Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2004. №2(30)

УДК 517.934

© **А.И. Благодатских**

aiblag@glazov.net

УКЛОНЕНИЕ ЖЕСТКО СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Ключевые слова: групповое преследование, убегание, уклонение от встречи, фазовые ограничения.

Abstract. On the pursuit problem of the hardunited evader group the control which ensures the evasion of the meeting is construct.

Введение

Рассматривается задача преследования группы безынерционных убегающих группой инерционных преследователей при условии, что динамические возможности преследователей превосходят динамические возможности убегающих. Предполагается, что все убегающие используют одинаковое управление, которое формируется в каждый момент времени с учетом текущих позиций участников и фазового ограничения на траектории убегающих. Для данной задачи построено кусочно-постоянное управление, обеспечивающее уклонение от группы преследователей всех убегающих.

Близкие задачи, без фазовых ограничений и с одним убегающим, рассматривались Н.Ю. Сатимовым, Б.Б. Рихсиевым [1,2].

Случай l-поимки $(l > 0)$ одного убегающего группой преследователей, управляемых по ускорению без фазовых ограничений, рассматривался А.А. Чикрием [3], Н.Л. Григоренко [4].

1. Постановка задачи

В пространстве $R^\nu(\nu \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Движения каждого из преследователей P_i описывается уравнением

$$x_i^{(n_i)} = u_i, \ \|u_i\| \leqslant 1, \ n_i \geqslant 2. \tag{1.1}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = v, \ \|v\| \leqslant \gamma, \ \gamma \in (0,1). \tag{1.2}$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v \in R^\nu$. При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i(0) = x_{i,0}^0, \dot{x}_i(0) = x_{i,1}^0, \ldots, x_i^{(n_i-1)}(0) = x_{i,n_i-1}^0, \ y_j(0) = y_j^0,$$

причем $x_{i,0}^0 \neq y_j^0$ для всех i, j.

Здесь и далее, если не оговорено специально,

$$i = 1, 2, \ldots, n, \ j = 1, 2, \ldots, m, \ \alpha = 1, 2.$$

Обозначим $\mathfrak{D}(\mathrm{O}, \mathrm{R})$ шар с центром в точке O радиусом R.

Дополнительно предполагается, что убегающий E_j не покидает пределы шара $\mathfrak{D}(y_j^0, r_0)$, где r_0 положительное число.

О п р е д е л е н и е 1.1. Управления $u_i(t), v(t)$ из класса измеримых функций, удовлетворяющие соответственно ограничениям из (1.1), (1.2), называются **допустимыми**.

О п р е д е л е н и е 1.2. В игре Γ происходит **уклонение от встречи**, если для любых допустимых управлений $u_i(t)$ найдется допустимое управление

$$v(t) = v\left(t, x_i(t), \dot{x}_i(t), \ldots, x_i^{(n_i-1)}(t), y_j(t)\right)$$

такое, что $x_i(t) \neq y_j(t)$ и $y_j(t) \in \mathfrak{D}(y_j^0, r_0)$ для всех $t \in [0, \infty)$.

Отметим, что действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который в каждый момент времени $t \geqslant 0$ по величинам $\left\{x_i(t), \dot{x}_i(t), \ldots, x_i^{(n_i-1)}(t), y_j(t)\right\}$ для всех убегающих E_j выбирает одно и то же управление $v(t)$.

2. Уклонение в конусе

В отличие от определения 1.2 предположим, что убегающий E_j не покидает пределы конуса:

$$C_j = \{z \in R^\nu : \langle z - z_j, e\rangle = 0, \|z - z_j\| \leqslant a\mathrm{tg}\theta, z_j = y_j^0 + ae, a \geqslant 0\},$$

где e – единичный вектор пространства R^ν, $\theta \in (0, \pi/2)$.

Определение 2.1. В игре Γ происходит **уклонение в конусе**, если для любых допустимых управлений $u_i(t)$ найдется допустимое управление

$$v(t) = v\left(t, x_i(t), \dot{x}_i(t), \ldots, x_i^{(n_i-1)}(t), y_j(t)\right)$$

такое, что $x_i(t) \neq y_j(t)$ и $y_j(t) \in C_j$ для всех $t \in [0, \infty)$.

2.1. Случай $\mathbf{m = 1}$

Построим допустимое управление $v(t)$, обеспечивающее уклонение в конусе из любых начальных позиций в задаче с одним убегающим E_1.

Из возможности уклонения в конусе для $\nu = 2$, то есть на плоскости, следует возможность уклонения в конусе и при $\nu > 2$. Действительно, если $\nu > 2$, тогда выберем произвольную плоскость Π, включающую в себя вектор $y_1^0 + e$, такую, что ни для какой начальной позиции x_i^0 ее проекция на плоскость Π не совпадает с начальной позицией y_1^0. Такая плоскость найдется в силу конечности числа преследователей n. Если задача уклонения в конусе от проекций разрешима, то тем самым разрешима и исходная задача. Далее считаем $\nu = 2$.

Выбираем единичный вектор $\tilde{e}$, перпендикулярный e, против часовой стрелки. По $e, \tilde{e}$ как по орт-векторам получаем декартову систему координат.

В выбранной системе координат введем обозначения:

$$x_i^{(s)}(t) = \left(\begin{array}{c} x_i^{1(s)}(t) \\ x_i^{2(s)}(t) \end{array} \right), s = 0, 1, \ldots, n_i - 1, u_i(t) = \left(\begin{array}{c} u_i^1(t) \\ u_i^2(t) \end{array} \right),$$

$$y_1(t) = \left(\begin{array}{c} y_1^1(t) \\ y_1^2(t) \end{array} \right), v(t) = \left(\begin{array}{c} v^1(t) \\ v^2(t) \end{array} \right).$$

Пусть $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Для всех $t \in [0, \infty)$ определим функции $l^\alpha(t) = l^\alpha(t, y_1^\alpha(t), x_i^\alpha(t))$ – количество $\beta \in I : x_\beta^\alpha(t) < y_1^\alpha(t)$, $q^\alpha(t) = q^\alpha(t, y_1^\alpha(t), x_i^\alpha(t))$ – количество $\beta \in I : x_\beta^\alpha(t) = y_1^\alpha(t)$. Кроме того, $\delta^2 = 0$ и ρ^1, ρ^2, δ^1 положительные константы:

$$\sqrt{(\delta^1 + 2\rho^1 n)^2 + (2\rho^2 n)^2} \leqslant \gamma, \quad 2\rho^2 n / \delta^1 \leqslant \mathrm{tg}\theta. \tag{2.1}$$

Например:

$$\delta^1 = \gamma / \sqrt{4 + \mathrm{tg}^2\theta}, \ \ \rho^1 = \delta^1/(2n), \ \ \rho^2 = \delta^1 \mathrm{tg}\theta/(2n),$$

при этом ρ^1, ρ^2, δ^1 положительны и условие (2.1) выполнено.

