УДК 519.816.4:517.977.54

© **К. С. Сорокин**
kostya-home@mail.ru

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ДВУХКРИТЕРИАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ РИСКОВ I [1]

Ключевые слова: риски, критерии, стратегии, гарантированное решение, неопределенность.

Abstract. Explicit solution with respect to outcome and risks of one multi-criteria linear-quadratic dynamic problem under uncertainty is being found by means of the ґMapleЄ programming system.

Введение

Новые тенденции в экономике потребовали, чтобы в математических моделях экономической динамики учитывались, во-первых, многокритериальный ґхарактерЄ задачи, во-вторых, наличие в системе неопределенного фактора и, наконец, в-третьих, требование оптимального сочетания исходов (значений критериев) и рисков по всем критериям. Такие задачи (без учетов рисков) впервые исследовались в [1; 2] с позиции принципа максиминной полезности [3]. Однако указанный подход рассчитан на ґкатастрофуЄ и поэтому приводит к ґзаниженнымЄ гарантиям, кроме того, он не учитывает риски. Избежать этих недостатков позволяет применение подходящей модификации принципа минимаксного сожаления [4]. Как раз такой подход и использован в статье [5]. В данной работе с помощью системы ґMapleЄ [2] для конкретной двухкритериальной задачи с линейной динамикой и

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (02-01-00612).
[2]Waterloo Maple, Maple 8.00

при неопределенности построен явный вид функций риска, а во второй части этой работы будет найден явный вид компонент гарантированного по исходам и рискам решения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим конкретную двухкритериальную динамическую линейно-квадратичную задачу при неопределенности

$$\langle \Sigma, \mathcal{U}, \mathcal{Z}, \{J_i(\mathrm{U}, \mathrm{Z}, t_0,\ x_0)\}_{i=1,2} \rangle. \tag{1.1}$$

В (1.1) управляемая динамическая система Σ описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = x + u + z,\ x(0) = 0, \tag{1.2}$$

где *скалярные* x — фазовое пространство, u — управляющее воздействие ЛПР (лица, принимающего решение), z — неопределенный фактор; фиксированы момент $\vartheta = 1$ окончания процесса управления и начальная позиция $(t_0, x_0) = (0, 0)$. В (1.1) и далее используются два класса стратегий и неопределенностей.

В *первом* при построении гарантированного решения задачи (1.1) применяется множество позиционных неопределенностей $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z} = \{\mathrm{Z} \div z(t, x) | z(t, x) = Q(t)x + q(t) \qquad \forall Q(\cdot),\ q(\cdot) \in C[0, \vartheta]\} \tag{1.3}$$

и множество $\mathcal{U}$ позиционных стратегий U:

$$\mathcal{U} = \{\mathrm{U} \div u(t, x) | u(t, x) = P(t)x + p(t) \qquad \forall P(\cdot),\ p(\cdot) \in C[0, \vartheta]\}. \tag{1.4}$$

Во *втором* при построении функции риска, используется множество $\mathcal{Z}_t$ программных неопределенностей Z_t:

$$\mathcal{Z}_t = \{\mathrm{Z}_t \div z[t] | \dot{z}[t] = z[t] + \cos(t) \quad \forall z[t_0] \in \mathbb{R}^1\} \tag{1.5}$$

и множество $\mathcal{U}_z$ позиционных контрстратегий U_z :

$$\mathcal{U}_z = \{\mathrm{U}_z \div u(t,x,z[t]) | u(t,x,z[t]) = P(t)x + p(t)\}. \tag{1.6}$$

В (1.3), (1.4), (1.6) могут применятся любые скалярные непрерывные на $[0,1]$ функции $P(t), Q(t), p(t), q(t)$ — за счет этого и получаются приведенные выше множества; в (1.5) множество $\mathcal{Z}_t$ образуется за счет всевозможных скалярных величин $z[t_0] \in \mathbb{R}^1$. Отметим, что в задаче прогнозирования (или планирования) неопределенностью может являться цена выпускаемой продукции $z[t]$ на некотором промежутке времени $[t_0, \vartheta]$. В этом случае диффренциальное уравнение

$$\dot{z} = -z + b(t),\ z[t_0] \in R^1$$

представляет собой модель Эванса установления равновесной цены [6. С. 58-59], а $z[t_0]$ учитывает возможные скачки цен на рынке сбыта до момента времени t_0.

