Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2004. Ґ2(30)

УДК 517.934

© **В.И. Ухоботов**
ukh@csu.ru

СТАБИЛЬНОЕ СВОЙСТВО ОПЕРАТОРА ПРОГРАММНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ИГРАХ С ПРОСТЫМ ДВИЖЕНИЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ С НЕПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СТРУКТУРОЙ

Ключевые слова: нечеткие множества, непрерывная игра, выпуклая цель, оператор программного поглощения.

Abstract. Consider stable property of the operator for one class countinuous games with simple move and convex aim.

Введение

Задачи управления с помехами при наличии нечеткой информации о фазовом состоянии можно рассматривать как задачи синтеза гарантированного результата в фазовых пространствах, элементами которого являются нечеткие множества [1]. Такие пространства наделены линейной структурой, в которой не выполняется дистрибутивный закон умножения числа на вектор относительно сложения двух чисел и может не существовать противоположный элемент.

Одной из простых моделей конфликтно-управляемых систем являются непрерывные игры с простым движением. Им посвящена обширная литература [2-12]. Кроме как для модельных целей, этот класс игр может служить для приближенного получения решения в более сложных системах. Так, А.Н. Субботиным [8] с помощью функции цены дифференциальной игры с простым движением проводится локальная аппроксимация функции цены достаточно общей дифференциальной игры.

Игры с простым движением обладают тем свойством, что их оператор программного поглощения на выпуклых множествах удовлетворяет условию стабильности [2;5;11;12]. В данной работе приводится алгебраический метод доказательства стабильности таких операторов для квазилинейных задач в пространствах с неполной линейной структурой, он основан на их связи с операциями инфимальной конволюции и правого произведения на число [13] многозначных функций.

1. Нечеткие множества как пример пространства с неполной линейной структурой

Пусть X — линейное вещественное пространство. Для двух множеств A и B из X и для числа $\lambda \in R$ обозначим

$$\begin{aligned} A + B &= \{x \in X \mid x = a + b : \ a \in A, \ b \in B\}, \\ \lambda A &= \{x \in X \mid x = \lambda a : \ a \in A\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Обозначим характеристическую функцию произвольного множества $C \subset X$ через

$$\delta(x; C) = \begin{cases} 1, & x \in C, \\ 0, & x \bar{\in} C. \end{cases} \tag{1.2}$$

Характеристическая функция суммы двух множеств равна

$$\delta(x; A + B) = \sup_{y+z=x} \min(\delta(y; A); \ \delta(z; B)). \tag{1.3}$$

Характеристическая функция множества λA равна

$$\begin{aligned} &\delta(x; \lambda A) = \delta(\lambda^{-1} x; A), \quad \lambda \neq 0; \\ &\delta(x; 0A) = 0, \ x \neq 0, \quad \delta(0; 0A) = 1. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Обобщая понятие характеристической функции, приходим к понятию нечеткого, по Заде, множества [1].

О п р е д е л е н и е 1.1. Нечетким множеством z универсального множества X называется совокупность пар вида $(x \mid \delta(x;z))$, где $x \in X$, а $\delta(.;z) : X \to [0,1]$.

Функция $\delta(.;z)$ называется функцией принадлежности.

Дадим определение суммы двух нечетких множеств и произведения нечеткого множества на действительное число [14].

О п р е д е л е н и е 1.2. Суммой двух нечетких множеств z_1 и z_2 универсального множества X называется нечеткое множество $z_1 * z_2$ универсального множества X , функция принадлежности которого определяется следующей формулой:

$$\delta(x; z_1 * z_2) = \sup_{y \in X} \min(\delta(y; z_1); \delta(x-y; z_2)). \tag{1.5}$$

О п р е д е л е н и е 1.3. Произведением числа $\lambda \in R$ на нечеткое множество z универсального множества X называется нечеткое множество $\lambda \circ z$ этого же универсального множества, функция принадлежности которого имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\delta(x; \lambda \circ z) = \delta(\lambda^{-1}x; z), \lambda \neq 0; \\ &\delta(x; 0 \circ z) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.6}$$

П р и м е р 1.1. Пусть в пространстве X перемещается точка А, положение $x \in X$ которой состоит из ее начального положения $x_0 \in X$, сложенного с воздействием $u_0 \in X$. Для оценки начального состояния и значения воздействия привлечена группа из N экспертов. Каждый эксперт, оценивая тот факт, что начальное положение равно x , может отдать этому факту один голос, а может и не отдавать. Причем один эксперт может отдать по одному голосу сразу нескольким $x \in X$. В этом проявляется нечеткость знания экспертов. Аналогично они поступают с оценкой значения $u \in X$ воздействия.

Обозначим через $n_1(x)$ количество экспертов, которые отметили, что начальное состояние равно x . Аналогично $n_2(x)$ - количество экспертов, которые отметили, что значение воздействия равно x .

Информация о том, отметил ли данный конкретный эксперт конкретное начальное состояние и конкретное значение воздействия, отсутствует.

Зафиксируем $x \in X$ и оценим максимально возможное количество экспертов, которые указали на то, что точка A окажется в этом состоянии. Возьмем любой $y \in X$. Тогда число экспертов, каждый из которых одновременно отметил, что начальное состояние равно y, а значение воздействия равно $x - y$, не превосходит величины $\min(n_1(y); n_2(x-y))$. Следовательно,

$$n(x) \leqslant \sup_{y \in X} \min(n_1(x); n_2(x-y)).$$

Поскольку никакой дополнительной информации нет, то примем $n(x)$ равной правой части этого неравенства. Функция

$$\delta(x; z_1) = \frac{n_1(x)}{N} \quad (\delta(x; z_2) = \frac{n_2(x)}{N})$$

задает меру того, что начальное состояние (воздействие) принимает значение x. Функция

$$\delta(x; z_1 * z_2)(x) = \frac{n(x)}{N}$$

задает меру того, что точка A окажется в состоянии x. В силу нашего допущения эта функция определена формулой (1.5).

Пусть положение точки A определяется формулой $x = \lambda x_0$, где $\lambda \neq 0$ фиксированное число. Тогда $n(x) = n_1(\lambda^{-1} x)$. Следовательно, функция

$$\delta(x; \lambda \circ z_1) = \frac{n(x)}{N}$$

определяется формулой (1.6).

Введенные операции (1.5) и (1.6) удовлетворяют следующим свойствам:

I. 1) $z_1 * z_2 = z_2 * z_1$; $\forall z_i$;
2) $(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$, $\forall z_i$;
3) существует элемент z^0 такой, что $z * z^0 = z$, $\forall z$;

II. 1) $1 \circ z = z$; $\forall z$;
2) $0 \circ z = z^0$, $\forall z$; $a \circ z^0 = z^0$, $\forall a \in R$;
3) $a \circ (b \circ z) = (ab) \circ z$, $\forall a, b \in R$; $\forall z$;

III. 1) $a \circ (z_1 * z_2) = (a \circ z_1) * (a \circ z_2)$, $\forall a \in R$; $\forall z_i$.

Свойства I.1, II.1 непосредственно следуют из формул (1.5) и (1.6). Проверим свойство ассоциативности.

