Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2004. Ґ2(30)

УДК 519.833

© **Ю.Н. Житенева**
molostv@isa.ac.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА С ИЗМЕНЕНИЕМ В ТЕЧЕНИЕ ИГРЫ ЦЕЛИ ОДНОГО ИЗ ИГРОКОВ [1]

Ключевые слова: игра, стратегия, равновесная ситуация.

Abstract. A differential linear–quadratic dynamical problem with alternate aim is considered. Guaranty solution is formalized.

1. Математическая модель

Рассмотрим дифференциальную позиционную бескоалиционную линейно–квадратичную игру двух лиц

$$\langle\{1,2\},\Sigma,\mathbf{U_1},\mathbf{U_2},\{\mathbf{J_i}(\mathbf{U},\mathbf{t}_*,\mathbf{x}_*)\}_{\mathbf{i=1,2}}\rangle. \tag{1.1}$$

В этой игре динамика управляемой системы Σ описывается обыкновенным линейным векторным диференциальным уравнением

$$\dot{x}=A(t)x+u_1+u_2,\ \ x(t_*)=x_*, \tag{1.2}$$

где t – текущее время; $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R^n}$ – фазовый вектор, управляющее воздействие i –го игрока $u_i\in\mathbf{R^n}$ $(i=1,2)$; элементы $n\times n$ – матрицы $A(t)$ предполагаются непрерывными на $[0,\vartheta]$ (обозначаем этот факт $A(\cdot)\in C_{n\times n}[0,\vartheta]$), фиксированы момент окончания игры $\vartheta>0$ и начальная позиция $(t_*,x_*)\in[0,\vartheta)\times\mathbf{R^n}$.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (02–01–00612).

Множество стратегий U_i у i–го игрока

$$\mathbf{U_i} = \{\mathbf{U_i} \div \mathbf{u_i}(\mathbf{t},\mathbf{x})|\mathbf{u_i}(\mathbf{t},\mathbf{x}) = \mathbf{Q_i}(\mathbf{t})\mathbf{x} + \mathbf{q_i}(\mathbf{t}), \tag{1.3}$$

$$\forall Q_i(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta], \quad q_i(\cdot) \in C_n[0,\vartheta]\} \ \ (i = 1,2).$$

Таким образом, выбор конкретной стратегии U_i из множества $\mathbf{U_i}$ сводится к выбору конкретных непрерывных (по t) матрицы $Q_i(t)$ и вектора $q_i(t)$.

Партия игры развертывается следующим образом. Игроки независимо друг от друга выбирают и используют свои конкретные стратегии $U_1 \in \mathbf{U_1}$ и $U_2 \in \mathbf{U_2}$. В результате складывается ситуация $U = (U_1, U_2) \in \mathbf{U_1} \times \mathbf{U_2} = \mathbf{U}$. Тогда ґразвитие игры во времениЄ происходит в соответствии с векторным линейным неоднородным дифференциальным уравнением с непрерывными (по t) коэффициентами

$$\dot{x} = [A(t) + Q_1(t) + Q_2(t)]x + q_1(t) + q_2(t), \quad x(t_*) = x_*.$$

Решение этого уравнения $x(t)$ существует, единственно, непрерывно дифференцируемо и продолжимо на интервал $[t_*, \vartheta]$. Оно ґпорождаетЄ реализации выбранных игроками стратегий $u_i[t] = u_i(t, x(t)) = Q_i(t)x(t) + q_i(t) \quad (i = 1,2)$. На полученных в итоге наборах $(x(t), u_1[t], u_2[t])$, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$, определена функция выигрыша i–го игрока, заданная следующим квадратичным функционалом

$$\begin{gathered} J_i(U, t_*, x_*) = \\ = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} (u_1'[t]D_{i1}u_1[t] + u_2'[t]D_{i2}u_2[t])dt, \end{gathered} \tag{1.4}$$

где $n \times n$–матрицы $C_i, \ D_{ij} \ \ (i,j = 1,2)$ постоянны и симметричны; штрих сверху означает операцию транспонирования.