Наконец, отметим, что в (1.6) используется $z[t]$ такое, что для $\mathrm{Z}_t \div z[t]$ имеет место включение $\mathcal{Z}_t \subset \mathcal{Z}$.

Процесс принятия решения в задаче (1.1) происходит следующим образом: ЛПР выбирает конкретную стратегию

$$\mathrm{U} \div u(t,x) = P(t)x + +p(t), \mathrm{U} \in \mathcal{U}.$$

Независимо от его действий в задаче (1.1) реализуется некоторая конкретная неопределенность

$$\mathrm{Z} \in \mathcal{Z},\, \mathrm{Z} \div z(t,x) = Q(t,x)x + q(t).$$

Затем находится решение $x(t)$, $t \in [0,1]$ уравнения

$$\begin{gathered} \dot{x} = x + u(t,x) + z(t,x) = \\ +[1 + P(t) + Q(t)]x + [p(t) + q(t)], \quad x(t_0) = x_0 \end{gathered} \tag{1.7}$$

и с помощью найденного $x(t)$ формируются реализации

$$u[t] = P(t)x(t) + p(t)$$

выбранной ЛПР стратегии и $z[t] = Q(t)x(t) + q(t)$, появившейся в системе независимо от его действий неопределенности. Наконец, на всех возможных тройках $(x(t), u[t], z[t] | t \in [0,1])$ определены два критерия, характеризующие качество функционирования управляемой системы Σ:

$$\begin{gathered} J_1(\mathrm{U}, \mathrm{Z}, t_0, x_0) = \\ = -x^2(1) + \int\limits_0^1 \{-2u^2[t] + z^2[t] + 2u[t]z[t]\} dt, \\ J_2(\mathrm{U}, \mathrm{Z}, t_0, x_0) = \\ = -x^2(1) + \int\limits_0^1 \{-u^2[t] + 2z^2[t] + 2u[t]x(t)\} dt. \end{gathered} \tag{1.8}$$

На ґсодержательном уровнеЄ задачей ЛПР является выбор такой стратегии $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$, при которой оба критерия принимали бы возможно большие значения, а их функции риска (определены ниже) — возможно меньшие. При этом ЛПР вынужден учитывать возможность реализации любой неопределенности $\mathrm{Z} \in \mathcal{Z}$.

Процедура принятия решения в задаче (1.1), где $\mathcal{U}$ заменено на $\mathcal{U}_z$, а $\mathcal{Z}$ — на $\mathcal{Z}_t$, происходит аналогичным образом. Отличие лишь в том, что ЛПР выбирает конкретную контрстратегию $\mathrm{U}_z \in \mathcal{U}_z$, одновременно реализуется программная неопределенность $\mathrm{Z}_t \in \mathcal{Z}_t$, заранее известная ЛПР

$$(\mathrm{Z}_t \div z[t], u(t, x(t), z[t]) = P(t)x + p(t))$$

и тогда система (1.7) преобразуется в

$$\dot{x} = x + u(t, x, z[t]) = [1 + P(t)]x + p(t) + z[t], \; x(0) = 0. \tag{1.9}$$

С помощью решения $x(t)$, $t \in [0,1]$, уравнения (1.9) формируются реализации $u[t] = u(t, x(t), z[t]) = P(t)x(t) + p(t)$ и на всевозможных тройках $(x(t), u[t], z[t] | t \in [0,1])$ заданы функционалы (1.8).

