); k')\varphi''_\mu\| \geqslant$$

$$\geqslant \tfrac{1}{4}\, p^{-2} e^{-2\,c_5 b}\, \|\widehat{\mathcal{D}}(k')\psi''_\mu\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}(k')\varphi''_\mu\| \geqslant$$

$$\geqslant \tfrac{1}{4}\, (pc_7)^{-2} e^{-2\,c_5 b}\, \|\widehat{\mathcal{D}}(k')\psi'_\mu\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}(k')\varphi'_\mu\| \geqslant$$

$$\geqslant \tfrac{1}{4}\, c_1\, (pc_7)^{-2} e^{-2\,c_5 b}\, \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi'_\mu\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi'_\mu\|.$$

Осталось положить $\widetilde{C} = \frac{1}{4}\, c_1\, (pc_7)^{-2} e^{-2\,c_5 b}$. □

Из теоремы 3.3 и теоремы 8.5 из [10] (которая вытекает из равенства (3.10) и леммы 4.2) непосредственно следует теорема 4.4.

Т е о р е м а 4.4. *Пусть* $\mathcal{V} \in \mathbb{V}$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется число* $C'_\varepsilon = C'_\varepsilon(\mathcal{V}) \geqslant 0$ *(то же, что и в теореме 3.3) такое, что для всех векторов* $k' \in \mathbf{R}^2 : k'_1 = \pi$, *всех чисел* $\mu \in 2\pi\mathbf{Z}$ *и всех вектор-функций* $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2) : \widehat{\sigma}_1\varphi = \varphi$ *справедливо неравенство*

$$\Big| \sum_{s=1}^{2} \widetilde{\mathcal{V}}(\psi_s, \varphi_s) \Big| \leqslant \varepsilon \, \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi'_\mu\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi'_\mu\| + C'_\varepsilon \, \|\psi'_\mu\| \cdot \|\varphi'_\mu\| \, .$$

Л е м м а 4.5 ([10; 11]). *Равномерно по всем векторам* k' *из* $\mathbf{R}^2 : k'_1 = \pi$ *и всем ненулевым векторным функциям* φ *из* $\widetilde{H}^1(K;\mathbf{C}^2)$, *для которых* $\widehat{\sigma}_1\varphi = \varphi$, *имеем*

$$\frac{\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\varphi'_\mu\|}{\|\varphi'_\mu\|} \to +\infty \tag{4.12}$$

при $2\pi\mathbf{N} \ni \mu \to +\infty$ *(расходимость в* (4.12) *определяется матричной функцией* $\widehat{G}$ *).*

Для завершения доказательства теоремы 4.1 осталось воспользоваться (учитывая оценку $\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi'_\mu\| \geqslant \pi \, \|\psi'_\mu\|$) теоремами 4.2, 4.3 и 4.4 и леммой 4.5.

Список литературы

1. Kuchment P. Floquet theory for partial differential equations. Basel: Birkhäuser Verlag, 1993.
2. Данилов Л.И. Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. VI. М.: ВИНИТИ, 1996. 45 с. Деп. в ВИНИТИ 31.12.96. Ґ3855-В96.
3. Цикон Х., Фрезе Р., Кирш В., Саймон Б. Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990. 408 с.
4. Morame A. Absence of singular spectrum for a perturbation of a two-dimensional Laplace-Beltrami operator with periodic electro-magnetic potential // J. Phys. A: Math. Gen. 1998. Vol. 31. P. 7593-7601.

5. Данилов Л.И. О спектре двумерного периодического оператора Дирака // Теор. и мат. физика. 1999. Т. 118, Ѓ1. С. 3-14.
6. Birman M.Sh., Suslina T.A. The periodic Dirac operator is absolutely continuous // Integr. Equat. and Operator Theory. 1999. Vol. 34. P. 377-395.
7. Данилов Л.И. Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. III. М.: ВИНИТИ, 1992. 33 с. Деп. в ВИНИТИ 10.07.92. Ѓ2252-В92.
8. Лапин И.С. Абсолютная непрерывность спектра двумерных периодических магнитных операторов Шредингера и Дирака с потенциалами из классов Зигмунда // Пробл. мат. анал. СПбГУ. СПб., 2001. Вып. 22. С. 74-105.
9. Данилов Л.И. Об абсолютной непрерывности спектра периодических операторов Шредингера и Дирака. II. М.: ВИНИТИ, 2001. 60 с. Деп. в ВИНИТИ 09.04.01. Ѓ916-В2001.
10. Данилов Л.И. О спектре двумерных периодических операторов Шредингера и Дирака // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2002. Вып. 3(26). С. 3-98.
11. Данилов Л.И. О спектре двумерного периодического оператора Шредингера // Теор. и мат. физика. 2003. Т. 134, Ѓ3. С. 447-459.
12. Данилов Л.И. Оценки резольвенты и спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом // Теор. и мат. физика. 1995. Т. 103, Ѓ1. С. 3-22.
13. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 428 с.
14. Shen Z. Absolute continuity of periodic Schrödinger operators with potentials in the Kato class // Illinois J. Math. 2001. Vol. 45, Ѓ3. P. 873-893.
15. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
16. Hempel R., Herbst I. Bands and gaps for periodic magnetic Hamiltonians. Preprint ESI, Ѓ162. Vienna, 1994.
17. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Двумерный периодический магнитный гамильтониан абсолютно непрерывен // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9, Ѓ1. С. 32-48.
18. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10, Ѓ4. С. 1-36.

19. Kuchment P., Levendorskii S. On the spectra of periodic elliptic operators // Trans. Amer. Math. Soc. 2001. Vol. 354, Ѓ2. P. 537-569.
20. Бирман М.Ш., Суслина Т.А., Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность двумерного оператора Шредингера с дельта-потенциалом, сосредоточенным на периодической системе кривых // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, Ѓ6. С. 140-177.
21. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность двумерного магнитного периодического оператора Шредингера с электрическим потенциалом типа производной от меры // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2000. Т. 271. С. 276-312.
22. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шредингера с положительным электрическим потенциалом // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, Ѓ4. С. 196-228.
23. Суслина Т.А., Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра магнитного оператора Шредингера с метрикой в двумерном периодическом волноводе // Алгебра и анализ. 2002. Т. 14, Ѓ2. С. 159-206.
24. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шредингера с сильно подчиненным магнитным потенциалом // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2003. Т. 303. С. 279-320.
25. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шредингера: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб, 2003.
26. Данилов Л.И. Об абсолютной непрерывности спектра периодических операторов Шредингера и Дирака. III. М.: ВИНИТИ, 2002. 20 с. Деп. в ВИНИТИ 22.10.02, Ѓ1798-В2002.
27. Shen Z. On absolute continuity of the periodic Schrödinger operators // Int. Math. Res. Notices. 2001. Ѓ1. P. 1-31.
28. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, Ѓ2. С. 1-40.