Из формулы (1.5) следует, что функции принадлежности нечетких множеств

$$u = (z_1 * z_2) * z_3 \text{ и } v = z_1 * (z_2 * z_3)$$

соответственно равны

$$\delta(x; u) = \sup_{y+p=x} \min\bigl[\sup_{a+b=y} \min\left(\delta(a; z_1); \delta(b; z_2)\right); \delta(p; z_3)\bigr];$$

$$\delta(x; v) = \sup_{y+q=x} \min\bigl[\delta(y; z_1); \sup_{a+b=q} \min\left(\delta(a; z_2); \delta(b; z_3)\right)\bigr].$$

Отсюда следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся точки y_1, p_1, a_1, b_1 такие, что $y_1 + p_1 = x$, $a_1 + b_1 = y_1$ и

$$\delta(a_1; z_1) > \delta(x; u) - \varepsilon,\ \delta(b_1; z_2) > \delta(x; u) - \varepsilon;$$

$$\delta(p_1; z_3) > \delta(x; u) - \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Из этих неравенств получим, что

$$\min\bigl[\delta(a_1; z_1); \sup_{b+p=b_1+p_1} \min(\delta(b; z_2); \delta(p; z_3))\bigr] \geqslant \delta(x; u) - \varepsilon.$$

Отсюда, учитывая равенство $a_1 + b_1 + p_1 = x$, получим, что

$$\delta(x; v) \geqslant \delta(x; u) - \varepsilon.$$

Так как число $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\delta(x; v) \geqslant \delta(x; u)$.

Аналогично доказывается и обратное неравенство.

В качестве z^0 возьмем нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\delta(x; z^0) = \begin{cases} 1, \ x = 0 \\ 0, \ x \neq 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Тогда из формул (1.5) и(1.6) получим свойства I.3, II.2 и II.3.

Проверим свойство III.1. Пусть число $a \neq 0$. Тогда

$$\delta(x; a \circ (z_1 * z_2)) = \delta(a^{-1}x; z_1 * z_2) =$$
$$= \sup_{ay+ap=x} \min(\delta(y; z_1); \delta(p; z_2)) =$$
$$= \sup_{r+q=x} \min(\delta(a^{-1}r; z_1); \delta(a^{-1}q; z_2)) =$$
$$= \delta(x; (a \circ z_1) * (a \circ z_2)).$$

Пусть теперь $a = 0$. Тогда из свойства II.2 получим, что

$$0 \circ (z_1 * z_2) = z^0, \ 0 \circ z_1 = z^0, \ 0 \circ z_2 = z^0.$$

Поэтому из свойства I.3 получим требуемое равенство.

Свойства I-III показывают, что введенные действия над нечеткими множествами удовлетворяют почти всем аксиомам линейного пространства. Покажем, что не всегда выполняется равенство

$$(a + b) \circ z = (a \circ z) * (b \circ z). \tag{1.8}$$

В самом деле, зафиксируем ненулевой элемент $y \in X$ и рассмотрим нечеткое множество $z = z(\gamma, p)$, функция принадлежности которого равна

$$\delta(x; z) = \begin{cases} \gamma, \ x = \gamma p, \\ 1, \ x \neq \gamma p, \end{cases} \ \gamma \in (0, 1],$$

Тогда из формулы (1.5) получим, что $\delta(x; z{*}z) = 1$. С другой стороны, из формулы (1.6) следует, что при $a \neq 0$

$$\delta(x; a \circ z) = \begin{cases} \gamma, \ x = a\gamma p, \\ 1, \ x \neq a\gamma p. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $z * z \neq 2 \circ z$.

Невыполнение равенства (1.8) влечет за собой тот факт, что не для каждого нечеткого множества существует обратный элемент. Возьмем, например, нечеткое множество z_1 , функция принадлежности которого тождественно равна единице. Тогда, как следует из формулы (1.5) , для любого нечеткого множества z выполнено равенство

$$\delta(x; z_1 * z_2) = \sup \delta(y; z), \ y \in X.$$

Следовательно, $z_1 * z_2 \neq z^0$ для любого нечеткого множества.

Обозначим через Z совокупность всех нечетких множеств z , для каждого из которых

$$\sup_{x \in X} \delta(x; z) > 0.$$

Тогда из формул (1.5) и (1.6) получим, что множество Z замкнуто относительно операций $*$ и $\circ$.

Приведем еще примеры подмножеств в Z , которые замкнуты относительно операций $*$ и $\circ$.

Рассмотрим множество $Z_0 \subset Z$, которое определяется следующим образом:

$$z \in Z_0 \Leftrightarrow \delta(x; z) = \begin{cases} q, \ x \in A, \\ 0, \ x \bar{\in} A. \end{cases} \tag{1.9}$$

Здесь A —выпуклое множество в пространстве X , а число $q \in (0, 1]$.

Л е м м а 1.1. *Множество* Z_0 *является замкнутым относительно операций* $*$ *и* $\circ$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых двух нечетких множеств $z_i \in Z_0$ имеем, что

$$\delta(x; z_1 * z_2) = \sup_{y \in X} \min \left[\begin{cases} q_1, \ x \in A_1, \\ 0, \ x \bar{\in} A_1; \end{cases} \begin{cases} q_2, \ x \in A_2, \\ 0, \ x \bar{\in} A_2 \end{cases} \right] =$$

$$= \sup_{y \in X} \begin{cases} \min(q_1; q_2), & y \in A_1 \text{ и } x - y \in A_2, \\ 0, & y \bar{\in} A_1 \text{ или } x - y \bar{\in} A_2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\delta(x; z_1 * z_2) = \begin{cases} \min(q_1, q_2), \ x \in A_1 + A_2 \\ 0, \ \ x \bar{\in} A_1 + A_2 \end{cases} \tag{1.10}$$

Сумма двух выпуклых множеств является выпуклым множеством. Поэтому $z_1 * z_2 \in Z_0$.

Пусть число $a \neq 0$ и нечеткое множество $z \in Z_0$. Тогда

$$\delta(x; a \circ z) = \delta(a^{-1}x; z) = \begin{cases} q, \ x \in aA, \\ 0, \ x \bar{\in} aA. \end{cases} \tag{1.11}$$

Если $a = 0$, то $0 \circ z = z^0 \in Z_0$. Следовательно, $a \circ z \in Z_0$ для любого числа $a \in R$.