2. Построение функции риска

Для каждого $i = 1,2$ рассмотрим вспомогательную однокритериальную динамическую линейно-квадратичную задачу при неопределенности

$$\langle \Sigma, \mathcal{U}_z, \mathcal{Z}_t, J_i(\mathrm{U}_z, \mathrm{Z}_t, t_0, x_0)\rangle, \tag{2.1}$$

где Σ та же, что и в (1.1), множества $\mathcal{U}_z$ и Z_t определены в (1.6) и (1.5) соответственно, критерии $J_i(\mathrm{U}_z, \mathrm{Z}_t\,,\ t_0, x_0)$, $(i = 1,2)$ заданы в (1.8).

При построении функции риска по i-му критерию (1.8) прежде всего необходимо решить следующую вспомогательную оптимизационную задачу:

найти контрстратегию $\mathrm{U}_z^{(i)} \in \mathcal{U}_z$, удовлетворяющую условию:

$$\max_{\mathrm{U}\in\mathcal{U}} J_i(\mathrm{U}_z, \mathrm{Z}_t, t_0, x_0) = J_i(\mathrm{U}_z^{(i)}, \mathrm{Z}_t, t_0, x_0) = J_i[\mathrm{Z}_t, t_0, x_0], \tag{2.2}$$

при ограничениях (1.2), любых $\mathrm{Z}_t \in \mathcal{Z}_T$ и всех начальных позициях $(t_0, x_0) \in [0,1) \times \mathbb{R}^1$.

Затем, следуя идеям принципа минимаксного сожаления Севиджа [4], функция риска $\Phi_i(\mathrm{U}, \mathrm{Z}, t_0, x_0)$ по i-му критерию J_i определяется следующим равенством:

$$\Phi_i(\mathrm{U}, \mathrm{Z}, t_0, x_0) = J_i[\mathrm{Z}, t_0, x_0] - J_i(\mathrm{U}, \mathrm{Z}, t_0, x_0). \tag{2.3}$$

Она численно оценивает риск (сожаление) ЛПР в том, что при реализации неопределенности Z_t он (исходя из наличия не одного, а двух различных критериев) выбирает и использует стратегию U , а не ґсамую хорошую для негоЄ контрстратегию $\mathrm{U}_z^{(i)}$, удовлетворяющую условию (2.2).

При нахождении $U_z^{(i)}$ из (2.2) используется метод динамического программирования в следующей формулировке.

Введем функции

$$W_1(t, x, u, z, V_1) = \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_1}{\partial x}(x + u + z) + \\ + \frac{\partial V_1}{\partial z}(-z + \cos(t)) - 2u^2 + z^2 + 2uz,$$

$$W_2(t,x,u,z,V_2) = \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial x}(x+u+z) + \\ + \frac{\partial V_2}{\partial z}(-z+\cos(t)) - u^2 + 2z^2 + 2ux. \tag{2.4}$$

У т в е р ж д е н и е 2.1. *Пусть существуют*

a) функции $u^{(i)}(t,x,z,V_i)$, $(i=1,2)$,

b) непрерывно дифференциируемые функции $V_i(t,x,z)$, $(i=1,2)$ *такие, что*

1°) *при всех* $(x,z)\in\mathbb{R}^2$

$$V_i(1,x,z) = -x^2, (i=1,2), \tag{2.5}$$

2°) *для любых* $(t,x,z,V_i)\in[0,1]\times\mathbb{R}^3$ $(i=1,2)$

$$\max_u W_i(t,x,u,z,V_i) = W_i(t,x,u^{(i)}(t,x,z,V_i),z,V_i), \tag{2.6}$$

3°) *для всех* $(t,x,z)\in[0,1]\times\mathbb{R}^2$

$$W_i(t,x,u^{(i)}(t,x,z,V_i(t,x,z)),z,V_i(t,x,z)) = 0, \quad (i=1,2) \tag{2.7}$$

4°) *функция* $u^{(i)}(t,x,z,V_i(t,x,z)) = u^{(i)}[t,x,z]$ *такова, что контрстратегия* $\mathrm{U}_z^{(i)} \div u^{(i)}[t,x,z]$ *принадлежит* $\mathcal{U}_z$.

