

УДК 517.934

© Л.С. Чиркова

lmvstk@udm.ru

УБЕГАНИЕ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О «МЯГКОЙ ПОИМКЕ»

Ключевые слова: групповое преследование, «мягкая» поимка.

Abstract. It is proved the possibility of an escape of the «soft» meeting a inertion evader of group inertion objects.

Введение

Рассматривается задача о «мягкой» поимке группой инерционных преследователей одного инерционного убегающего, при условии, что динамические возможности игроков одинаковы, а корни характеристического уравнения вещественны и отрицательные. При условии дискриминации преследователей доказана возможность уклонения от встречи.

В случае, если корни характеристического уравнения нулевые, задача рассматривалась Р. П. Ивановым [1].

Задача о «мягкой» поимке группой преследователей одного убегающего в примере Л. С. Понтрягина при одинаковых динамических возможностях и дискриминации убегающего рассматривалась в [2].

Статья примыкает к исследованиям [3-7].

1. Постановка задачи

В пространстве \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $k+1$ лиц: k преследователей P_1, \dots, P_k и убегающий E .

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i + a\dot{x}_i + bx_i &= u_i, & \|u_i\| &\leq 1, \\ x_i(0) &= x_i^0, & \dot{x}_i(0) &= \dot{x}_i^0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Закон движения убегающего E имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + a\dot{y} + by &= v, & \|v\| &\leq 1, \\ y(0) &= y^0, & \dot{y}(0) &= \dot{y}^0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В уравнениях (1.1), (1.2) константы a, b такие, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$, λ_1, λ_2 — отрицательные вещественные корни характеристического уравнения $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. И пусть для определенности $\lambda_1 < \lambda_2$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Говорят, что в дифференциальной игре (1.1), (1.2) возможно убежание, если существует измеримая функция $v(t)$, $\|v\| \leq 1$, $t \geq 0$, что при любых измеримых $u_i(t)$, $\|u_i\| \leq 1$, $i = 1, \dots, k$, $t \geq 0$, пара $(x_i(t), y(t))$ для $t \geq 0$ не попадает в терминальное множество

$$M = \{x_i(t) = y(t), \dot{x}_i(t) = \dot{y}(t), t > 0\}.$$

При этом в момент $t \geq 0$ управление убегающего формируется на основе информации

$$(y(s), \dot{y}(s), x_1^0, \dot{x}_1^0, \dots, x_k^0, \dot{x}_k^0), s \leq t$$

и значениях $u_i(t)$, $i = 1, \dots, k$, в тот же момент времени. Управление преследователей формируется на основе информации о состоянии

$$(y(t), \dot{y}(t), x_1(t), \dot{x}_1(t), \dots, x_k(t), \dot{x}_k(t))$$

дифференциальной игры (1.1), (1.2) в момент t .

Перейдем от уравнений (1.1), (1.2) к системам

$$\begin{cases} \dot{x}_i^1 = x_i^2, & x_i^1(0) = x_i^{10}, \\ \dot{x}_i^2 = -ax_i^2 - bx_i^1 + u_i, & x_i^2(0) = x_i^{20}. \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = y^2, & y^1(0) = y^{10}, \\ \dot{y}^2 = -ay^2 - by^1 + v, & y^2(0) = y^{20}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Пусть $z_i^1 = x_i^1 - y^1$, $z_i^2 = x_i^2 - y^2$. Получаем систему

$$\begin{cases} \dot{z}_i^1 = z_i^2, & z_i^1(0) = z_i^{10}, \\ \dot{z}_i^2 = -az_i^2 - bz_i^1 + u_i - v, & z_i^2(0) = z_i^{20}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Обозначим через $z^0 = (z_1^{10}, z_1^{20}, \dots, z_k^{10}, z_k^{20})$ начальное положение в системе (1.5), через U_δ - δ -окрестность начала координат,

$$U_\delta = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq \delta\}.$$

$r(x, y)$ — евклидово расстояние между точками x и y .