Л е м м а 2.1. *Для любых* $c > 0$, d, b_1, $b_2, \ldots, b_k \in R^1, k \geqslant 1$

$$\max_{a \in \Omega} \min\{|a - b_1|, \ldots, |a - b_k|\} \geqslant c,$$

где

$$\Omega = \{d + 2cs, s = 0, 1, \ldots, k\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем любое $s \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}$. Предположим, что найдется номер $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$ такой, что

$$|(d + 2cs) - b_r| < c.$$

Для всех $a \in \Omega \backslash \{d + 2cs\}$ выполнено неравенство

$$|(d + 2cs) - a| \geqslant 2c, \text{ откуда } |a - b_r| > c.$$

Пусть лемма неверна, значит, выполнено следующее условие: существуют

$$c > 0,\ d,\ b_1,\ b_2, \ldots, b_k \in R^1,\ k \geqslant 1$$

такие, что

$$\max_{a\in\Omega} \min\{|a-b_1|, \ldots, |a-b_k|\} < c,$$

откуда следует, что для каждого $s \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}$ найдется номер $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$ такой, что $|(d+2cs) - b_r| < c$. Выше показано, что одному такому r может соответствовать не более одного s. При этом s принимает $k+1$ значение, r – ровно k, поэтому существует, по крайней мере, одно значение $s^* \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}$ такое, что $|(d+2cs^*) - b_r| \geqslant c$ для всех $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Для каждого $\tau \in [0, \infty)$ определим множество

$$\Omega^\alpha(\tau) = \{\delta^\alpha + 2\rho^\alpha l^\alpha(\tau) + 2\rho^\alpha s, s = 0, 1, \ldots, q^\alpha(\tau)\}$$

и величину $\omega^\alpha(\tau) \in \Omega^\alpha(\tau)$ следующим образом:
если $q^\alpha(\tau) = 0$, тогда $\omega^\alpha(\tau) = \delta^\alpha + 2\rho^\alpha l^\alpha(\tau)$;
если $q^\alpha(\tau) \geqslant 1$, тогда $\omega^\alpha(\tau)$ определяется из условия

$$\min\{|\omega^\alpha(\tau) - \dot{x}^\alpha_{\beta_1}(\tau)|, \ldots, |\omega^\alpha(\tau) - \dot{x}^\alpha_{\beta_{q^\alpha(\tau)}}(\tau)|\} =$$

$$= \max_{g\in\Omega^\alpha(\tau)} \min\{|g - \dot{x}^\alpha_{\beta_1}(\tau)|, \ldots, |g - \dot{x}^\alpha_{\beta_{q^\alpha(\tau)}}(\tau)|\} \geqslant \rho^\alpha. \qquad (2.2)$$

Здесь $x^\alpha_{\beta_s}(\tau) = y^\alpha_1(\tau)$, $\beta_s \in I$, $s = 1, 2, \ldots, q^\alpha(\tau)$.

Неравенство в (2.2) следует из леммы 2.1, если положить

$$c = \rho^\alpha,\ d = \delta^\alpha + 2\rho^\alpha l^\alpha(\tau),\ k = q^\alpha(\tau),$$

$$b_s = \dot{x}^\alpha_{\beta_s}(\tau),\ s = 1, 2, \ldots, q^\alpha(\tau).$$

Для определенности: если существует несколько значений $\omega^\alpha(\tau)$, то возьмем максимальное из них.

Таким образом, для каждого $\tau \in [0,\infty)$ величина $\omega^\alpha(\tau)$ определена однозначно и

$$\omega^\alpha(\tau) \in \Omega_*^\alpha = \{\delta^\alpha + 2\rho^\alpha s,\ s = 0,1,\ldots,n\}. \tag{2.3}$$

Л е м м а 2.2. *Для любых $t \geqslant 0$ и $T > 0$ область достижимости P_i в момент $t+T$ совпадает с множеством*

$$\mathfrak{D}\left(\sum_{s=0}^{n_i-1} \frac{x_i^{(s)}(t)T^s}{s!}, \frac{T^{n_i}}{n_i!}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегрируя уравнение (1.1) на интервале $[t, t+T]$, получим справедливость утверждения леммы. Лемма доказана.

Для каждого $t \in [0,\infty)$ определим функции $T_i^\alpha(t) \geqslant 0$ как время, через которое впервые могут совпасть α координаты P_i и E_1, то есть может выполниться равенство

$$x_i^\alpha(t + T_i^\alpha(t)) = y_1^\alpha(t + T_i^\alpha(t))$$

при условии, что $v^\alpha(\tau) = v^\alpha(t)$ для всех $\tau \in [t,\infty]$. При этом возможны три случая:

1) $y_1^\alpha(t) < x_i^\alpha(t)$. Из (1.1), (1.2) и леммы 2.2 получим, что $T_i^\alpha(t)$ есть наименьшее положительное решение уравнения

$$y_1^\alpha(t) + v^\alpha(t)T_i^\alpha(t) = \sum_{s=0}^{n_i-1} \frac{x_i^{\alpha(s)}(t)(T_i^\alpha(t))^s}{s!} - \frac{(T_i^\alpha(t))^{n_i}}{n_i!};$$

2) $y_1^\alpha(t) > x_i^\alpha(t)$. Тогда $T_i^\alpha(t)$ есть наименьшее положительное решение

$$y_1^\alpha(t) + v^\alpha(t)T_i^\alpha(t) = \sum_{s=0}^{n_i-1} \frac{x_i^{\alpha(s)}(t)(T_i^\alpha(t))^s}{s!} + \frac{(T_i^\alpha(t))^{n_i}}{n_i!};$$

3) $x_i^\alpha(t) = y_1^\alpha(t)$. Положим $T_i^\alpha(t) = 0$.