Л е м м а 1.2. *Для любого* $z \in Z_0$ *и любых чисел* $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ *выполнено равенство* (1.8) *.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $a = 0$ или $b = 0$, то равенство (1.8) следует из свойств I.3 и II.2.

Пусть $a + b > 0$. Для выпуклого множества выполнено равенство $aA + bA = (a + b)A$ при любых $a \geqslant 0, b \geqslant 0$. Отсюда и из формул (1.10) и (1.11) получим равенство (1.8).

Рассмотрим следующее подмножество $Z_1 \subset Z_0$:

$$z \in Z_1 \Leftrightarrow \delta(x; z) = \begin{cases} q, \ x = y, \\ 0, \ x \neq y, \end{cases} \ y \in X, \ q \in (0, 1]. \tag{1.12}$$

Л е м м а 1.3. *Множество* Z_1 *является замкнутым относительно операций* $*$ *и* $\circ$ *.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (1.10) и (1.11) имеем, что

$$\delta(x; z_1 * z_2) = \begin{cases} \min(q_1, q_2), \ x = y_1 + y_2, \\ 0, \ x \neq y_1 + y_2. \end{cases}$$
$$\delta(x; a \circ z) = \begin{cases} q, \ x = ay, \\ 0, \ x \neq ay \end{cases} \tag{1.13}$$

при $a \neq 0$. Отсюда следует утверждение леммы.

Для любого $z \in Z_1$ и любых чисел $a, b \in R$, $a + b \neq 0$ выполнено равенство (1.8) . Если $a + b = 0$ и $q < 1$, то равенство (1.8) не выполняется.

Рассмотрим теперь случай, когда X является нормированным пространством с нормой $||x||$, $x \in X$.

Пусть $z_i \in Z$. Положим

$$\rho(z_1, z_2) = \max[\sup_{x\in X} \inf_{p\in X} (|\delta(x, z_1) - \delta(p, z_2)|) + ||x - p||; \\ \sup_{p\in X} \inf_{p\in X} (|\delta(p, z_2) - \delta(x, z_1)| + \|x - p\|)]. \tag{1.14}$$

Л е м м а 1.4. *Функция* (1.14) *удовлетворяет следующим свойствам расстояния:*

$$\rho(z_1, z_2) \geqslant 0, \quad \rho(z, z) = 0; \quad \rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1);$$

$$\rho(z_1, z_2) \leqslant \rho(z_1, z_3) + \rho(z_2, z_3).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первые два свойства непосредственно следуют из формулы (1.14) . Покажем третье свойство.

Пусть, например, максимальным из двух чисел в (1.14) является первое. Тогда для любого числа $a < \rho(z_1, z_2)$ найдется точка $x_1 \in X$ такая, что

$$a \leqslant |\delta(x_1, z_1) - \delta(p, z_2)| + \|x_1 - p\| \tag{1.16}$$

для всех $p \in X$.

Для любых чисел α, β, γ выполнено неравенство

$$|\alpha - \beta| \leqslant |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta|.$$

Поэтому из (1.16) получим, что для любых $p, q \in X$, $z_3 \in Z$ выполнено неравенство

$$a \leqslant |\delta(x_1, z_1) - \delta(q, z_3)| + \|x_1 - q\| + |\delta(q, z_3) - \delta(p, z_2)| + \|q - p\|.$$

Следовательно, для любого фиксированного $q_1 \in X$ будет выполнено неравенство

$$a \leqslant \inf_q [|\delta(x_1, z_1) - \delta(q, z_3)| + \|x_1 - q\|] +$$
$$+ \inf_p [|\delta(q_1, z_3) - \delta(p, z_2)| + \|q_1 - p\|.]$$

Отсюда и из формулы (1.14) получим, что

$$a \leqslant \rho(z_1, z_3) + \rho(z_3, z_2).$$

Из произвольности числа $a < \rho(z_1, z_2)$ получим третье условие в (1.15).

П р и м е р 1.2. Пусть $X = R$, а функции принадлежности двух нечетких множеств z_i заданы формулами $\delta(x; z_i) = 0$ при $x < 0$ и $\delta(x; z_i) = 1$, если $x \geqslant 0$, $(i = 1, 2)$. Тогда

$$|\delta(x; z_1) - \delta(p, z_2)| = \begin{cases} 0, \ x < 0, \ p \leqslant 0, & \text{или } x \geqslant 0, \ p > 0, \\ 1, \ x \geqslant 0, \ p \leqslant 0, & \text{или } x < 0, \ p > 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$\sup_x \inf_p [|\delta(x, z_1) - \delta(p, z_2)| + |x - p|] =$$
$$= \sup_p \inf_x [|\delta(p, z_2) - \delta(x, z_1)| + |x - p|] = 0.$$

Следовательно, $\rho(z_1, z_2) = 0$. Однако $z_1 \neq z_2$.

Рассмотрим подробнее функцию (1.14) на нечетких множествах Z_1 (1.12).

Л е м м а 1.5. *Пусть* z_n, $z \in Z_1$. *Тогда*

$$\rho(z_n, z) = \min[\max(q_n, q); \ |q_n - q| + \|y_n - y\|]. \tag{1.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем, что

$$\varphi(x,p)=|\delta(x;z_n)-\delta(p;z)|+\|x-p\|=$$

$$=\begin{cases} |q_n-q|+\|y_n-y\|,\ x=y_n,\ p=y,\\ q_n+\|y_n-p\|,\ x=y_n,\ p\neq y,\\ q+\|y_n-y\|,\ x\neq y_n,\ p=y,\\ \|x-p\|,\ x\neq y_n,\ p\neq y. \end{cases}$$

Поэтому

$$a=\sup_x\inf_p\varphi(x,p)=\min[q_n,|q_n-q|+\|y_n-y\|].$$

Аналогично

$$b=\sup_p\inf_x(|\delta(p,z)-\delta(x,z_n)|+\|x-p\|)=\min[q,|q-q_n|+\|y_n-y\|].$$

Отсюда следует формула (1.17).

З а м е ч а н и е 1.1. Условие $\rho(z_n,z)\to 0$ равносильно тому, что $q_n\to q,\ y_n\to y$.

Л е м м а 1.6. *Пусть* $z,\ z_n\in Z_1$ *и* $a,\ a_n\in R$ *таковы, что* $\rho(z_n,z)\to 0,\ a_n\to a$ *и* $a\neq 0$. *Тогда*

$$\rho_n=\rho(a_n\circ z_n,\ a\circ z)\to 0 \text{ при } n\to\propto .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начиная с некоторого номера n все числа $a_n\neq 0$. Поэтому из формул (1.6) и (1.17) будем иметь, что

$$\rho_n=\min[\max(q_n,q);\ |q_n-q|+\|a_ny_n-ay\|].$$

Отсюда и из замечания 1.1 получим требуемое условие $\rho_n\to 0$.