На ґсодержательном уровнеЄ цель 2–го игрока состоит в выборе и использовании стратегии $U_2 \in \mathbf{U_2}$, доставляющей ему наибольший возможный выигрыш $J_2(U, t_*, x_*)$ в сложившейся ситуации U . В отличие от него, 1–й игрок, выбирая свою стратегию $U_1 \in \mathbf{U_1}$, стремится не только достичь максимального собственного выигрыша $J_1(U, t_*, x_*)$, но при этом желает влиять на выигрыш 2–го игрока: за период времени $[t_*, t_1]$ его увеличить, а за промежуток $[t_1, \vartheta]$ уменьшить (насколько это возможно). Причем момент времени $t_1 \in (t_*, \vartheta)$ будем считать фиксированным и заданным до начала игры. Заметим, что игроки не знают о преследуемых друг другом целях.

2. Формализация решения

Формализуем решение игры (1.1).

О п р е д е л е н и е 2.1. *Гарантированным t_1 –равновесием* игры (1.1) назовем пару $(U^*, J^*) \in \mathbf{U} \times \mathbf{R^2}$ такую, что

$$J^* = (J_1(U^*, t_*, x_*), J_2(U^*, t_*, x_*))$$

и для всякой начальной позиции $(t_*, x_*) \in [0, t_1) \times \mathbf{R^n}$ будут выполняться следующие условия:
1^0) при $t \in [t_*, t_1)$ для каждого $U_1 \in \mathbf{U_1}$ несовместна система неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1(U_1, U_2^*, t_*, x_*) > J_1(U^*, t_*, x_*), \\ J_2(U_1, U_2^*, t_*, x_*) > J_2(U^*, t_*, x_*); \end{array} \right. \tag{2.1}$$

2^0) при $t \in [t_1, \vartheta]$ для любых $U_1 \in \mathbf{U_1}$ несовместна система неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1(U_1, U_2^*, t_1, x(t_1, U_1, U_2^*)) > J_1(U^*, t_*, x(t_1, U^*)), \\ J_2(U_1, U_2^*, t_*, x(t_1, U_1, U_2^*)) < J_2(U^*, t_*, x(t_1, U^*)); \end{array} \right. \tag{2.2}$$

3^0) для всех $U_2 \in \mathbf{U_2}$

$$J_2(U_1^*, U_2, t_*, x_*) \leqslant J_2(U^*, t_*, x_*). \tag{2.3}$$

Вектор J^* назовем **векторной гарантией**.

З а м е ч а н и е 2.1. Стратегия 1–го игрока из гарантированного t_1 –равновесия имеет вид

$$U_1^* = \begin{cases} U_{11}^* & \text{при } t \in [t_*, t_1), \\ U_{12}^* & \text{при } t \in [t_1, \vartheta], \end{cases}$$

где U_{11}^* удовлетворяет условию 1^0, а U_{12}^* – условию 2^0 определения. Поэтому будем искать ситуацию $U^* = (U_1^*, U_2^*)$, реализующую гарантированное t_1 –равновесие, в виде

$$U^* = \begin{cases} (U_{11}^*, U_{21}^*) \text{ при } t \in [t_*, t_1), \\ (U_{12}^*, U_{22}^*) \text{ при } t \in [t_1, \vartheta], \end{cases}$$

причем U_{21}^* удовлетворяет условию 3^0 определения 2.1 при $t \in [t_*, t_1)$, а U_{22}^* отвечает этому же условию при $t \in [t_1, \vartheta]$.

З а м е ч а н и е 2.2. Функции выигрыша игроков (1.4) представим в виде

$$J_i(U, t_*, x_*) = \int_{t_*}^{t_1} f_i(t, u, x)dt + \int_{t_1}^{\vartheta} f_i(t, u, x)dt,$$

где

$$f_i(t, u, x) = x'(t)(A'C_i + C_iA)x(t) + 2u_1'[t]C_ix(t) + 2u_2'[t]C_ix(t) +$$
$$+ u_1'[t]D_{i1}u_1[t] + u_2'[t]D_{i2}u_2[t] + \frac{x_*'C_ix_*}{\vartheta - t_*} \quad (i = 1, 2).$$

3. Достаточные условия

Приведем достаточные условия существования гарантированного t_1 –равновесия (U^*, J^*) игры (1.1). Для этого рассмотрим вспомогательную дифференциальную игру

$$\langle \{1, 2\}, \Sigma, \mathbf{U_1}, \mathbf{U_2}, \{\mathbf{J^{(i)}}(\mathbf{U}, \mathbf{t}_*, \mathbf{x}_*)\}_{\mathbf{i=1,2}} \rangle. \qquad (3.1)$$