2. Решение задачи

Теорема 2.1. *В дифференциальной игре (1.1), (1.2) возможно убежание.*

Доказательство. Поскольку начальная позиция уклоняющегося игрока не совпадает с начальной позицией любого из догоняющих, то из-за конечности числа игроков всегда можно найти такое двумерное подпространство пространства \mathbb{R}^{2n} , что оно содержит начальную позицию уклоняющегося игрока и что проекции начальных позиций догоняющих на это подпространство не совпадали с начальной позицией уклоняющегося. Считаем $z_i^1, z_i^2 \in \mathbb{R}^1$.

Исследуем поведение траекторий системы (1.5) при постоянной функции $(u_i - v)(t) = K$, $K \in [-2, 2]$. Система имеет точку покоя $(\frac{K}{b}, 0)$.

Обозначим \tilde{a} прямую, заданную уравнением $z^2 = \lambda_2 z^1 - \frac{\lambda_2 K}{b}$, которая является наклонной асимптотой для траекторий системы (1.5).

Исследуем знак производных \dot{z}^2, \dot{z}^1 . Производная \dot{z}^2 меняет знак при пересечении с прямой l , заданной уравнением

$-az^2 - bz^1 + K = 0$. Точка $(\frac{K}{b}, 0)$ — точка пересечения прямой l и асимптоты \bar{a} . \dot{z}^1 , схематически изобразим. Тогда поведение траекторий системы (1.5) описывается следующим образом.

Пусть $K \geq 0$. Возьмем точку, принадлежащую первой четверти. Тогда, учитывая, что $a \geq 0$, $b \geq 0$, $\|K\| \leq 2$, $-az^2 - bz^1 + K \leq 0$ и, следовательно, функция $z^2(t)$ в первой четверти на бесконечности убывает. $z^2 \geq 0$, поэтому функция $z^1(t)$, напротив, возрастает.

Функция z^1 возрастает до тех пор, пока не пересечет ось $0z^1$. Далее $z^2 \leq 0$ и функция $z^1(t)$ убывает. Функция $z^2(t)$ убывает до тех пор, пока траектория не пересечет прямую l . В точке пересечения $\dot{z}^2 = 0$.

Далее функция $z^2(t)$ возрастает вдоль асимптоты \bar{a} . Функция $z^1(t)$ убывает до тех пор, пока траектория не попадет в «узел» (рис. 2.1).

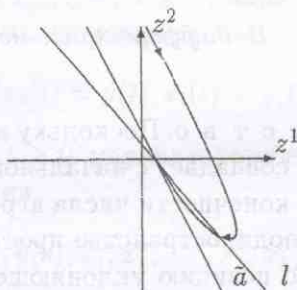


Рис. 2.1

Затем z^2 меняет знак на противоположный, а следовательно, меняется знак производной \dot{z}^1 (рис. 2.2).

Функция $z^2(t)$ в третьей четверти на бесконечности возрастает. Функция $z^1(t)$ имеет отрицательную производную $\dot{z}^1 = z^2$, $z^2 \leq 0$, поэтому она в III четверти убывает.

После пересечения траектории с осью $0z^1$ производная \dot{z}^1 меняет знак, тогда $z^1(t)$ будет убывать. Функция $z^2(t)$ не меняет характера до тех пор, пока траектория не пересечет прямую l . В точке пересечения $\dot{z}^2 = 0$. Далее $z^2(t)$ убывает, $z^1(t)$ не меняет

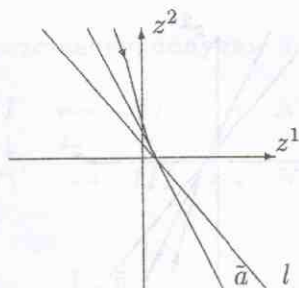


Рис. 2.2

характера — тоже убывает. Таким образом, траектория попадает в «узел» (рис. 2.3).

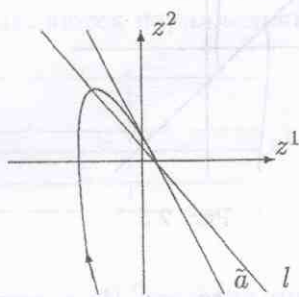


Рис. 2.3

Вдоль асимптоты \tilde{a} слева также существует траектория, которая не меняет характера возрастания-убывания: начиная с бесконечности $z^2(t)$ возрастает, $z^1(t)$ — убывает (рис. 2.4).