Таким образом, $T_i^\alpha(t)$ определяется для всех $t \in [0, \infty)$ как минимальный неотрицательный корень многочлена

$$\frac{(T_i^\alpha(t))^{n_i}}{n_i!}\operatorname{sign}(x_i^\alpha(t) - y_1^\alpha(t)) - \sum_{s=2}^{n_i-1} \frac{x_i^{\alpha(s)}(t)(T_i^\alpha(t))^s}{s!} - \qquad (2.4)$$
$$-(\dot{x}_i^\alpha(t) - v^\alpha(t))T_i^\alpha(t) - (x_i^\alpha(t) - y_1^\alpha(t)) = 0,$$

который существует, так как данное уравнение при всех $t \in [0, \infty)$ представимо в виде

$$z^{n_i} + c_1 z^{n_i-1} + \cdots + c_{n_i-1}z = c_{n_i}, \text{ где } c_{n_i} \geqslant 0.$$

Пусть

$$T^\alpha(t) = \min\{T_1^\alpha(t), T_2^\alpha(t), \ldots, T_n^\alpha(t)\}. \qquad (2.5)$$

Для всех $t \in [0, \infty)$ определим функции

$$K_i^\alpha(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } y_1^\alpha(t) < x_i^\alpha(t) \text{ и} \\ & \displaystyle\sum_{s=0}^{n_i-1} \frac{x_i^{\alpha(s)}(t)(T_i^\alpha(t))^s}{s!} + \frac{(T_i^\alpha(t))^{n_i}}{n_i!} \leqslant \\ & \leqslant y_1^\alpha(t) + (v^\alpha(t) + \rho^\alpha/8)T_i^\alpha(t); \\ -1, & \text{если } y_1^\alpha(t) > x_i^\alpha(t) \text{ и} \\ & \displaystyle\sum_{s=0}^{n_i-1} \frac{x_i^{\alpha(s)}(t)(T_i^\alpha(t))^s}{s!} - \frac{(T_i^\alpha(t))^{n_i}}{n_i!} \geqslant \\ & \geqslant y_1^\alpha(t) + (v^\alpha(t) - \rho^\alpha/8)T_i^\alpha(t); \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (2.6)$$

Л е м м а 2.3. *Пусть убегающий E_1 использует произвольное постоянное управление. Тогда для любого допустимого управления преследователя P_i справедливы следующие утверждения:*

1) если для $t > 0$ и некоторого $\sigma > 0$

$$y_1^\alpha(\tau) < x_i^\alpha(\tau) \ \left\{y_1^\alpha(\tau) > x_i^\alpha(\tau)\right\},\ \tau \in [t - \sigma, t),\ y_1^\alpha(t) = x_i^\alpha(t),$$

$$y_1^{\widehat{\alpha}}(\tau) \neq x_i^{\widehat{\alpha}}(\tau),\ \tau \in [t-\sigma, t],\ \widehat{\alpha} \in \{1,2\} \backslash \{\alpha\},$$

то найдется $\varepsilon \in (0, \sigma]$ *такое, что*

$$K_i^{\alpha}(\tau) = 1 \ \left\{K_i^{\alpha}(\tau) = -1\right\},\ T_i^{\widehat{\alpha}}(\tau) > T_i^{\alpha}(\tau),\ \tau \in [t-\varepsilon, t);$$

2) если для $t > 0$ *и некоторого* $\sigma > 0$

$$y_1^1(\tau) \neq x_i^1(\tau),\ y_1^2(\tau) \neq x_i^2(\tau),\ \tau \in [t-\sigma, t),\ y_1(t) = x_i(t),$$

то найдется $\varepsilon \in (0, \sigma]$, *что будет выполнено хотя бы одно условие:*

$$K_i^1(\tau) \neq 0,\ T_i^2(\tau) \geqslant T_i^1(\tau),\ \tau \in [t-\varepsilon, t) \text{ или}$$
$$K_i^2(\tau) \neq 0,\ T_i^1(\tau) \geqslant T_i^2(\tau),\ \tau \in [t-\varepsilon, t).$$

Доказательство. Из (2.4) и условий леммы следует непрерывность функций $T_i^1(\tau),\ T_i^2(\tau)$ для всех $\tau \in [0, \infty)$.

1. Пусть

$$y_1^{\alpha}(\tau) < x_i^{\alpha}(\tau),\ y_1^{\widehat{\alpha}}(\tau) \neq x_i^{\widehat{\alpha}}(\tau),\ \tau \in [t-\sigma, t),$$
$$y_1^{\alpha}(t) = x_i^{\alpha}(t),\ y_1^{\widehat{\alpha}}(t) \neq x_i^{\widehat{\alpha}}(t),$$

в этом случае

$$T_i^{\alpha}(t) = 0,\ T_i^{\widehat{\alpha}}(t) > 0.$$

Учитывая непрерывность: существует $\varepsilon \in (0, \sigma]$ такое, что

$$T_i^{\widehat{\alpha}}(\tau) > T_i^{\alpha}(\tau),\ \frac{(T_i^{\alpha}(\tau))^{n_i-1}}{n_i!} \leqslant \rho^{\alpha}/16,\ \tau \in [t-\varepsilon, t).$$

Из (2.6) следует, что $K_i^{\alpha}(\tau) = 1,\ \tau \in [t-\varepsilon, t)$, если

$$\sum_{s=0}^{n_i-1} \frac{x_i^{\alpha(s)}(\tau)(T_i^{\alpha}(\tau))^s}{s!} + \frac{(T_i^{\alpha}(\tau))^{n_i}}{n_i!} \leqslant y_1^{\alpha}(\tau) + (v^{\alpha}(\tau) + \rho^{\alpha}/8)T_i^{\alpha}(\tau),$$

что эквивалентно неравенству

$$\left[\Big(y_1^\alpha(\tau)+v^\alpha(\tau)T_i^\alpha(\tau)\Big)-\Big(\sum_{s=0}^{n_i-1}\frac{x_i^{\alpha(s)}(\tau)(T_i^\alpha(\tau))^s}{s!}-\frac{(T_i^\alpha(\tau))^{n_i}}{n_i!}\Big)\right]+$$

$$+\left[2\Big(\rho^\alpha/16-\frac{(T_i^\alpha(\tau))^{n_i-1}}{n_i!}\Big)T_i^\alpha(\tau)\right]\geqslant 0,$$

которое справедливо, так как первое слагаемое равно нулю в силу определения функции $T_i^\alpha(\tau)$, а второе неотрицательно в силу выбору ε.

Случай

$$y_1^\alpha(\tau)>x_i^\alpha(\tau),\ y_1^{\widehat{\alpha}}(\tau)\neq x_i^{\widehat{\alpha}}(\tau),\ \tau\in[t-\sigma,t),$$
$$y_1^\alpha(t)=x_i^\alpha(t),\ y_1^{\widehat{\alpha}}(t)\neq x_i^{\widehat{\alpha}}(t)$$

рассматривается аналогично. Утверждение 1 леммы доказано.