Тогда контрстратегия $\mathrm{U}_z^{(i)}$ *удовлетворяет первому равенству из* (2.2) *при ограничениях* (1.2), *где* $x(t_0)=x_0$, *любых* $\mathrm{Z}_t\in\mathcal{Z}_t$ *и всех* $(t_0,x_0)\in[0,1)\times R^1$.

С помощью этих достаточных условий найдем явный вид контрстратегии $U_z^{(i)}$. С учетом (2.4), достаточные условия существования $u^{(i)}(t,x,z,V_i)$ в (2.6) примут вид:

$$\frac{\partial W_i}{\partial u}\Big|_{u^{(i)}(t,x,z,V_i)} = 0; \quad \frac{\partial^2 W_i}{\partial u^2}\Big|_{u^{(i)}(t,x,z,V_i)} < 0, \quad (i=1,2). \tag{2.8}$$

Неравенство из (2.8) имеют место, а из равенства в (2.8) получаем

$$u^{(1)}(t,x,z,V_1) = \frac{1}{4}\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{1}{2}z; \quad u^{(2)}(t,x,z,V_2) = \frac{1}{2}\frac{\partial V_2}{\partial x} + x \tag{2.9}$$

Ищем теперь решение (2.7) с граничным условием (2.5) в виде $(i=1,2)$.

$$V_i(t,x,z) =$$
$$= \Theta_i(t)x^2 + 2\Xi_i(t)xz + \mathcal{X}_i(t)z^2 + \xi_i(t)x + 2\eta_i(t)z + \omega_i(t). \quad (2.10)$$

Подставляя (2.10), (2.9) в (2.7), (2.5) и приравнивая коэффициенты при x^2, z^2, xz, x, z и свободные члены, получаем, что (2.7), (2.5) имеют место, если $\Theta_i(t)$, $\Xi_i(t)$, $\mathcal{X}_i(t)$, $\xi_i(t)$, $2\eta_i(t)$, $\omega_i(t)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot\Theta_1 + 2\Theta_1 + \dfrac{1}{2}\Theta_1^2 = 0,\ \Theta_1(1) = -1; & (2.11a) \\ \dot\Xi_1 + \dfrac{1}{2}\Theta_1\Xi_1 + \dfrac{3}{2}\Theta_1 = 0,\ \Xi_1(1) = 0; & (2.11b) \\ \dot{\mathcal{X}}_1 - 2\mathcal{X}_1 + 2\Xi_1 + \dfrac{(\Xi_1+1)^2}{2} + 1 = 0, \mathcal{X}_1(1) = 0; & \\ \dot\xi_1 + (1 + \dfrac{1}{2}\Theta_1)\xi_1 + \Xi_1 \cos t = 0,\ \xi_1(1) = 0; & (2.11c) \\ \dot\eta_1 - \eta_1 + \mathcal{X}_1 \cos t + \dfrac{1}{2}(\Xi_1 + 3)\xi_1 = 0,\ \eta_1(1) = 0; & \\ \dot\omega_1 - \eta_1 \cos t + \dfrac{1}{2}\xi_1^2 = 0,\ \omega_1(1) = 0; & \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} \dot\Theta_2 + 2\Theta_2 + (\Theta_2+1)^2 = 0,\ \Theta_2(1) = -1; & (2.12a) \\ \dot\Xi_2 + (1+\Theta_2)\Xi_2 + \Theta_2 = 0,\ \Xi_2(1) = 0; & (2.12b) \\ \dot{\mathcal{X}}_2 - 2\mathcal{X}_2 + 2\Xi_2 + \Xi_2^2 + 2 = 0, \mathcal{X}_2(1) = 0; & \\ \dot\xi_2 + (2+\Theta_2)\xi_2 + \Xi_2 \cos t = 0,\ \xi_2(1) = 0; & (2.12c) \\ \dot\eta_2 - \eta_2 + \mathcal{X}_2 \cos t + (\Xi_2 + 1)\xi_2 = 0,\ \eta_2(1) = 0; & \\ \dot\omega_2 - 2\eta_2 \cos t + \xi_2^2 = 0,\ \omega_2(1) = 0. & \end{cases} \quad (2.12)$$