Используя такие же рассуждения, получим вид кривой при $K \leq 0$ (рис. 2.5).

Пусть теперь $\{(z^{10}, z^{20})\}_i$ — начальные условия в дифференциальной игре (1.5).

Рассмотрим возможные «передвижения» точки, траектория движения которой задана системой (1.5). Пусть $K \geq 0$, $s \in \{1, \dots, m\}$. Обратимся к схематическому графику траектории системы. Если точка (z^1, z^2) из первой четверти, то она, двигаясь по траектории, заданной системой (1.5), может попасть

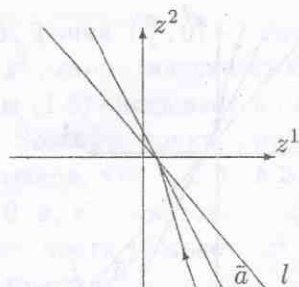


Рис. 2.4

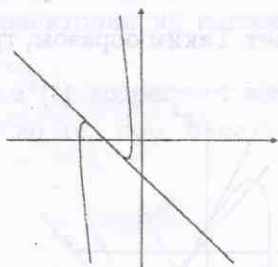
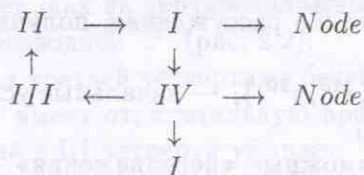


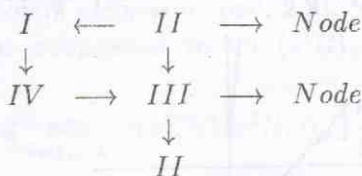
Рис. 2.5

в «узел» или в четвертую четверть. Из четвертой четверти можно попасть в первую или третью четверть, а также в «узел». Из третьей четверти можно попасть во вторую, из второй — в первую. Отообразим возможные «передвижения» точки (z^1, z^2) при $K \geq 0$ диаграммой (2).



Пусть теперь $K \leq 0$. Тогда из первой четверти можно попасть в четвертую, из четвертой — в третью, из третьей — во вторую или в «узел», из второй — в первую, третью четверть

или в «узел». Соответственно, получим диаграмму (2).



Пусть $K = 0$. Система (1.5) тогда примет вид:

$$\begin{cases} \dot{z}^1 = z^2, \\ \dot{z}^2 = 0. \end{cases}$$

Траекториями системы (1.5) в случае, если разность управлений - ноль, являются параллельные прямые (рис. 2.6).

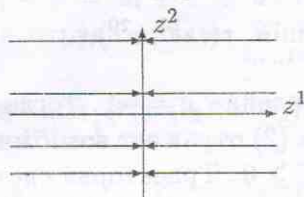


Рис. 2.6

При $K = 0$ в начало координат попасть нельзя. Если разность управлений положительная, то в начало координат можно попасть из четвертой четверти (рис. 2.7).

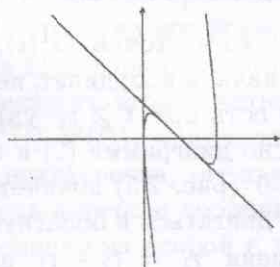


Рис. 2.7

При $K \leq 0$ также существует траектория, проходящая через начало координат. Она начинается во второй четверти (рис. 2.8).

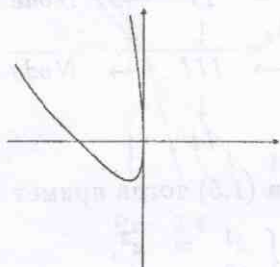


Рис. 2.8

Пусть δ — малое положительное число, такое, что

$$\delta \leq \min_{i=1, \dots, k} r((z^{10}, z^{20})_i).$$

Сначала выберем управление $v = -1$. Тогда $K = u_i - v \geq 0$. Диаграмма (2) отражает возможные «передвижения» точки (z^1, z^2) при $K \geq 0$. Траектория системы для $K \geq 0$ в общем виде описана на рисунках (рис. 2.1-2.4). В начало координат при $K \geq 0$ можно попасть только из четвертой четверти (рис. 2.7). Чтобы не допустить попадания точки $(z^1(t), z^2(t))_{i_1}$ в начало координат выберем $\delta_1 > 0$ такое, что

$$\delta_1 \leq \min_{i=1, \dots, k} (r(z^{10}, z^{20})_i, \left| \frac{K}{b} \right|).$$

