УДК 517.958:530.145.6

© **Л.Е. Морозова, Ю.П. Чубурин**
chuburin@otf.pti.udm.ru

ОБ УРОВНЯХ ОДНОМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С УБЫВАЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Ключевые слова: дискретное уравнение Шредингера, собственное значение, резонанс, асимптотика.

Abstract. We consider a one-dimensional discrete Schrödinger operator with a decreasing small potential. The existence of the unique level (eigenvalue or resonanse) near the boundary points ± 2 of the essential spectrum is proved. We investigate the asymptotic behaviour of these levels.

Введение

Рассмотрим дискретный (разностный) оператор Шредингера H_0 (см. [1]), действующий в $l^2(\mathbf{Z})$ по формуле

$$H_0\{x(n)\}_{n\in\mathbf{Z}} = \{x(n+1) + x(n-1)\}_{n\in\mathbf{Z}}.$$

Оператор H_0 является ограниченным и самосопряженным, а его спектр равен (см. [2], а также доказательство теоремы 1.1 ниже) $\sigma(H_0) = [-2, 2]$.

Положим $H = H_0 + V$, где $V = \{V(n)\}_{n\in\mathbf{Z}} \in l^\infty(\mathbf{Z})$ действует в $l^2(\mathbf{Z})$ по формуле $V\{x(n)\}_{n\in\mathbf{Z}} = \{V(n)x(n)\}_{n\in\mathbf{Z}}$. Предполагаем, что $V \neq 0$ и $V(n)$ принимает только вещественные значения, тогда оператор V также является ограниченным самосопряженным оператором (потенциалом).

Операторы H указанного вида активно изучаются математиками (см., например, [1;3] и имеющиеся там ссылки). Они берут свое происхождение из физики (по этому поводу см. [4], а также [5] об операторе Харпера).

В дальнейшем предполагаем, что функция $V(n)$ удовлетворяет оценке $|V(n)| \leqslant Ce^{-a|n|}$, где $a > 0$, $n \in \mathbf{Z}$. Будем далее пользоваться обозначением $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$, где $\varepsilon > 0$ — (малый) параметр.

В данной работе доказано, что при малых ε вблизи точек ± 2 — границы существенного спектра — существует ровно один уровень (собственное значение или резонанс); также исследована асимптотика этих уровней при $\varepsilon \to 0$. Аналогичная задача для собственного значения и ґнепрерывногоЄ оператора Шредингера $-\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon V(x)$ с $V(x) \in C^\infty$ ранее исследовалась Саймоном [6].

1. Функция Грина

Ядро (являющееся матрицей) $\{G(n,m,E)\}_{n,m\in\mathbf{Z}}$ резольвенты $R_0(E) = (H_0 - E)^{-1}$ оператора H_0, возможно, продолженное по параметру E на второй лист (см. ниже), будем для краткости называть функцией Грина.

Т е о р е м а 1.1. *Имеет место формула*

$$G(n,m,E) = G(n-m,E) = -\frac{1}{\sqrt{E^2-4}}\left(\frac{E-\sqrt{E^2-4}}{2}\right)^{|n-m|}, \qquad (1.1)$$

где $E \in \mathbf{C} \setminus [-2,2]$, *а разрез для корня выбирается вдоль отрицательной полуоси.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем вначале равенство

$$(H_0 - E)G(n,E) = \delta_{n,0}, \qquad (1.2)$$

где $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера. Очевидно, что последовательности вида $x(n) = Cq^{\pm n}$ с

$$q = \frac{E \pm \sqrt{E^2-4}}{2} \qquad (1.3)$$

удовлетворяют однородному уравнению $(H_0 - E)x(n) = 0$. Таким образом, (1.2) выполнено для $n \neq 0$. Поскольку ядро резольвенты должно убывать при $|n-m| \to \infty$, требуется выполнение условия $|q| < 1$. Величина $\frac{E}{2} = \frac{1}{2}\left(q + \frac{1}{q}\right)$, будучи функцией Жуковского, отображает как внешность, так и внутренность единичного круга на область $\mathbf{C}\setminus[-1,1]$. Обратная двузначная функция (1.3) при выборе знака ґ − Є , как легко видеть, переводит $\mathbf{C}\setminus[-2,2]$ на круг $\{|q| < 1\}$. Наконец, множитель в правой части (1.1) определяется равенством (1.2) при $n = 0$.