Первые уравнения в приведенных выше системах представляют дифференциальные уравнения типа Риккати. Найдя их решения $\Theta_i(t)$, $t \in [0,1]$, и подставив $\Theta_i = \Theta_i(t)$, $(i=1,2)$ во второе и четвертое уравнение этих систем, приходим к линейным неоднородным уравнениям с непрерывными коэффициентами относительно $\Xi_i(t)$, $\xi_i(t)$, $(i = 1, 2)$. Подставляя решения $\Theta_i(t)$, $\Xi_i(t)$, $\xi_i(t)$, $(i = 1, 2)$ в (2.10), (2.9), получаем контрстратегии

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_z^{(1)} \div u^{(1)}[t, x, z] &= u^{(1)}(t, x, z, V_1(t, x, z)) = \\ &= \frac{1}{2}[\Theta_1(t)x + (\Xi_1(t) + 1)z + \xi_1(t)], \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_z^{(2)} \div u^{(2)}[t, x, z] &= u^{(2)}(t, x, z, V_2(t, x, z)) = \\ &[\Theta_2(t) + 1]x + \Xi_2(t)z + \xi_2(t)]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Очевидно включение $\mathrm{U}_z^{(i)} \in \mathcal{U}_z$, $(i = 1, 2)$. По утверждению 2.1 определенные в (2.17) и (2.19) контрстратегии решают задачу (2.2). Далее рассмотрим зависимости основных параметров данной системы от времени $t \in [0, 1]$ и от начального значения $z[t_0] = z_0 \in [-1, 1]$. График зависимости решения $z(t, z_0)$ уравнения $\dot{z} = -z + \cos t$ от t и z_0 приведен на рис. 1.

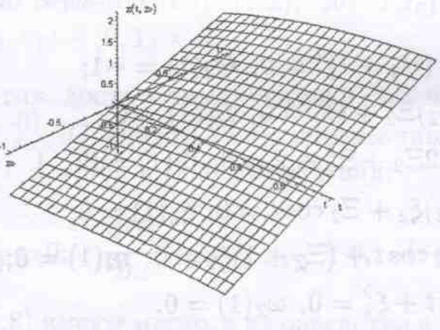

Рис. 1

График зависимости решения $x^{(1)}(t, z_0)$ уравнения

$$\dot{x} = x + u^{(1)}[t, x, z[t]] + z[t] =$$
$$[1 + \frac{1}{2}\Theta_1(t)]x + \frac{1}{2}[3 + \Xi_1(t)]z[t] + \frac{1}{2}\xi_1(t),\ x^{(1)}(0, z_0) = 0$$

от t и z_0, здесь $z[t] = z(t, z_0)$ взято из рис. 1, приведен на рис. 2.

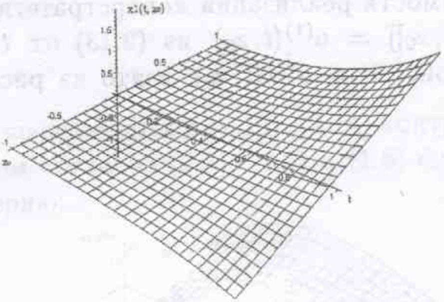

Рис. 2

График зависимости решения $x^{(2)}(t, z_0)$ уравнения

$$\dot{x} = x + u^{(2)}[t, x, z[t]] + z[t] =$$
$$= [2 + \Theta_2(t)]x + [1 + \Xi_2(t)]z[t] + \xi_2(t),\ x^{(2)}[0,\ z_0] = 0$$

от t и z_0, здесь ($z[t] = z(t, z_0)$ взято из рис. 1) приведен на рис. 3.