И в момент времени $t = t_1$, когда точка $(z^1(t), z^2(t))_{i_1}$ попадет на границу δ_1 -окрестности начала координат, переключим управление v с -1 на $+1$. То есть при $t \geq t_1$ управление $v = 1$. Точка $(z^1(t), z^2(t))_{i_1}$ согласно диаграмме (2) и виду траектории при $K = u_i - v = u_i - 1 \leq 0$ (рис. 2.5) покинет δ_1 -окрестность начала координат и начнет двигаться в обратную сторону.

Через промежуток времени $\tau_1 = t_2 - t_1$ неположительное $K = u_i - v$ может обусловить сближение с другим преследователем, что в плоскости $z^1 0 z^2$ будет выглядеть как приближение

к началу координат. При $K \leq 0$ в начало координат можно попасть только из второй четверти (рис. 2.8). Чтобы не допустить попадания в начало координат точки $(z^1(t), z^2(t))_{i_2}$ выберем δ_2 такое, что

$$\delta_2 \leq \min_{i=1, \dots, k} (r(z^1(t_1), z^2(t_1))_{i_1} | \frac{K}{b} |).$$

И в момент $t = t_2$, когда точка $(z^1(t), z^2(t))_{i_2}$ попадет на границу δ_2 -окрестности начала координат, преклЮчим управление v с $+1$ на -1 . Точка $(z^1(t), z^2(t))_{i_2}$ согласно диаграмме (2) и виду траектории при $K = u_i - v = u_i + 1 \geq 0$ (рис. 2.1-2.4) покинет δ_2 -окрестность начала координат и начнет двигаться в обратную сторону.

Теперь $K = u_i - v = u_i + 1 \geq 0$. Поступаем так же, как описано выше при неотрицательном K . Выберем

$$\delta_3 \leq \min_{i=1, \dots, k} (r(z^1(t_2), z^2(t_2))_{i_2} | \frac{K}{b} |).$$

И в момент времени $t = t_3$, когда $(z^1(t), z^2(t))_{i_3} \in \partial U_{\delta_3}$, переключим управление v с -1 на $+1$. Тогда K снова становится неположительным.

Таким образом, мы переключаем управление, если видим, что существует I такое, что точка $(z^1(t), z^2(t))_I$ принадлежит границе δ -окрестности начала координат. Таких переключений будет счетное множество, так как преследователей конечное число. В результате такой стратегии все номера $\{1, \dots, k\}$ разделятся на три группы. Одна из которых состоит из номеров i таких, что $(z^1(t), z^2(t))_i$ принадлежит второй четверти, другая — из номеров j таких, что $(z^1(t), z^2(t))_j$ принадлежит четвертой четверти. Третья группа нам неинтересна, так как из третьей и первой четверти нельзя попасть в начало координат.

Так как одновременно из второй и четвертой четвертей при таком управлении невозможно двигаться к началу координат, то тем самым мы будем уводить от границы δ -окрестности начала координат то одну, то другую группу. Теорема доказана.

Список литературы

1. Иванов Р. П. К вопросу о мягкой поимке в дифференциальных играх со многими догоняющими и одним уклоняющимся игроком // Труды Математического института АН СССР. 1988. Т. 185. С. 74-84.
2. Петров Н. Н. «Мягкая» поимка в примере Л. С. Понтрягина со многими участниками // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 759-770.
3. Черноусько Ф. Л. Одна задача уклонения от многих преследователей // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14-24.
4. Прокопович П. В., Чикрий А. А. Одна дифференциальная игра убегающего // Доклады АН УССР. Сер. А. 1989. С. 71-74.
5. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. №3. С. 145-146.
6. Иванов Р. П. Простое преследование на компакте // Докл. АН СССР. 1980. Т. 256. №6. С. 1318-1321.
7. Чиркова Л. С. Уклонение от группы инерционных объектов в конусе // Известия ИМИ. 2000. №2(19). С. 59-73.