З а м е ч а н и е 1.2. В случае $a=0$ и $a_n\neq 0$ будем иметь, что

$$\rho_n=\min[1;\ 1-q_n+\|a_ny_n\|]\to\min[1;1-q]=1-q.$$

Л е м м а 1.7. *Пусть* $z_* \in Z,\ z \in Z_1$. *Тогда*

$$\delta(x, z * z_*) = \min(q;\ \delta(x - y;\ z_*)). \tag{1.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы (1.5) имеем, что

$$\delta(x; z * z_*) = \sup_{\tau \in X} \min \left(\delta(\tau; z_*); \begin{cases} q, & x - \tau = y, \\ 0, & x - \tau \neq y \end{cases} \right).$$

Отсюда получим требуемую формулу (1.18) .

Л е м м а 1.8. *Пусть* $z \in Z_1,\ z_n \in Z_1,\ z^* \in Z,\ z_n^* \in Z$ *таковы, что* $\rho(z_n, z) \to 0,\ \rho(z_n^*, z^*) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Тогда $\rho(z_n * z_n^*, z * z^*) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функции принадлежности нечетких множеств z^* и z_n^* обозначим через $\delta(x)$ и $\delta_n(x)$. Тогда, используя лемму 1.7, получаем, что

$$\begin{gathered} \delta(x; z_n * z_n^*) = \min(\delta_n(x - y_n); q_n), \\ \delta(x; z * z^*) = \min(\delta(x - y); q). \end{gathered} \tag{1.19}$$

Согласно замечанию 1.1 $q_n \to q,\ y_n \to y$. Обозначим

$$\alpha_n = \sup_{x \in X} \inf_{p \in X} \left(|\delta(x, z_n * z_n^*) - \delta(p, z * z_*)| + \|x - p\|\right) \tag{1.20}$$

Подставляя сюда формулы (1.19) , будем иметь, что

$$\alpha_n \leqslant \beta_n + \|y_n - y\|.$$

Здесь обозначено

$$\beta_n = \sup_{x \in X} \inf_{p \in X} \left(|\min(\delta_n(x); q_n) - \min(\delta(p); q)| + \|x - p\|\right)$$

Если покажем, что $\beta_n \to 0$, то и $\alpha_n \to 0$.

Предположим, что последовательность β_n не стремится к нулю. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\beta_n \geqslant \varepsilon$ для всех

n (иначе — перейдем к подпоследовательности). Стало быть, существует последовательность точек $x_n \in X$ такая, что для всех $p \in X$ выполнено неравенство

$$|\min(\delta_n(x_n); q_n) - \min(\delta(p); q)| + \|x_n - p\| \geqslant \varepsilon. \qquad (1.21)$$

С другой стороны, из условия $\rho(z_n^*, z^*) \to 0$ следует, что

$$|\delta_n(x_n) - \delta(p_n)| + \|x_n - p_n\| \to 0. \qquad (1.22)$$

для некоторой последовательности точек $p_n \in X$.

Последовательности чисел $\delta_n(x_n)$, $\delta(p_n)$ принадлежат отрезку $[0,1]$. Поэтому можно считать, что они сходятся (иначе перейдем к подпоследовательности). Причем, как следует из (1.22),

$$\delta_n(x_n) \to \delta,\ \delta(p_n) \to \delta,\ \|x_n - p_n\| \to 0.$$

Положим в (1.21) $p = p_n$ и перейдем к пределу. Получим противоречивое неравенство $0 \geqslant \varepsilon$.

Рассмотрим теперь последовательность

$$\gamma_n = \sup_{p \in X} \inf_{x \in X} \left(|\delta(x, z_n * z_n^*) - \delta(p, z * z^*)| + \|x - p\|\right).$$

Подставив сюда формулы (1.19), получим

$$\gamma_n \leqslant \Phi_n + \|y_n - y\|.$$

Здесь

$$\Phi_n = \sup_{p \in X} \inf_{x \in X} \left(|\min(\delta_n(x); q_n) - \min(\delta(p); q)| + \|x - p\|\right). \qquad (1.23)$$

Покажем, что $\Phi_n \to 0$. Предположим, что это не так. Можно считать (переходя, если нужно, к подпоследовательности), что существуют число ε и последовательность точек $p_n \in X$ такая, что

$$|\min(\delta_n(x); q_n) - \min(\delta(p_n); q)| + \|x - p_n\| \geqslant \varepsilon$$

для всех точек $x \in X$.

С другой стороны, из условия $\rho(z_n^*, z^*) \to 0$ следует, что выполнено условие (1.22) для некоторой последовательности точек $x_n \in X$. Проведя те же рассуждения, что и в условиях (1.21) и (1.22), придем к противоречию.

Таким образом, из формул (1.14), (1.20), (1.23) следует, что

$$\rho(z_n * z_n^*, z * z^*) = \max(\alpha_n; \gamma_n) \to 0.$$

З а м е ч а н и е 1.3. Само пространство X можно отождествить с некоторым классом подмножеств множества Z_1, у каждого элемента которого в формуле (1.12) стоит $q = 1$. Для этого класса операции $*$ и $\circ$ превращаются в обычные операции сложения двух векторов в X и умножение вектора на число. Далее, для нечетких множеств z_n и z из этого класса условие $\rho(z_n, z) \to 0$ означает сходимость $y_n \to y$ в X.

2. Интеграл от ступенчатой функции

Предположим, что пространство Z удовлетворяет следующему условию:

$$\forall \lambda \in [0,1],\ \forall z \in Z \Rightarrow (\lambda \circ z) * ((1-\lambda) \circ z) = z. \qquad (2.1)$$

Для точек $z_i \in Z,\ i = 1, ..., n$, обозначим

$$z_1 * z_2 * ... * z_n = \bigoplus_{i=1}^{n} z_i. \qquad (2.2)$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Множество $A \subset Z$ назовем выпуклым, если для любых $z_1,\ z_2 \in A$ и для любого числа $\lambda \in [0,1]$ точка $(\lambda \circ z_1) * ((1-\lambda) \circ z_2) \in A$.

Из этого определения и из условия (2.1) следует, что если множество A выпукло, то

$$(a \circ A) * (b \circ A) = (a + b) \circ A,\ \forall a,\ b \geqslant 0. \qquad (2.3)$$

Если множества A и B выпуклы, то выпуклыми являются множества $A * B$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Выпуклой оболочкой множества $A \in Z$ назовем множество

$$\mathrm{co}A = \{z \in Z |\ z = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} (\lambda_i \circ z_i) :\ z_i \in A,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}. \quad (2.4)$$

Выпуклая оболочка множества A является выпуклым множеством.