Поскольку $G(n, E)$ экспоненциально убывает при $|n| \to \infty$, то определен оператор в $l^2(\mathbf{Z})$ следующего вида:

$$\mathcal{R}_0(E)x(n) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} G(n-m, E)x(m).$$

При этом

$$(H_0 - E)\mathcal{R}_0(E)x(n) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} (H_0 - E)G(n-m, E)x(m) =$$

$$= \sum_{m\in\mathbf{Z}} \delta_{n-m,0}x(m) = x(n). \tag{1.4}$$

С другой стороны, положим

$$\mathcal{R}_0(E)(H_0 - E)x(n) = y(n), \tag{1.5}$$

тогда в силу (1.4) $(H_0 - E)x(n) = (H_0 - E)y(n)$. Обозначим $z = x - y$ и докажем, что $z = 0$. Для этого рассмотрим, следуя [2], унитарный оператор $U : l^2(\mathbf{Z}) \to L^2(-\pi, \pi)$,

$$Ux(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} x(n) = \widehat{x}(t).$$

Имеем

$$UH_0x(n) = 2\cos t\,\widehat{x}(t) = \widehat{H}_0Ux(n),$$

где $\widehat{H}_0$ — оператор умножения на $2\cos t$ в $L^2(-\pi, \pi)$. Таким образом, операторы H_0 и $\widehat{H}_0$ унитарно эквивалентны. Уравнение $(\widehat{H}_0 - E)z(t) = 0$ имеет, очевидно, только нулевые решения в $L^2(-\pi, \pi)$. Следовательно, $z = 0$, откуда $x - y = z = 0$. В сочетании с (1.4), (1.5) это доказывает равенство $\mathcal{R}_0(E) = R_0(E)$.

Т е о р е м а 1.2. *Существенный спектр оператора* H *совпадает с* $[-2,2]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно утверждению об относительно компактных возмущениях [6] достаточно доказать, что $\{V(n)G(n-m,i)\}_{n,m\in\mathbf{Z}}\in l^2(\mathbf{Z}^2)$. Имеем

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}|V(n)G(n-m,i)|^2=\sum_{n\in\mathbf{Z}}|V(n)|^2\sum_{m\in\mathbf{Z}}|G(m,i)|^2<\infty,$$

в силу оценки на $V(n)$ (см. Введение), (1.1) и неравенства

$$\left|\tfrac{E-\sqrt{E^2-4}}{2}\right|<1$$

для $E\notin[-2,2]$ (см. доказательство теоремы 1.1).

2. Уровни и их асимптотика

Уравнение Шредингера

$$(H_0+V)x=Ex, \tag{2.1}$$

рассматриваемое в классе $l^2(\mathbf{Z})$, перепишем для $E\notin\sigma(H_0)$ в виде

$$x=-R_0(E)Vx. \tag{2.2}$$

В случае, когда E принадлежит второму (ґнефизическомуЄ) листу, ненулевые решения x уравнения (2.2), вообще говоря, экспоненциально возрастают вместе с функцией Грина (1.1) (в этом случае для $E\neq[-2,2]$ выполнено неравенство $\left|\tfrac{E-\sqrt{E^2-4}}{2}\right|>1$ – см. доказательство теоремы 1.1). Такие E можно отнести к резонансам (см. мотивировку в [7]).

По физическим соображениям величину |ImE| можно считать достаточно малой (время жизни ґквазистационарного состоянияЄ, отвечающего резонансу, обратно пропорционально данной величине – см. [8], а слишком короткоживущие состояния не играют роли в физических процессах). Но числа E, близкие к отрезку $[-2, 2]$, переводятся функцией (1.3), обратной к функции Жуковского, в точки, близкие к окружности $|q| = 1$. Поэтому в силу теоремы 1.1 для данных E функция $G_n(E)$ представляет собой $\mathrm{const}\, e^{\alpha|n|}$ с α по модулю близким к единице. Поскольку вследствие (2.2) $x(n)$ при $|n| \to \infty$ ведет себя как и $G_n(E)$, то для исследования резонансов допустимо предположение $\sqrt{V}x \in l^2(\mathbf{Z})$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Число E , принадлежащее второму листу римановой поверхности функции Грина $G(E)$, будем называть резонансом оператора H, если существует ненулевое решение x уравнения (2.2) такое, что $\sqrt{V}x \in l^2(\mathbf{Z})$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Уровнем оператора H будем называть его собственное значение или резонанс.

Сделаем в уравнении (2.2) замену, полагая $y = \sqrt{V}x$, тогда

$$y = -\sqrt{V} R_0(k) \sqrt{V} y. \tag{2.3}$$

Для исследования уровней будем рассматривать уравнение (2.3) в классе $l^2(\mathbf{Z})$.

Перейдем к новой переменной $k = \frac{\sqrt{E^2-4}}{2}$ вместо E. Будем пользоваться обозначениями вида $R_0(k)$ вместо $R_0(E)$.