2. Здесь

$$y_1^1(\tau)\neq x_i^1(\tau),\ y_1^2(\tau)\neq x_i^2(\tau),\ \tau\in[t-\sigma,t),\ y_1(t)=x_i(t),$$

поэтому

$$T_i^1(t)>0,\ T_i^2(t)>0,\ \tau\in[t-\sigma,t),\ T_i^1(t)=T_i^2(t)=0.$$

Учитывая непрерывность: существует $\varepsilon\in(0,\sigma]$ такое, что

$$\sqrt[n_i-1]{\frac{\rho^\alpha n_i!}{16}}\geqslant T_i^2(\tau)\geqslant T_i^1(\tau),\ \tau\in[t-\varepsilon,t)\text{ или}$$

$$\sqrt[n_i-1]{\frac{\rho^\alpha n_i!}{16}}\geqslant T_i^1(\tau)\geqslant T_i^2(\tau),\ \tau\in[t-\varepsilon,t).$$

Аналогично утверждению 1 для такого ε доказывается, что

$$K_i^1(\tau)\neq 0 \text{ и } K_i^2(\tau)\neq 0,\ \tau\in[t-\varepsilon,t).$$

Утверждение 2 леммы доказано.

Лемма доказана.

Для всех $t \geqslant 0$ определим функции

$$B_i^1(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } K_i^1(t) \neq 0,\ T_i^2(t) \geqslant T_i^1(t) = T^1(t), \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \tag{2.7}$$

$$B_i^2(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } K_i^2(t) \neq 0,\ T_i^1(t) \geqslant T_i^2(t) = T^2(t) \text{ и} \\ & B_\beta^1(t) = 0 \text{ для всех } \beta \in I, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.8}$$

Отметим, что невозможно выполнение равенства

$$B_{\beta_1}^1(t) = B_{\beta_2}^2(t) = 1 \text{ для любых } \beta_1, \beta_2 \in I \text{ и } t \geqslant 0.$$

Определяем $v(t)$ следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l}
0)\qquad v^\alpha(t) = \omega^\alpha(\tau_0^\alpha),\ t \in [\tau_0^\alpha, \tau_1^\alpha), \\
\tau_1^\alpha \geqslant \tau_0^\alpha \text{ – момент, когда впервые, хотя бы для} \\
\text{одного } \beta \in I,\ B_\beta^\alpha(\tau_1^\alpha) = 1 \text{ и } v^{\widehat{\alpha}}(\tau_1^\alpha) \in \Omega_*^{\widehat{\alpha}}; \\
\qquad v^\alpha(t) = \omega^\alpha(\tau_1^\alpha) + K_{\widehat{\beta}}^\alpha(\tau_1^\alpha)\rho^\alpha/4,\ t \in [\tau_1^\alpha, \tau_2^\alpha), \\
\widehat{\beta} \text{ – минимальный из } \beta \in I : B_\beta^\alpha(\tau_1^\alpha) = 1, \\
\tau_2^\alpha > \tau_1^\alpha \text{ – момент, когда впервые, хотя бы для} \\
\text{одного } \beta \in I,\ y_1^\alpha(\tau_2^\alpha) = x_\beta^\alpha(\tau_2^\alpha); \\
p)\qquad v^\alpha(t) = \omega^\alpha(\tau_{2p}^\alpha),\ t \in [\tau_{2p}^\alpha, \tau_{2p+1}^\alpha), \\
\tau_{2p+1}^\alpha \geqslant \tau_{2p}^\alpha \text{ – момент, когда впервые, хотя бы для} \\
\text{одного } \beta \in I,\ B_\beta^\alpha(\tau_{2p+1}^\alpha) = 1 \text{ и } v^{\widehat{\alpha}}(\tau_{2p+1}^\alpha) \in \Omega_*^{\widehat{\alpha}}; \\
\qquad v^\alpha(t) = \omega^\alpha(\tau_{2p+1}^\alpha) + K_{\widehat{\beta}}^\alpha(\tau_{2p+1}^\alpha)\rho^\alpha/4, \\
\qquad\qquad t \in [\tau_{2p+1}^\alpha, \tau_{2p+2}^\alpha), \\
\widehat{\beta} \text{ – минимальный из } \beta \in I : B_\beta^\alpha(\tau_{2p+1}^\alpha) = 1, \\
\tau_{2p+2}^\alpha > \tau_{2p+1}^\alpha \text{ – момент, когда впервые, хотя бы} \\
\text{для одного } \beta \in I,\ y_1^\alpha(\tau_{2p+2}^\alpha) = x_\beta^\alpha(\tau_{2p+2}^\alpha).
\end{array}\right\} \tag{2.9}$$

В формуле (2.9) $\tau_0^\alpha = 0$, $\widehat{\alpha} \in \{1,2\} \setminus \{\alpha\}$, $p = 1, 2, \ldots$

Далее в этом пункте считаем, что $v(t)$ и $\{\tau_p^\alpha\}_{p=0}^{p^\alpha}$ определены по (2.9), при этом либо $p^\alpha < \infty$, либо $p^\alpha = \infty$.

Л е м м а 2.4. *Для любого набора допустимых управлений $u_i(t)$ преследователей P_i выполнено следующее:*

1) если $p^1 \geqslant 2$ и $p^2 \geqslant 2$, тогда $\{\tau^1_{2p}\}_{p=1}^{p^1 \div 2} \bigcap \{\tau^2_{2p}\}_{p=1}^{p^2 \div 2} = \emptyset$;

2) если $p^\alpha \geqslant 2$, тогда $y_1^\alpha(t) \neq x_i^\alpha(t)$ для всех $t \in (\tau^\alpha_{2p}, \tau^\alpha_{2p+2})$ и $p = 0, 1, \ldots, p^\alpha \div 2 - 1$;

3) $v^\alpha(\tau) \in [\delta^\alpha, \delta^\alpha + 2\rho^\alpha n]$, $\tau \in \{\tau^\alpha_p\}_{p=0}^{p^\alpha}$.

Под знаком $\div$ понимается деление нацело.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Из (2.9) следует, что

$$\tau^1_{2p+1} \neq \tau^2_{2r+1} \text{ для всех } p, r \geqslant 0,$$

при которых $\tau^1_{2p+1}, \tau^2_{2r+1}$ определены, так как, учитывая (2.8), невозможно выполнить равенства

$$B^1_{\beta_1}(t) = B^2_{\beta_2}(t) = 1 \text{ для любых } \beta_1, \beta_2 \in I \text{ и } t \geqslant 0.$$

Пусть наступил момент τ^1_{2p+1}, тогда, следуя (2.3), (2.6), (2.9),

$$v^1(t) = v^1(\tau^1_{2p}) \pm \rho^1/4 \notin \Omega^1_*, \; t \in (\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}),$$

отсюда и из сказанного выше

$$\tau^2_{2r+1} \notin [\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}), \; v^2(t) = v^2(\tau^1_{2p+1}), \; t \in (\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}).$$

Объединяя

$$\begin{cases} v^1(t) = v^1(\tau^1_{2p+1}) + K^1_{\overline{\beta}}(\tau^1_{2p+1})\rho^1/4 \\ v^2(t) = v^2(\tau^1_{2p+1}) \end{cases}, \; t \in (\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}),$$

откуда, применяя (2.6), (2.7) и лемму 2.2, получаем систему

$$\begin{cases} \tau^1_{2p+2} \in (\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+1} + T^1(\tau^1_{2p+1})), \\ T^2(\tau^1_{2p+1}) \geqslant T^1(\tau^1_{2p+1}), \end{cases}$$

из которой следует, что

$$y_1^2(t) \neq x_i^2(t), \; t \in [\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}], \text{ и } \; \tau^2_{2r} \notin [\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}].$$

Пусть наступил момент времени τ^2_{2r+1}, аналогично получим

$$y^1_1(t) \neq x^1_i(t),\ t \in [\tau^2_{2r+1}, \tau^2_{2r+2}], \text{ и } \tau^1_{2p} \notin [\tau^2_{2r+1}, \tau^2_{2r+2}].$$

Таким образом, утверждение 1 доказано.