О п р е д е л е н и е 2.3. Функция $z :\ [a, b] \to Z$ называется ступенчатой, если существует разбиение

$$a = r_0 < r_1 < ... < r_n = b$$

отрезка $[a, b]$ такое, что на каждом из интервалов (r_i, r_{i+1}) функция $z(t)$ постоянна.

Такое разбиение назовем допустимым для ступенчатой функции $z(t)$.

О п р е д е л е н и е 2.4. Интегралом от произведения ступенчатой функции $z : [a, b] \to z$ на интегрируемую скалярную функцию $\alpha(t) \geqslant 0$ назовем

$$\int_a^b (\alpha(t) \circ z(t))dt = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} ((\int_{r_{i-1}}^{r_i} \alpha(t)dt) \circ z(t_i)),\ t_i \in (r_{i-1}, r_i). \quad (2.5)$$

Здесь $a < r_0 < ... < r_n = b$ — допустимое разбиение для $z(t)$ отрезка $[a, b]$.

Покажем, что определение интеграла (2.5) не зависит от выбора допустимого разбиения. В самом деле, для двух допустимых разбиений рассмотрим разбиение, которое состоит из точек обоих разбиений. Пусть это разбиение $a = r_0 < ... < r_k = b$. Тогда каждый интервал (r_{i-1}, r_i) поделен на интервалы

$$(\tau_j, \tau_{j+1}), ..., (\tau_{m-1}, \tau_m),\ \tau_j = r_{i-1},\ \tau_m = r_i.$$

Значение $z(t)$ на них будет одно и то же. Из равенства (2.3) получим, что

$$\mathop{\oplus}_{s=j+1}^{m}[(\int_{\tau_{s-1}}^{\tau_s}\alpha(t)dt)\circ z(t_i)] = (\int_{r_{i-1}}^{r_i}\alpha(t)dt)\circ z(t_i). \qquad (2.6)$$

Суммируя равенство (2.6) по всем интервалам (r_i, r_{i-1}), получим равенство (2.5) для обоих разбиений.

Если функция $z(t)$ является ступенчатой на отрезке $[a,b]$, то она является ступенчатой на отрезках $[a,\tau],\ [\tau,b],\ a<\tau<b$. Верна формула

$$\int_a^b(\alpha(t)\circ z(t))dt = \int_a^\tau(\alpha(t)\circ z(t))dt * \int_\tau^b(\alpha(t)\circ z(t))dt. \qquad (2.7)$$

Пусть V и $U(v)$ при любом $v\in V$ множества произвольной природы и задана функция $\psi(u,v)\in Z,\ v\in V,\ u\in U(v)$. Если на отрезке $[a,b]$ заданы две ступенчатые функции

$$u(t)\in U(v(t)),\ v:[a,b]\to V,$$

то функция $\psi(u(t),v(t))$ будет ступенчатой. Возьмем интегрируемую функцию $\alpha:[a,b]\to R$ такую, чтобы

$$\int_r^\tau\alpha(t)dr>0,\ \forall\tau,\ r\in[a,b],\ r<\tau. \qquad (2.8)$$

Возьмем допустимое разбиение $a=\tau_0<...<\tau_n=b$ для функции $v(t)$. Пусть

$$v(t)=\begin{cases} v_1,\ a=\tau_0<t\le\tau_1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ v_j,\ \tau_{j-1}<t\le\tau_j,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ v_n,\ \tau_{n-1}<t\le\tau_n=b; \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} u_1^{(j)},\ \tau_{j-1} = r_0 < t \le r_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_q^{(j)},\ r_{q-1} < t \le r_q, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{e_j}^{(j)},\ r_{l_j-1} < t \le r_{l_j} = \tau_j. \end{cases} \tag{2.9}$$

Здесь $u_q^{(j)} \in U(v_j)$. Тогда

$$\int_a^b (\alpha(t) \circ \psi(u(t), v(t)))dt = \bigoplus_{j=1}^{n} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} (\alpha(t) \circ \psi(u(t), v(t)))dt =$$

$$= \bigoplus_{j=1}^{n} (\bigoplus_{q=1}^{l_j} ((\int_{r_{q-1}}^{r_q} \alpha(t)dt) \circ \psi(u_q^{(j)}, v_j)) =$$

$$= \bigoplus_{j=1}^{n} ((\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \alpha(t)dt) \circ \bigoplus_{q=1}^{l_j} (\lambda_q \circ \psi(u_q^{(j)}, v_j))) =$$

$$= (\int_a^b \alpha(t)dt) \circ \bigoplus_{j=1}^{n} (\nu_j \circ \bigoplus_{q=1}^{l_j} (\lambda_q \circ \psi(u_q^{(j)}, v_j)).$$

Здесь обозначено

$$\nu_j = (\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \alpha(t)dt)/(\int_a^b \alpha(t)dt),\ \nu_1 + ...\nu_n = 1; \tag{2.10}$$

$$\lambda_q = (\int_{r_{q-1}}^{r_q} \alpha(t)dt)/(\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \alpha(t)dt),\ \lambda_1 + ...\lambda_n = 1.$$

Положим

$$\Psi(v) = \mathrm{co} \bigcup_{u \in U} \psi(u, v). \tag{2.11}$$

Тогда для фиксированной ступенчатой функции $v(t)$ (2.9)

$$\bigcup_{u(\bullet)} \int_a^b [\alpha(t) \circ \psi(u(t), v(t))]dt = (\int_a^b \alpha(t)dt) \circ \bigoplus_{j=1}^{n} (\nu_j \circ \Psi(v_j)). \tag{2.12}$$

Здесь объединение берется по всем ступенчатым функциям $u(t) \in U(v(t))$.

3. Квазилинейная игра с выпуклой целью

Рассмотрим в пространстве Z, удовлетворяющем условию (2.1), непрерывную игру, в которой правило перехода определяется формулой

$$z(t) = z(t_i) * \int_{t_i}^{t} \psi(u_i(\tau),\ v_i(\tau))d\tau,\ t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}. \tag{3.1}$$

Здесь функция $\psi(u, v)$ определена при любых $v \in V,\ u \in U(v)$. Управления берутся в классе ступенчатых функций (2.9).