Положим

$$G_1(n,k) = G(n,k) + \tfrac{1}{2k} = -\tfrac{1}{2k}\big((\sqrt{1+k^2} - k)^{|n|} - 1\big). \tag{2.4}$$

Л е м м а 2.1. *Функция*

$$\Big\{\sqrt{V(n)}\, G_1(n-m,k) \sqrt{V(m)}\Big\}_{(n,m)\in \mathbf{Z}^2} \tag{2.5}$$

является двулистной аналитической $L^2(\mathbf{Z}^2)$ *-значной функцией в окрестности точки* $k = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначение $f_n(k) = \left(\sqrt{1+k^2}-k\right)^{|n|}$. Тогда

$$G_1(n,k) = -\tfrac{1}{2k}\left(f_n(k)-f(0)\right) = -\tfrac{1}{2k}\int_{[0,k]} f_n'(\varkappa)d\varkappa =$$

$$= \tfrac{|n|}{2k}\int_{[0,k]} \tfrac{(\sqrt{1+\varkappa^2}-\varkappa)^{|n|}}{\sqrt{1+\varkappa^2}}d\varkappa. \tag{2.6}$$

Первая из ветвей функции

$$\sqrt{1+\varkappa^2}-\varkappa = -i\Big((-i\varkappa)-\sqrt{(-i\varkappa)^2-1}\Big),$$

будучи с точностью до множителя $-i$ обратной к функции Жуковского относительно переменной $-i\varkappa$, переводит окрестность отрезка $[-1,1]$ и, следовательно, окрестность нуля (последнюю как относительно переменной $-i\varkappa$, так и относительно переменной $\varkappa$) внутрь кольца $\{1-\sigma<|\varkappa|\leqslant 1\}$, где $\sigma>0$ произвольно мало. Аналогично вторая ветвь данной функции переводит окрестность нуля внутрь кольца $\{1\leqslant|\varkappa|<1+\sigma\}$. Отсюда и из (2.6) вытекает для каждой из ветвей и k из окрестности нуля оценка

$$|G_1(n,k)| \leqslant C\tfrac{|n|}{2}(1+\sigma)^{|n|} \leqslant C_1 e^{\sigma_1|n|}, \tag{2.7}$$

где $C, C_1 = \mathrm{const}$, а $\sigma_1>0$ произвольное наперед заданное число.

Пользуясь (2.7), оценим, считая, что $\sigma_1<a$,

$$\Big|\sqrt{V(n)}G_1(n-m,k)\sqrt{V(m)}\Big|^2_{L^2(\mathbf{Z^2})} =$$

$$= \sum_{n,m\in\mathbf{Z^2}} |V(n)||G_1(n-m,k)|^2|V(m)| \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{n,m\in\mathbf{Z^2}} e^{-a|n|}e^{\sigma_1(|n|+|m|)}e^{-a|n|} = C\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-(a-\sigma_1|n|)}\Big)^2 < \infty. \tag{2.8}$$

Последовательности

$$g_{nm}^{(N)}(k)=\theta(N-|n|)\theta(N-|m|)\sqrt{V(n)}G_1(n-m,k)\sqrt{V(m)},$$

N=1,2,... , где $\theta(t)$ – функция Хевисайда, в силу аналитичности функции $f_n(k)$ определяют $L^2(\mathbf{Z}^2)$-значные двулистные аналитические функции, которые вследствие оценки (2.8) равномерно на компактах из окрестности нуля сходятся при $N\to\infty$ к $L^2(\mathbf{Z}^2)$-значной функции (2.5). В силу теоремы Вейерштрасса (очевидно, применимой к векторнозначным функциям) лемма доказана.

С л е д с т в и е 2.1. *Обозначим через $A(k)$ операторнозначную функцию с ядром (2.5). Тогда $A(k)$ в окрестности $k=0$ аналитически зависит от k и принимает значения в множестве компактных операторов.*

Т е о р е м а 2.1. *Пусть*

$$v=\sum_{n\in\mathbf{Z}}V(n)\neq 0.$$

Тогда в некоторых окрестностях точек $E=\pm 2$ для всех достаточно малых ε оператор H_ε имеет ровно по одному уровню, для которых справедлива формула соответственно

$$E=\pm(2+\tfrac{\varepsilon}{4}v^2)+o(\varepsilon^2). \tag{2.9}$$

При этом если $v>0$, то уровень является собственным значением, а если $v<0$, то резонансом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (2.4) запишем (2.3) в виде

$$y=\tfrac{\varepsilon\sqrt{V}}{2k}\big(y,\overline{\sqrt{V}}\big)-\varepsilon A(k)y. \tag{2.10}$$

Введем для достаточно малых ε переменную $z=(1+\varepsilon A(k))y$ и перепишем уравнение (2.10) в виде

$$z=\tfrac{\varepsilon\sqrt{V}}{2k}\big((1+\varepsilon A(k))^{-1}z,\overline{\sqrt{V}}\big). \tag{2.11}$$

Из (2.11) имеем $z = C\sqrt{V}$, где $C = \mathrm{const}$, причем в случае существования уровня $C \neq 0$. Подставляя данное выражение в (2.11), приходим к алгебраическому уравнению

$$k = \varepsilon f(k), \tag{2.12}$$

где

$$f(k) = \tfrac{1}{2}\big((1+\varepsilon A(k))^{-1}(\sqrt{V}), \overline{\sqrt{V}}\big). \tag{2.13}$$

Очевидно, что существование уровня эквивалентно существованию решения уравнения (2.12).