2. Докажем, что

$$y^1_1(t) \neq x^1_i(t),\ t \in (\tau^1_{2p}, \tau^1_{2p+2}).$$

Из леммы 2.3

$$y^1_1(t) \neq x^1_i(t),\ t \in (\tau^1_{2p}, \min\{\tau^1_{2p+1}, \tau^2_{2r+1}\}).$$

Если $\min\{\tau^1_{2p+1}, \tau^2_{2r+1}\} = \tau^1_{2p+1}$, тогда утверждение выполнено.

Пусть $\min\{\tau^1_{2p+1}, \tau^2_{2r+1}\} = \tau^2_{2r+1}$, в доказательстве первого утверждения данной леммы показано, что в этом случае

$$y^1_1(t) \neq x^1_i(t),\ t \in [\tau^2_{2r+1}, \tau^2_{2(r+1)}].$$

Теперь, снова применяя лемму 2.3, получим

$$y^1_1(t) \neq x^1_i(t),\ t \in (\tau^2_{2(r+1)}, \min\{\tau^1_{2p+1}, \tau^2_{2(r+1)+1}\}).$$

Продолжая далее, получим, что для некоторого r'
$\min\{\tau^1_{2p+1}, \tau^2_{2(r+r')+1}\} = \tau^1_{2p+1}$ и утверждение выполнено.

Аналогично доказывается, что

$$y^2_1(t) \neq x^2_i(t),\ t \in (\tau^2_{2r}, \tau^2_{2r+2}).$$

Утверждение 2 доказано.

3. Из (2.3) и (2.9) следует, что

$$v^\alpha(\tau^\alpha_{2p}) \in \Omega^\alpha_* \subset [\delta^\alpha, \delta^\alpha + 2\rho^\alpha n],\ p = 0, 1, \dots, p^\alpha \div 2,$$

отсюда и из (2.9),

$$v^\alpha(\tau^\alpha_{2p+1}) = v^\alpha(\tau^\alpha_{2p}) \pm \rho^\alpha/4 \in [\delta^\alpha, \delta^\alpha + 2\rho^\alpha n],$$

если только

$$v^\alpha(\tau_{2p}^\alpha) \neq \delta^\alpha \text{ или } v^\alpha(\tau_{2p}^\alpha) \neq \delta^\alpha + 2\rho^\alpha n,$$

для всех p, для которых значение τ_{2p+1}^α существует.

Пусть $v^\alpha(\tau_{2p}^\alpha) = \delta^\alpha$, тогда из (2.2) и утверждения 2 этой леммы следует, что

$$y_1^\alpha(t) < x_i^\alpha(t),\ t \in (\tau_{2p}^\alpha, \tau_{2p+1}^\alpha],$$

откуда, применяя (2.6), (2.9), имеем

$$K_{\overline{\beta}}^\alpha(\tau_{2p+1}^\alpha) = 1 \text{ и } v^\alpha(\tau_{2p+1}^\alpha) = \delta^\alpha + \rho^\alpha/4 \in [\delta^\alpha, \delta^\alpha + 2\rho^\alpha n].$$

Случай $v^\alpha(\tau_{2p}^\alpha) = \delta^\alpha + 2\rho^\alpha n$ рассматривается аналогично и

$$K_{\overline{\beta}}^\alpha(\tau_{2p+1}^\alpha) = -1 \text{ и } v^\alpha(\tau_{2p+1}^\alpha) = \delta^\alpha + 2\rho^\alpha n - \rho^\alpha/4 \in [\delta^\alpha, \delta^\alpha + 2\rho^\alpha n].$$

Утверждение 3 доказано. Лемма доказана.

Докажем, что формула (2.9) определяет $v(t)$ для всех $t \geqslant 0$. Для этого достаточно показать, что имеет место следующая

Л е м м а 2.5. *При любых допустимых управлениях $u_i(t)$ преследователей P_i либо значение p^α конечно и $\tau_{p^\alpha}^\alpha = \infty$, либо $\lim\limits_{p\to\infty} \tau_p^\alpha = \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай $\alpha = 1$. Для каждого набора допустимых управлений $u_i(t)$ возможен один из двух случаев.

I. Формула (2.9) применяется конечное число раз, поэтому значение p^1 конечно и $\tau_{p^1}^1 = \infty$.

II. Формула (2.9) применяется бесконечное число раз. Требуется доказать, что полученная по ней последовательность

$$\{\tau_p^1\}_{p=0}^\infty : \lim_{p\to\infty} \tau_p^1 = \infty.$$

Предположим противное: существуют допустимые управления

$$u_i^*(t) : \lim_{p\to\infty} \tau_p^1 = \tau^* < \infty.$$

II.1. Рассмотрим числа $x_i^1(\tau^*)$. Пусть они принимают $r \in [1, n]$ попарно различных значений $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_r$. Считаем, что

$$x_1^1(\tau^*) = x_2^1(\tau^*) = \cdots = x_{s_1}^1(\tau^*) = \xi_1,$$
$$x_{s_1+1}^1(\tau^*) = x_{s_1+2}^1(\tau^*) = \cdots = x_{s_2}^1(\tau^*) = \xi_2, \ldots,$$
$$x_{s_{r-2}+1}^1(\tau^*) = x_{s_{r-2}+2}^1(\tau^*) = \cdots = x_{s_{r-1}}^1(\tau^*) = \xi_{r-1},$$
$$x_{s_{r-1}+1}^1(\tau^*) = x_{s_{r-1}+2}^1(\tau^*) = \cdots = x_n^1(\tau^*) = \xi_r.$$

Обозначим

$$S_k = \{s_{k-1}+1, s_{k-1}+2, \ldots, s_k\},\ k = 1, 2, \ldots, r\ (s_0 = 0, s_r = n)$$