Обозначим через V_0 множество всех ступенчатых функций $v^* : [0,1] \to V$, а через $U_0(v^*(.))$ - множество ступенчатых функций

$$u^*(\lambda) \in U(v^*(\lambda)),\quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Запишем правило перехода (3.1) с помощью этих функций. Сделаем замену времени

$$v_i^*(\lambda) = v_i(t_i + \lambda(t_{i+1} - t_i)),\ u_i^*(\lambda) = u_i(t_i + \lambda(t_{i+1} - t_i)).$$

Эти функции являются ступенчатыми на $(0,1]$. С помощью этой замены правило перехода (3.1) принимает следующий вид:

$$z(t) = z(t_i) * ((t_{i+1} - t_i) \circ \int_0^{\lambda} \psi(v_i^*(\tau),\ u_i^*(\tau))d\tau), \tag{3.2}$$

$$\lambda = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i},\quad v_i^*(.) \in V_0,\quad u_i^*(.) \in U_0(v_i(.)). \tag{3.3}$$

П р и м е р 3.1. Фиксированы множество $M \subset Z$, точка $e \in Z$ и момент времени p. Цель первого игрока, выбирающего управление u, заключается в том, чтобы в заданный момент времени p осуществить включение $e \in z(p) * M$.

Обозначим $F(z) = z * M$. Тогда цель первого игрока можно записать следующим образом:

$$e \in F(z(p)). \tag{3.4}$$

П р и м е р 3.2. Цель первого игрока заключается в том, чтобы осуществить удержание $e \in z(t) * M$ при всех $0 \leq t \leq p$. Это условие удержания можно записать таким образом:

$$e \in \bigcap_{t_0 \leqslant t \leqslant p} F(z(t)). \tag{3.5}$$

П р и м е р 3.3. Пусть первый игрок стремится к моменту времени p осуществить включение $e \in z(t) * M$. Эту цель запишем в следующем виде:

$$e \in \bigcup_{t_0 \leqslant t \leqslant p} F(z(t)). \tag{3.6}$$

Зафиксируем $t_i < t_{i+1}$ и точку $z_i = z(t_i)$. Из формулы (3.2) следует, что для любого допустимого выбора (3.3) второго игрока существует допустимый выбор (3.3) первого игрока, при котором траектория (3.2) удовлетворяет соответственно включениям (3.4), (3.5) и (3.6) тогда и только тогда, когда

$$e \in (K_\sigma F)(z_i),\ \sigma = t_{i+1} - t_i; \tag{3.7}$$

$$e \in (L_\sigma F)(z_i), \tag{3.8}$$

$$e \in (N_\sigma F)(z_i). \tag{3.9}$$

Здесь

$$(K_\sigma f)(z) = \bigcap_{v^*(.)} \bigcup_{u^*(.)} f(z * \sigma_0 \int_0^1 \psi(v^*(\tau), u^*(\tau)) d\tau)), \tag{3.10}$$

$$(L_\sigma f)(z) = \bigcap_{v^*(.)} \bigcup_{u^*(.)} \bigcap_{\lambda} f(z * (\sigma \circ \int_0^\lambda \psi(v^*(\tau), u^*(\tau)) d\tau)), \tag{3.11}$$

$$(N_\sigma f)(z) = \bigcap_{v^*(.)} \bigcup_{u^*(.)} \bigcup_{\lambda} f(z * (\sigma \circ \int_0^\lambda \psi(v^*(\tau), u^*(\tau)) d\tau). \tag{3.12}$$

Объединения и пересечения берутся по всем $v^*(.) \in V_0$, $u^*(.) \in U_0(v^*(.))$ и по всем числам $\lambda \in [0,1]$.

Рассмотрим введенные операторы (3.10) - (3.12) в более общем случае.

Считаем, что задано множество E, в котором для каждых двух множеств A и B из E (включая и пустые множества) и для каждого числа $a > 0$ определены множества

$$A \triangle B \subset E, a \bullet A \subset E. \tag{3.13}$$

Предполагаем, что эти операции удовлетворяют следующим свойствам:

I. 1)$A \triangle B = B \triangle A$.

II. 1) $1 \bullet A = A$;

2) $a \bullet (b \bullet A) = (ab) \bullet A$, $\forall a > 0$, $\forall b > 0$;

3) $a \bullet (A \triangle B) = (a \bullet A) \triangle (a \bullet B)$, $\forall a > 0$;

4) $(a + b) \bullet A \subset (a \bullet A) \triangle (b \bullet A)$, $\forall a > 0$, $\forall b > 0$.

III. Для любого семейства множеств $A_\alpha \subset E$ и любого множества $A \subset E$ выполнены

1) $a \bullet \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (a \bullet A_\alpha)$, $\forall a > 0$;

2) $(\bigcup_\alpha A_\alpha) \triangle A = \bigcup_\alpha (A_\alpha \triangle A)$;

3) $a \bullet \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (a \bullet A_\alpha)$;

4) $(\bigcap_\alpha A_\alpha) \triangle A \subset \bigcap_\alpha (A_\alpha \triangle A)$.

Из свойств III.1 и III.2 следует, что если

$$A_1 \subset A_2 \subset E,\ A \subset E,\ a > 0,$$

то

$$a \bullet A_1 \subset a \bullet A_2,\ A_1 \triangle A \subset A_2 \triangle A. \tag{3.14}$$

Введем две операции с многозначными функциями $f : Z \to 2^E$.

О п р е д е л е н и е 3.1. Правым произведением числа $a > 0$ на многозначную функцию $f : Z \to 2^E$ назовем многозначную функцию

$$(a \times f)(z) = a \bullet f(a^{-1} \circ z). \tag{3.15}$$

О п р е д е л е н и е 3.2. Инфимальной конволюцией двух многозначных функций $f_i : Z \to 2^E$ назовем многозначную функцию

$$(f_1 \diamond f_2)(z) = \bigcup_{x_1 * x_2 = z} (f_1(x_1) \triangle f_2(x_2)). \tag{3.16}$$

Термины, использованные в этих определениях, аналогичны определениям для однозначных функций в линейных пространствах [13]. Показывается, что для любых многозначных функций f, f_i и любых чисел $a, b > 0$ выполнены следующие соотношения:

$$1 \times f = f;\ f_1 \diamond f_2 = f_2 \diamond f_1, \tag{3.17}$$

$$b \times (a \times f) = (ba) \times f, \tag{3.18}$$

$$(a \times (f_1 \diamond f_2))(z) \supset [(a \times f_1) \diamond (a \times f_2)](z), \tag{3.19}$$

$$((a + b) \times f)(z) \subset ((a \times f) \diamond (b \times f))(z). \tag{3.20}$$

О п р е д е л е н и е 3.3. Многозначную функцию $f : Z \to 2^E$ назовем выпуклой, если для любых $z, y \in Z$ и любого числа $\lambda \in (0, 1)$ выполнено включение

$$(\lambda \bullet f(z)) \triangle ((1 - \lambda) \bullet f(y)) \subset f((\lambda \circ z) * ((1 - \lambda) \circ y)). \tag{3.21}$$

Рассмотрим отображение T, которое задается следующим образом. Задано множество V_0 произвольной природы. Каждому элементу $v \in V_0$ поставлено в соответствие множество $U_0(v)$ произвольной структуры. Задана многозначная функция Φ, которая каждой паре $v \in V_0,\ u \in U_0(v)$ и любому числу $\lambda \in [0, 1]$ ставит в соответствие множество $\Phi(\lambda, u, v) \subset Z$.