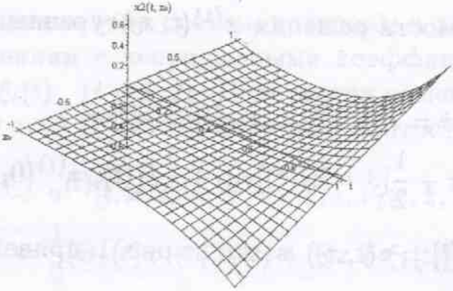

Рис. 3

График зависимости реализации контрстратегии $u^{(1)}[t, x^{(1)}(t, z_0), z[t, z_0]] = u^{(1)}(t, z_0)$ из (2.13) от t и z_0, здесь $z(t, z_0)$ взято из рис. 1, а $x^{(1)}(t, z_0)$ взято из рис. 2, приведен на рис. 4.

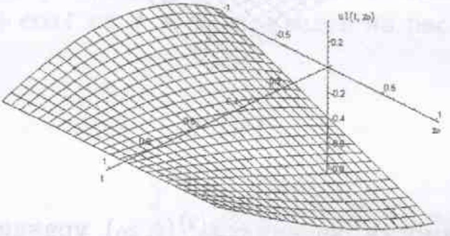

Рис. 4

График зависимости реализации контрстратегии

$$u^{(2)}[t, x^{(1)}(t, z_0), z[t, z_0]] = u^{(2)}(t, z_0)$$

из (2.14) от t и z_0, здесь $z(t, z_0)$ взято из рис. 1, а $x^{(2)}(t, z_0)$ взято из рис. 3, приведен на рис. 5.

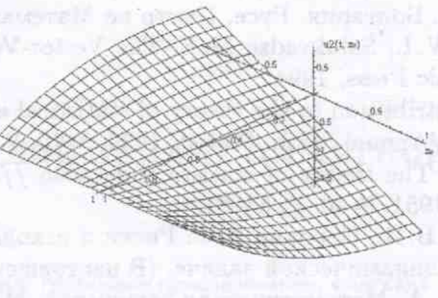

Рис. 5

С помощью построенных в (2.13), (2.14) контрстратегий $U_z^{(i)}$, $(i = 1, 2)$ найдем согласно (2.3), (2.2) и (1.8) функции риска по каждому критерию:

$$\Phi_1(\mathrm{U}, \mathrm{Z}, t_0, x_0) =$$

$$\int_0^1 \{-\frac{1}{2}\Theta_1^2(t)x^2(t) - \Theta_1(t)\Xi_1(t)x(t)z(t) + \frac{1}{2}[1 - \Xi_1^2]z^2[t] -$$

$$-\Theta_1(t)\xi_1(t)x(t) - \Xi_1(t)\xi_1(t)z[t] - \frac{1}{2}\xi_1^2(t) + 2u^2[t] - 2u[t]z[t]\}dt$$

$$\Phi_2(\mathrm{U}, \mathrm{Z}, t_0, x_0) =$$

$$\int_0^1 \{[1 - \Theta_2^2(t)]x^2(t) - 2\Theta_2(t)\Xi_2(t)x(t)z(t) - \Xi_2^2 z^2[t] -$$

$$-2\Theta_2(t)\xi_2(t)x(t) - 2\Xi_2(t)\xi_2(t)z[t] - \xi_2^2(t) + u^2[t] - u[t]x(t)\}dt.$$

Автор благодарит профессора В. И. Жуковского за постановку задачи и обсуждение работы.

Список литературы

1. Жуковский В. И., Дочев Д. Т. Векторная оптимизация динамических систем. Болгария. Русе: Центр по Математике, 1981.
2. Zhukovskiy V. I., Salukvadze M. E. The Vector-Valued Maximin. N. Y. etc.: Academic Press, 1994.
3. Wald A. Contribution to the theory of statistical estimation and testing hypothesis //Annual Math. Statist. 1939. № 10. P. 299–326.
4. Savege L. Y. The theory of statistical decision //J. American Statistic Association 1951. № 46. P. 55–67.
5. Жуковский В. И., Сорокин К. С. Риски и исходы в одной многокритериальной динамической задаче. (В настоящем сборнике.)
6. Колемаев В. А. Математическая экономика. М.: ЮНИТИ, 2002.
7. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.:Наука, 1982.
8. Жуковский В. И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. М.: МНИИПУ, 1997.
9. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: ГИФМЛ, 1961.