и для каждого $\varepsilon \in [0, \tau^*]$ определим множества

$$\Xi_k(\varepsilon) = \bigcup_{s \in S_k} \left\{ z \in R^1 : z = x_s^1(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*] \right\},\ k = 1, 2, \ldots, r.$$

Пусть $G_1, G_2 \subset R^1$, положим

$$\operatorname{dist}(G_1, G_2) = \inf_{g_1 \in G_1, g_2 \in G_2} |g_1 - g_2|.$$

Для всех $\varepsilon \in [0, \tau^*]$ определим функции

$$h_{k,k+1}(\varepsilon) = \operatorname{dist}(\Xi_k(\varepsilon), \Xi_{k+1}(\varepsilon)),\ k = 1, 2, \ldots, r-1,$$
$$h(\varepsilon) = \min\left\{h_{1,2}(\varepsilon), h_{2,3}(\varepsilon), \ldots, h_{r-1,r}(\varepsilon)\right\},$$
$$H(\varepsilon) = h(\varepsilon) - 2(\delta^1 + 2\rho^1 n)\varepsilon.$$

В силу непрерывности H и условия $h(0) > 0$ получаем, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $H(\varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$. Отсюда

$$h(\varepsilon)/(\delta^1 + 2\rho^1 n) > 2\varepsilon \text{ для всех } \varepsilon \in [0, \varepsilon_1]. \tag{2.10}$$

II.2. Если S_k состоит из одного элемента, полагаем $\varepsilon_2^k = \infty$. Пусть $|S_k| \geqslant 2$ и $\beta_1, \beta_2 \in S_k$. Рассмотрим преследователей P_{β_1}, P_{β_2}. Отметим, что

$$x_{\beta_1}^1(\tau^*) = x_{\beta_2}^1(\tau^*) = \xi_k. \tag{2.11}$$

Разберем всевозможные случаи их взаимного расположения.

1. $\dot{x}^1_{\beta_1}(\tau^*) > \dot{x}^1_{\beta_2}(\tau^*)$. В силу непрерывности этих функций существует $\varepsilon > 0$, что

$$\dot{x}^1_{\beta_1}(t) > \dot{x}^1_{\beta_2}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*].$$

Кроме того, учитывая (2.11), имеем

$$x^1_{\beta_1}(t) < x^1_{\beta_2}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*).$$

2. $\dot{x}^1_{\beta_1}(\tau^*) < \dot{x}^1_{\beta_2}(\tau^*)$. Аналогично случаю 1 существует $\varepsilon > 0$, что

$$\dot{x}^1_{\beta_1}(t) < \dot{x}^1_{\beta_2}(t), x^1_{\beta_1}(t) > x^1_{\beta_2}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*).$$

3. $\dot{x}^1_{\beta_1}(\tau^*) = \dot{x}^1_{\beta_2}(\tau^*)$. Этот случай имеет несколько вариантов:

3.1) существует $\varepsilon > 0$, что

$$\dot{x}^1_{\beta_1}(t) = \dot{x}^1_{\beta_2}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*],$$

тогда и

$$x^1_{\beta_1}(t) = x^1_{\beta_2}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*];$$

3.2) существует $\varepsilon > 0$, что

$$\dot{x}^1_{\beta_1}(t) > \dot{x}^1_{\beta_2}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*),$$

тогда, подобно случаю 1,

$$x^1_{\beta_1}(t) < x^1_{\beta_2}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*);$$

3.3) существует $\varepsilon > 0$, что

$$\dot{x}^1_{\beta_1}(t) < \dot{x}^1_{\beta_2}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*),$$

тогда, подобно случаю 2,

$$x^1_{\beta_1}(t) > x^1_{\beta_2}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*).$$

Теперь, перебирая всех преследователей $P_s, s \in S_k$ попарно, как преследователей P_{β_1}, P_{β_2}, получим, что существует $\varepsilon_2^k > 0$ такое, что расположение $P_s, s \in S_k$ друг относительно друга не изменяется на $[\tau^* - \varepsilon_2^k, \tau^*)$, а это, без потери общности, означает:

$$\begin{array}{l} x^1_{s_{k-1}+1}(t)\{<=\}x^1_{s_{k-1}+2}(t)\ldots\{<=\}x^1_{s_k}(t) \\ \dot{x}^1_{s_{k-1}+1}(t)\{>=\}\dot{x}^1_{s_{k-1}+2}(t)\ldots\{>=\}\dot{x}^1_{s_k}(t) \end{array}, \ t \in [\tau^* - \varepsilon_2^k, \tau^*). \quad (2.12)$$

В (2.12) символы $\{<=\}$, $\{>=\}$ означают, что на всем промежутке $[\tau^* - \varepsilon_2^k, \tau^*)$ в первой строке формулы знак либо $<$, либо $=$, во второй строке знак $>$ соответствует знаку $<$ первой строки, знак $=$ соответствует $=$. Выбираем

$$\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon_2^1, \varepsilon_2^2, \ldots, \varepsilon_2^r\} > 0.$$

II.3. Из непрерывности $\dot{x}_i^1(t)$ следует существование $\varepsilon_3^i > 0$ такого, что

$$|\dot{x}_i^1(\tau^* - \varepsilon') - \dot{x}_i^1(\tau^* - \varepsilon'')| < \rho/4 \text{ для всех } \varepsilon', \varepsilon'' \in [0, \varepsilon_3^i). \quad (2.13)$$

Возьмем $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_3^1, \varepsilon_3^2, \ldots, \varepsilon_3^n\} > 0$.

II.4. Определим

$$\varepsilon^* = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} > 0. \quad (2.14)$$

Из предположения, что $\lim\limits_{p\to\infty} \tau_p^1 = \tau^*$, следует, что до момента $\tau^* - \varepsilon^* < \tau^*$ управление $v^1(t)$ определено и, кроме того, существует номер $\widehat{p}$ такой, что

$$\tau^1_{2\widehat{p}}, \tau^1_{2\widehat{p}+1}, \tau^1_{2\widehat{p}+2}, \dots \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*).$$

Рассмотрим игру Γ начиная с момента $\tau^* - \varepsilon^*$ и докажем, что найдется номер $p^* : \tau^1_{2(\widehat{p}+p^*)} > \tau^*$, в результате получим противоречие предположению о конечном значении $\lim\limits_{p\to\infty} \tau_p^1$, тем самым лемма будет доказана полностью.