Задано отображение π, которое каждой многозначной функции $A : [0, 1] \to 2^E$ ставит в соответствие множество $\pi A(\lambda) \subset E$.

Оператор T_σ каждому числу $\sigma \geqslant 0$ и каждой многозначной функции $f : Z \to 2^E$ ставит в соответствие многозначную функцию

$$(T_\sigma f)(z) = \bigcap_{v \in V_0} \bigcup_{u \in U_0} \pi[\bigcup_{\varphi \in \Phi(\lambda,u,v)} f(z * (\sigma \circ \varphi))]. \tag{3.22}$$

Условие стабильности этого оператора означает, что

$$(T_{\sigma_1}(T_{\sigma_2} f))(z) \supset (T_{\sigma_1+\sigma_2} f)(z),\ \forall z \in Z, \forall \sigma_i \geqslant 0. \tag{3.23}$$

Сформулируем условия, которым должно удовлетворять отображение π .

П р е д п о л о ж е н и е 3.1. Для любых многозначных функций $A : [0,1] \to 2^E,\ B : [0,1] \to 2^E$ выполнены следующие соотношения:

$$A(\lambda) \supset B(\lambda),\ \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \pi A(\lambda) \supset \pi B(\lambda);$$

$$\forall a > 0 \Rightarrow \pi(a \bullet A(\lambda)) = a \bullet \pi A(\lambda);$$

$$\forall B \subset E \Rightarrow \pi(A(\lambda) \triangle B) \supset \pi A(\lambda) \triangle B;$$

$$\pi(\bigcup_\alpha A_\alpha(\lambda)) \supset \bigcup_\alpha (\pi A_\alpha(\lambda)).$$

Последнее включение должно выполняться для любого семейства многозначных функций $A_\alpha(\lambda)$.

Л е м м а 3.1. *Для любой многозначной функции* $f : Z \to 2^E$ *выполнено равенство*

$$(T_\sigma(\sigma \times f))(z) = (\sigma \times T_1 f)(z),\ \forall \sigma > 0. \tag{3.24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (3.22) и (3.15) следует, что

$$(T_\sigma(\sigma \times f))(z) = \bigcap_v \bigcup_u \pi[\bigcup_\varphi [(\sigma \times f)(z + \sigma \circ \varphi)]] =$$

$$= \bigcap_v \bigcup_u \pi[(\bigcup_\varphi [\sigma \bullet f(\sigma^{-1} \circ (z * (\sigma \circ \varphi)))]] =$$

$$= \sigma \bullet \bigcap_v \bigcup_u \pi[\bigcup_\varphi f((\sigma^{-1} \circ z) * \varphi)] = \sigma \bullet ((T_1 f)(\sigma^{-1} z)) == (\sigma \times T_1 f)(z).$$

Л е м м а 3.2. *Для любых многозначных функций* $f_i : Z \to 2^E$ *выполнено включение*

$$(T_\sigma(f_1 \diamond f_2))(z) \supset ((T_\sigma f_1) \diamond f_2)(z), \ \forall z \in Z. \tag{3.25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы (3.22) получим, что

$$(T_\sigma(f_1 \diamond f_2))(z) = \bigcap_v \bigcup_u \pi[\bigcup_{\varphi \in \Phi(\lambda,u,v)} (f_1 \diamond f_2)(z * (\sigma \circ \varphi)))]. \tag{3.26}$$

Согласно формуле (3.16)

$$\bigcup_\varphi (f_1 \diamond f_2)(z * (\sigma \circ \varphi))] = \bigcup_\varphi [\bigcup_{x_1 * x_2 = z*(\sigma \circ \varphi)} (f_1(x_1) \triangle f_2(x_2))] \supset$$

$$\supset \bigcup_\varphi \bigcup_{y * x_2 = z} (f_1(y * (\sigma \circ \varphi)) \triangle f_2(x_2)).$$

Поменяем в последнем выражении этого включения знаки объединения и подставим его в равенство (3.26). Тогда, учитывая свойства отображения π, сформулированные в предположении 3.1, получим

$$(T_\sigma(f_1 \diamond f_2))(z) \supset \bigcap_v \bigcup_u \bigcup_{y * x_2 = z} (\{\pi[\bigcup_\varphi f_1(y * (\sigma \circ \varphi))]\} \triangle f_2(x_2)).$$

Поменяем в выражении, стоящем в правой части этого включения знаки пересечения и объединения, а затем применим свойства III.2 и III.4 операции $\triangle$. В результате

$$(T_\sigma(f_1 \diamond f_2))(z) \supset \bigcup_{y * x_2 = z} (\{\bigcap_v \bigcup_u \pi[\bigcup_\varphi f_1(y * (\sigma \circ \varphi))]\} \triangle f_2(x_2)).$$

Стало быть, получим требуемое включение (3.25).

Л е м м а 3.3. *Для любых функций* $f_i : z \to 2^E$ *таких, что* $f_1(z) \supset f_2(z)$ *для* $\forall z \in Z$, *выполнено включение*

$$(T_\sigma f_1)(z) \supset (T_\sigma f_2)(z), \ \forall z \in Z. \tag{3.27}$$

Доказательство непосредственно следует из формул (3.23) и из первого включения в предположении 3.1.

Т е о р е м а. *Пусть выполнено предположение* 3.1. *Тогда для любой выпуклой многозначной функции* $f : Z \to 2^E$ *выполнено включение* (3.23) .

Доказательство следует из включений (3.24), (3.25),(3,27) и из теоремы в работе [12]. Применим эту теорему к операторам (3.10) - (3.12).

Л е м м а 3.4. *Отображение* π , *задаваемое одной из следующих формул*

$$\pi A(\lambda) = \bigcap_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} A(\lambda); \ \pi A(\lambda) = A(1); \ \pi A(\lambda) = \bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} A(\lambda),$$

удовлетворяет условиям из предположения 3.1.

Доказательство непосредственно следует из свойств операций объединения и пересечения множеств, а также из свойств III операций $\bullet$ и $\triangle$.

С л е д с т в и е 3.1. *Для любой выпуклой функции* $f : Z \to 2^E$ *и для каждого из операторов* (3.10)−(3.12) *выполнено включение* (3.23).