Уравнение (2.12) является уравнением на неподвижную точку для каждой из ветвей функции $f(k)$. В силу принципа сжимающих отображений для доказательства существования и единственности решения уравнения (2.12) (для каждой ветви) в круге $S = \{|k| \leqslant \rho\}$, где ρ достаточно мало, достаточно доказать, что $\varepsilon f(k)$ переводит круг в себя и является сжимающим отображением.

Для всех достаточно малых ε имеем согласно (2.13)

$$f(k) = \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\big(A^k(k)(\sqrt{V}), \overline{\sqrt{V}}\big),$$

причем ряд в правой части равенства сходится равномерно по $k \in S$. В силу (векторнозначного варианта) теоремы Вейерштрасса функция $f(k)$ аналитична и, следовательно, ограничена на множестве S, и для достаточно малых ε отображение $\varepsilon f(k)$ переводит S в себя. Сжимаемость отображения $\varepsilon f(k)$ вытекает из оценки

$$\varepsilon|f(k_1) - f(k_2)| = \varepsilon\Big|\int_{[k_1,k_2]} f'(\varkappa)d\varkappa\Big| \leqslant \varepsilon M|k_1 - k_2|,$$

где $k_1, k_2 \in S$, $M = \sup\limits_{\varkappa\in S}|f'(\varkappa)|$, поскольку для $\varepsilon < M^{-1}$ имеем $q = M\varepsilon < 1$.

Докажем формулу (2.9). Положим $k_0 = 0$, тогда первое приближение для решения уравнения $k = f(k)$ имеет вид

$$k_1 = \varepsilon f(0) = \tfrac{\varepsilon}{2}\big((1+\varepsilon A(0))^{-1}(\sqrt{V}), \overline{\sqrt{V}}\big) =$$

$$= \tfrac{\varepsilon}{2}(\sqrt{V}, \sqrt{V}) + o(\varepsilon) = \tfrac{\varepsilon v}{2} + o(\varepsilon).$$

Пусть k – решение уравнения (2.12). В силу известной формулы для погрешности

$$|k - k_1| \leqslant \tfrac{q}{1-q}\,|k_1 - k_0| = o(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$k = k_1 + o(\varepsilon) = \tfrac{\varepsilon v}{2} + o(\varepsilon). \tag{2.14}$$

Отсюда

$$E = 2\sqrt{1+k^2} = \pm 2\big(1 + \tfrac{\varepsilon^2 v^2}{8} + o(\varepsilon^2)\big) = \pm\big(2 + \tfrac{\varepsilon^2 v^2}{4} + o(\varepsilon^2)\big),$$

причем в силу равенства $\sqrt{E^2 - 4} = 2k$ и (2.14) $v > 0$ отвечает первому листу функции Грина G (собственному значению), а $v < 0$ – второму листу (резонансу), поскольку в силу (2.2) и соответственно экспоненциального убывания (возрастания) функции Грина решение $x(n)$ также будет экспоненциально убывать (возрастать).

З а м е ч а н и е 2.1. Из доказательства видно, что кратность уровня (т.е. размерность пространства решений уравнения (2.3)) равна единице.

Список литературы

1. Цикон Х., Фрезе Р., Кирш В., Саймон Б. Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990. 408 с.
2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 360 с.

3. Damanik D., Hundertmark D., Killip R., Simon B. Variational estimates for discrete Schrödinger operators with potentials of indefinite sign. Preprint mp_arc 02-451.
4. Лакаев С.Н., Муминов М.Э. Существенный и дискретный спектр трехчастичного оператора Шредингера на решетке // Теор. и матем. физика. Т.135, Ѓ3. С. 478–503.
5. Гейлер В.А. Двумерный оператор Шредингера с однородным магнитным полем и его возмущения периодическими потенциалами нулевого радиуса // Алгебра и анализ. 1991. Т.3, Ѓ3. С. 1–48.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 432 с.
7. Чубурин Ю.П. О малых возмущениях оператора Шредингера с периодическим потенциалом // Теор. и матем. физика. Т. 110, Ѓ3. С. 443–453.
8. Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1966. 340 с.