Итак, момент $\tau^1_{2\widehat{p}} \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*)$. Необходимо

$$y^1_1(\tau^1_{2\widehat{p}}) \in \Xi_k(\varepsilon^*)$$

при некотором $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Напомним, что

$$x^1_s(t) \in \Xi_k(\varepsilon^*),\ t \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*],\ s \in S_k.$$

Существует хотя бы одно $\alpha_1 \in S_k$ такое, что

$$y^1_1(\tau^1_{2\widehat{p}}) = x^1_{\alpha_1}(\tau^1_{2\widehat{p}}).$$

Из (2.2) следует, что возможны два случая:
1) $v^1(\tau^1_{2\widehat{p}}) \geqslant \dot{x}^1_{\alpha_1}(\tau^1_{2\widehat{p}}) + \rho^1$ (α_1 - это один или несколько последовательных индексов из S_k). Следуя (2.9), получим

$$v^1(\tau^1_{2\widehat{p}}) - \rho^1/4 \leqslant v^1(\tau^1_{2\widehat{p}+1}) \leqslant v^1(\tau^1_{2\widehat{p}}) + \rho^1/4,$$

отсюда, учитывая (2.13), (2.14), имеем

$$v^1(t) > \dot{x}^1_{\alpha_1}(t) + \rho^1/2 \text{ для всех } t \in [\tau^1_{2\widehat{p}}, \tau^1_{2(\widehat{p}+1)}). \tag{2.15}$$

Преследователи P_i не меняют своего расположения относительно друг друга (2.12), поэтому в момент $\tau^1_{2(\widehat{p}+1)}$ должно выполнится одно из двух:
а) $y^1_1(\tau^1_{2(\widehat{p}+1)}) = x^1_{\alpha_1}(\tau^1_{2(\widehat{p}+1)})$, из (2.15) этот случай невозможен;
б) $y^1_1(\tau^1_{2(\widehat{p}+1)}) = x^1_{\alpha_2}(\tau^1_{2(\widehat{p}+1)})$, $\alpha_2 > \alpha_1$ (α_2 - один или несколько последовательных индексов из S_k). Рассмотрим систему

$$\begin{cases} |\dot{x}^1_{\alpha_2}(\tau^1_{2(\widehat{p}+1)}) - \dot{x}^1_{\alpha_2}(\tau^1_{2\widehat{p}+1})| < \rho^1/4, \\ v^1(\tau^1_{2\widehat{p}+1}) - \rho^1/2 > \dot{x}^1_{\alpha_1}(\tau^1_{2\widehat{p}+1}) > \dot{x}^1_{\alpha_2}(\tau^1_{2\widehat{p}+1}). \end{cases} \tag{2.16}$$

Справедливость первого неравенства следует из (2.13), (2.14), второй цепочки неравенств - из (2.15), (2.12). Из (2.16) получим, что

$$v^1(\tau^1_{2\widehat{p}+1}) > \dot{x}^1_{\alpha_2}(\tau^1_{2(\widehat{p}+1)}) + \rho^1/4.$$

Поэтому $v^1(\tau^1_{2(\widehat{p}+1)})$ по (2.9) будет определено так, что

$$v^1(\tau^1_{2(\widehat{p}+1)}) \geqslant \dot{x}^1_{\alpha_2}(\tau^1_{2(\widehat{p}+1)}) + \rho^1.$$

Продолжая далее, получим, что существует момент $\tau^1_{2(\widehat{p}+p')}$ такой, что

$$y^1_1(\tau^1_{2(\widehat{p}+p')}) = x^1_{s_k}(\tau^1_{2(\widehat{p}+p')}), \quad v^1(\tau^1_{2(\widehat{p}+p')}) \geqslant \dot{x}^1_{s_k}(\tau^1_{2(\widehat{p}+p')}) + \rho^1. \quad (2.17)$$

Из (2.17) получаем, что

$$x^1_s(t) < y^1_1(t), \ t \in (\tau^1_{2(\widehat{p}+p')}, \tau^*], \ s \in S_k.$$

Значит, чтобы $\tau^1_{2(\widehat{p}+p'+1)} \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*)$, необходимо выполнение равенства

$$y^1_1(\tau^1_{2(\widehat{p}+p'+1)}) = x^1_\beta(\tau^1_{2(\widehat{p}+p'+1)}), \ \beta \in I \backslash S_k,$$

это означает, что первая координата убегающего E_1 из множества $\Xi_k(\varepsilon^*)$ должна попасть в множество $\Xi_{k+1}(\varepsilon^*)$. Из (2.10), (2.14) на это потребуется времени, даже при максимальной по лемме 2.4 скорости $\delta^1 + 2\rho^1 n$, больше чем $2\varepsilon^*$, откуда

$$\tau^1_{2(\widehat{p}+p'+1)} - \tau^1_{2(\widehat{p}+p')} > 2\varepsilon^*.$$

Итак, в этом случае показано, что существует $p^* = p' + 1$: $\tau^1_{2(\widehat{p}+p^*)} > \tau^*$;

2) $v^1(\tau^1_{2\widehat{p}}) \leqslant \dot{x}^1_{\alpha_1}(\tau^1_{2\widehat{p}}) - \rho^1$. Как и в случае 1, доказывается, что существует момент $\tau^1_{2(\widehat{p}+p'')}$ такой, что

$$y^1_1(t) < x^1_s(t), \text{ для всех } t \in (\tau^1_{2(\widehat{p}+p'')}, \tau^*], \ s \in S_k.$$

Далее, чтобы $\tau^1_{2(\widehat{p}+p''+1)} \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*)$, необходимо выполнение равенства

$$y^1_1(\tau^1_{2(\widehat{p}+p''+1)}) = x^1_\beta(\tau^1_{2(\widehat{p}+p''+1)}), \ \beta \in I \backslash S_k,$$

это означает, что первая координата убегающего E_1 из множества $\Xi_k(\varepsilon^*)$ должна попасть в множество $\Xi_{k-1}(\varepsilon^*)$, но это невозможно, так как минимальная по лемме 2.4 скорость убегающего $\delta^1 \geqslant 0$. Следовательно, существует $p^* = p'' + 1 : \tau^1_{2(\widehat{p}+p^*)} > \tau^*$.

Случай $\alpha = 2$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Из леммы 2.4 и леммы 2.5 следует, что определенные по (2.9) функции $v^\alpha(t)$ такие, что

$$v^\alpha(t) \in [\delta^\alpha, \delta^\alpha + 2\rho^\alpha n] \text{ для всех } t \in [0, \infty). \tag{2.18}$$

Таким образом, полностью определена стратегия убегающего E_1: в каждый момент времени $t \geqslant 0$ убегающий E_1 по (2.9) определяет $v^1(t)$ и $v^2(t)$, тем самым полностью задает свое управление $v(t)$.

Т е о р е м а 2.1. *В игре* Γ *при* $m = 1$ *происходит уклонение в конусе из любых начальных позиций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что стратегия убегающего такова, что

1) управление $v(t)$, $t \in [0, \infty)$ является допустимым;
2) $y_1(t) \in C_1$ для всех $t \in [0, \infty)$;
3) $x_i(t) \neq y_1(t)$ для всех $t \in [0, \infty)$.