Рассмотрим операторы в задачах из примеров 3.1 - 3.3. С помощью замены

$$t = t_i + \lambda(t_{i+1} - t_i), \ w(r) = w^*(\frac{r - t_i}{t_{i+1} - t_i}), \ t_i \leqslant r \leqslant t_{i+1}, \ w = u, \ v$$

перейдем к равносильным операторам

$$\begin{aligned}
&(K_t^\tau f)(z) = \bigcap_{v(.)} \bigcup_{u(.)} f(z * \textstyle\int_t^\tau \psi(v(r), u(r))dr), \\
&(L_t^\tau f)(z) = \bigcap_{v(.)} \bigcup_{u(.)} \bigcap_s f(z * \textstyle\int_t^s \psi(v(r), u(r))dr), \\
&(N_t^\tau f)(z) = \bigcap_{v(.)} \bigcup_{u(.)} \bigcup_s f(z * \textstyle\int_t^s \psi(v(r), u(r))dr).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Пересечения и объединения берутся по всем ступенчатым функциям $v : [t, \tau] \to V;\ \ u(r) \in U(v(r)),\ t \leqslant r \leqslant \tau;\ s \in [t, \tau]$. Каждый из этих операторов связан с соответствующим оператором (3.10) - (3.12) равенством

$$(M_t^\tau f)(z) = (M_{\tau - t} f)(z),\ M = K, L, N.$$

Поэтому для выпуклой функции f будет выполнено включение

$$(M_t^\tau (M_\tau^p f))(z) \supset (M_t^p f)(z),\ t \leqslant \tau \leqslant p,\ z \in Z.$$

Л е м м а 3.5. *Каждый из операторов* (3.28) *удовлетворяет включению*

$$(M_t^\tau (M_\tau^p f))(z) \subset (M_t^p f)(z),\ t \leqslant \tau \leqslant p,\ z \in Z. \tag{3.29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка x принадлежит множеству, стоящему в левой части доказываемого включения (3.28). Возьмем ступенчатую $v : (t, p] \to V$.

Пусть $M = K$. Тогда существует ступенчатое управление $u_1(r) \in U(v(r)),\ t < r \leqslant \tau$ такое, что

$$x \in (K_\tau^p f) z(\tau),\ z(s) = z * \int_t^s \psi(v(r), u_1(r))dr,\ t \leqslant s \leqslant \tau.$$

Из этого включения получим, что существует управление $u_2(r) \in U(v(r)),\ \tau < r \leqslant p$ такое, что $x \in f(z(p))$, где

$$x = z * \int_t^\tau \psi(v(r), u_1(r))dr * \int_\tau^p \psi(v(r), u_2(r))dr =$$

$$= \int_t^p \psi(v(r), u(r))dr$$

Здесь $u(r) = u_1(r)$ при $t < r \leqslant \tau$, $u(r) = u_2(r)$ при $\tau < r \leqslant p$. Следовательно, точка x принадлежит множеству, стоящему справа в (3.29).

Пусть M=L. Тогда, как и выше, существует управление

$$u_1(r),\ t < r \leqslant \tau$$

такое, что для всех $s \in [t, \tau]$

$$x \in (L_\tau^p f)(z(s)). \tag{3.30}$$

Отсюда и из включения $(L_\tau^p f)(z) \subset f(z)$ получим, что при $t \leqslant s \leqslant \tau$ выполнено включение

$$x \in f(z(s)). \tag{3.31}$$

Положим во включении (3.30) $s = \tau$. Тогда существует управление

$$u_2(r) \in U(v(r)),\ \tau < r \leqslant p$$

такое, что выполнено включение (3.31) при всех $\tau < s \leqslant p$.

Следовательно, управление $u(r) = u_1(r)$, $t \leqslant r \leqslant \tau$ и $u(r) = u_2(r)$ при $\tau < r \leqslant p$ гарантирует выполнение включения (3.31) при всех $t \leqslant s \leqslant p$. Это означает, что точка x принадлежит множеству, стоящему справа в (3.29).

Пусть $M = N$. Тогда существует управление

$$u_1(r) \in U(v(r)),\quad t \leqslant r \leqslant \tau$$

и число $s \in [t, \tau]$ такие, что

$$x \in (N_\tau^p f)(z(s)) = (N_s^{p-\tau+s} f)(z(s)).$$

Существует управление

$$u_2(r) \in U(v(r)), s < r \leqslant p - \tau + s$$

и число $s_1 \in [s, p-\tau+s]$ такие, что $x \in f(z(s_1))$.

Следовательно, управление

$$u(r) = u_1(r),\ t \leqslant r < s$$

и

$$u(r) = u_2(r) \text{ при } s \leqslant r \leqslant p-\tau+s$$

гарантирует выполнение включения $x \in f(z(s_1))$ в некоторый момент $s_1 \in [t, p]$. Поэтому точка x принадлежит множеству, стоящему в правой части (3.29).

С л е д с т в и е 3.2. *Для любой выпуклой многозначной функции f каждый из операторов* (3.28) *удовлетворяет равенству*

$$(M_t^{\tau}(M_{\tau}^{p}f))(z) = (M_t^{p}f)(z),\ t \leqslant \tau \leqslant p,\ z \in Z.$$

Список литературы

1. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений М.: Мир, 1976. 161 с.
2. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1984. 479 с.
3. Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И. О дифференциальных играх с фиксированным временем// Кибернетика. 1970. Г2. С.54-63.
4. Красовский Н. Н., Субботин А.Н. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Издво Ленингр. ун-та, 1977. 222 с.
6. Гусятников П. Б., Половинкин Е. С. Простая квазилинейная задача преследования //Прикладная математика и механика. 1980. Т.44. вып.5. С.771-782.
7. Петросян Л. А., Томский Г. В. Геометрия простого преследования. Новосибирск.: Наука, 1983. 140 с.
8. Субботин А. И. Вычисление цены дифференциальной игры сближения простых движений на ограниченном промежутке времени //Управление с гарантированным результатом. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР. 1987. С.71-75.

9. Субботин А. И. Кусочно-линейная функция цены дифференциальной игры с простым движением //Тр. МИАН СССР. 1988. С.242-251.
10. Никольский М. С. Задача о переправе с возможной остановкой двигателя //Диф. уравнения. 1993. Ѓ11. С.1937-1940.
11. Ухоботов В. И. Дифференциальная игра с простым движением //Изв. вузов. Сер. матем. 1991. Ѓ8. С.69-72.
12. Ухоботов В. И. Стабильное свойство оператора программного поглощения в играх с простым движением и выпуклой целью в пространстве с неполной линейной структурой //Вестн. Челяб. ун-та. Серия 3. Математика. Механика. Информатика. 2003. Ѓ2(8). С. 181-189; 1997, Ѓ2. С.107-109.
13. Рокафелар Р. Выпуклый анализ. М.: Наука, 1973. 469 с.
14. Негойцэ К. Применение теории систем к проблемам управления. М.: Мир, 1981. 184 с.