1. Управление $v(t)$, $t \in [0, \infty)$ из класса кусочно-постоянных функций и меняет свое значение в моменты $\tau \in \{\tau^1_p\}^{p^1}_{p=0} \bigcup \{\tau^2_p\}^{p^2}_{p=0}$. В силу (2.18), (2.1)

$$\|v(t)\| = \sqrt{(v^1(t))^2 + (v^2(t))^2} \leqslant \sqrt{(\delta^1 + 2\rho^1 n)^2 + (2\rho^2 n)^2} \leqslant \gamma.$$

Из определения 1.1 заключаем, что управление $v(t)$ допустимо.
2. Применяя (2.18) и (2.1) получим, что

$$v^2(t)/v^1(t) \leqslant 2\rho^2 n/\delta^1 \leqslant \mathrm{tg}\theta,$$

откуда $v^2(t) \leqslant v^1(t)\mathrm{tg}\theta$ для всех $t \in [0, \infty)$. Из последнего неравенства следует справедливость утверждения.

3. Справедливость следует из леммы 2.4 и леммы 2.5.
Эти три утверждения полностью доказывают теорему. Теорема доказана.

2.2. Случай m $\geqslant 2$

На основе стратегии уклонения в конусе для одного убегающего построим стратегию уклонения в конусе для группы жестко скоординированных убегающих.

Т е о р е м а 2.2. *В игре* Γ *происходит уклонение в конусе из любых начальных позиций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В пространстве R^ν определим вспомогательную игру Γ_1 $nm+1$ лиц: nm преследователей P_i^j и убегающего E. Закон движения каждого из преследователей P_i^j имеет вид

$$x_{ij}^{(n_i)} = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1.$$

Движение убегающего E описывается уравнением вида

$$\dot{y} = v_1, \quad \|v_1\| \leqslant \gamma.$$

При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_{ij}(0) = x_{i,0}^0 - y_j^0,\ \dot{x}_{ij}(0) = x_{i,1}^0, \ldots, x_{ij}^{(n_i-1)}(0) = x_{i,n_i-1}^0,\ y(0) = 0.$$

Отметим, что $x_{ij}(0) \neq y(0)$. Убегающий E не покидает конуса

$$C = \left\{z \in R^\nu : \langle z - z_0, e\rangle = 0, \|z - z_0\| \leqslant a\mathrm{tg}\theta, z_0 = ae, a \geqslant 0\right\}.$$

В данной вспомогательной игре Γ_1 преследователи действуют следующим образом: в каждый момент времени $t \in [0, \infty)$ каждый из преследователей P_i^j использует одно и то же управление $u_i(t)$, выбранное преследователем P_i в игре Γ.

Пусть $v_1(t)$ – управление, обеспечивающее уклонение в конусе в игре Γ_1, выбранное убегающим E в момент времени t. Определяем управление убегающих E_j в игре Γ в каждый момент времени $t \geqslant 0$ следующим образом: $v(t) = v_1(t)$.

Из построения управления $v(t)$ и теоремы 2.1 следует справедливость этой теоремы.

3. Уклонение от встречи

Используя управление, обеспечивающее уклонение в конусе, построим допустимое управление, обеспечивающее уклонение от встречи из любых начальных позиций.

Теорема 3.1. *В игре* Γ *происходит уклонение от встречи из любых начальных позиций.*

Доказательство. В пространстве R^ν определим вспомогательную игру Γ_2 $n+m$ лиц: n преследователей P_i^1 и m убегающих E_j^1. Закон движения каждого из преследователей P_i^1 имеет вид

$$x_i^{(n_i)} = u_i, \ \ \|u_i\| \leqslant 1.$$

Движение каждого из убегающих E_j^1 описывается уравнением вида

$$\dot{y}_j = \widehat{v}, \ \ \|\widehat{v}\| \leqslant \gamma.$$

При $t = t_0 \geqslant 0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(s_i)}(t_0) = \widehat{x}_{i,s_i}^0, \ \ y_j(t_0) = \widehat{y}_j^0, \text{причем } \widehat{x}_{i,0}^0 \neq \widehat{y}_j^0 \text{ для всех } i, j.$$

Здесь и далее считаем

$$s_i = 0, 1, \ldots, n_i - 1.$$

Предполагается, что убегающий E_j^1 не покидает пределы конуса

$$\widehat{C}_j = \left\{ z \in R^\nu : \langle z - z_j, e \rangle = 0, \|z - z_j\| \leqslant a, z_j = \widehat{y}_j^0 + a\widehat{e}, a \geqslant 0 \right\},$$

где $\widehat{e}$ – единичный вектор пространства R^ν.

В данной вспомогательной игре Γ_2 преследователи действуют следующим образом: в каждый момент времени $t \in [t_0, \infty)$ каждый из преследователей P_i^1 использует одно и то же управление $u_i(t)$, выбранное преследователем P_i в игре Γ.

Пусть $\widehat{v}(t) = \widehat{v}(t, t_0, \widehat{x}_{i,s_i}^0, \widehat{y}_j^0, \widehat{e})$ – управление, обеспечивающее уклонение в конусе в игре Γ_2, выбранное убегающими E_j^1 в момент $t \geqslant t_0$.

Определяем управление $v(t)$ убегающих E_j в игре Γ :

$$0) \quad v(t) = \widehat{v}\left(t, 0, x_{i,s_i}^0, y_j^0, \frac{y_1^0 - x_{1,0}^0}{\|y_1^0 - x_{1,0}^0\|}\right), \; t \in [0, t_1],$$

$t_1 > 0$ – момент, когда впервые $y_1(t_1) \in \partial\mathfrak{D}(y_1^0, r_0)$;

$$p) \quad v(t) = \widehat{v}\left(t, t_p, x_i^{(s_i)}(t_p), y_j(t_p), \frac{y_1^0 - y_1(t_p)}{\|y_1^0 - y_1(t_p)\|}\right), t \in (t_p, t_{p+1}]$$

$t_{p+1} > t_p$ – момент, когда впервые $y_1(t_{p+1}) \in \partial\mathfrak{D}(y_1^0, r_0)$, здесь $p = 1, 2, 3, \ldots$

Из построения управления $v(t)$ и теоремы 2.2 следует справедливость данной теоремы.

Список литературы

1. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. О квазилинейных дифференциальных играх убегания // Диф. уравнения. 1978. Т. 14, № 6. С. 1046–1052.
2. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. Ташкент: Фан, 2000.
3. Чикрий А.А. Конфликтно-управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992.
4. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во Моск.ун-та, 1990.