Эта игра отличается от (1.1) лишь функциями выигрыша игроков

$$J^{(1)}(U,t_*,x_*)=\int_{t_*}^{t_1}\{\alpha f_1(t,u,x)+(1-\alpha)f_2(t,u,x)\}dt+ \\ +\int_{t_1}^{\vartheta}\{\beta f_1(t,u,x)-(1-\beta)f_2(t,u,x)\}dt, \tag{3.2}$$

$$J^{(2)}(U,t_*,x_*)=\int_{t_*}^{t_1}f_2(t,u,x)dt+\int_{t_1}^{\vartheta}f_2(t,u,x)dt,$$

где постоянные $\alpha\in[0,1]$, $\beta\in[0,1]$.

Введем обозначения $(i=1,2)$

$$\begin{aligned} &D_i(\alpha)=\alpha D_{1i}+(1-\alpha)D_{2i},\\ &D_i(\beta)=\beta D_{1i}-(1-\beta)D_{2i},\\ &C_1(\alpha)=\alpha C_1+(1-\alpha)C_2,\\ &C_2(\beta)=\beta C_1-(1-\beta)C_2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

С учетом обозначений (3.3) функция выигрыша $J^{(1)}$ у 1–го игрока из (3.2) примет вид

$$J^{(1)}(U,t_*,x_*)=\int_{t_*}^{t_1}f^{(1)}(t,u,x)dt+\int_{t_1}^{\vartheta}f^{(2)}(t,u,x)dt, \tag{3.4}$$

где

$$\begin{gathered} f^{(1)}(t,u,x)=x'(t)[A'C(\alpha)+C(\alpha)A]x(t)+\\ +2u_1'[t]C(\alpha)x(t)++2u_2'[t]C(\alpha)x(t)+\\ +2u_1'[t]D_1(\alpha)u_1[t]+2u_2'[t]D_2(\alpha)u_2[t]+f_{01},\\ f^{(2)}(t,u,x)=x'(t)[A'C(\beta)+C(\beta)A]x(t)+\\ +2u_1'[t]C(\beta)x(t)+2u_2'[t]C(\beta)x(t)+\\ +2u_1'[t]D_1(\beta)u_1[t]+2u_2'[t]D_2(\beta)u_2[t]+f_{02}, \end{gathered} \tag{3.5}$$

где

$$f_{01}=\frac{x_*'C(\alpha)x_*}{\vartheta-t_*},\quad f_{02}=\frac{x_*'C(\beta)x_*}{\vartheta-t_*}.$$

В качестве решения игры (3.1) будем использовать равновесную по Нэшу ситуацию. Напомним, что ситуация

$$U^e = (U_1^e, U_2^e) \in \mathbf{U_1} \times \mathbf{U_2}$$

называется равновесной по Нэшу в игре (3.1), если при любой начальной позиции $(t_*, x_*) \in [0, t_1) \times \mathbf{R^n}$ будет

$$J^{(1)}(U_1, U_2^e, t_*, x_*) \leqslant J^{(1)}(U^e, t_*, x_*), \ \forall U_1 \in \mathbf{U_1},$$
$$J^{(2)}(U_1^e, U_2, t_*, x_*) \leqslant J^{(2)}(U^e, t_*, x_*), \ \forall U_2 \in \mathbf{U_2}.$$

У т в е р ж д е н и е 3.1. *Равновесная по Нэшу ситуация* U^e *в игре* (3.1) *реализует гарантированное* t_1 *–равновесие игры (1.1), то есть* $U^* = U^e$, $J^* = (J_1(U^e, t_*, x_*), J_2(U^e, t_*, x_*))$.

Для построения гарантированных t_1 –равновесий игры (1.1) воспользуемся методом динамического программирования.
С этой целью введем функции $(i = 1, 2)$

$$W_1^{(1)}(t, x, u, V_1^{(1)}) = \frac{\partial V_1^{(1)}}{\partial t} + [\frac{\partial V_1^{(1)}}{\partial x}]'[Ax + u_1 + u_2] + f^{(1)}(t, u, x),$$

$$W_1^{(2)}(t, x, u, V_1^{(2)}) = \frac{\partial V_1^{(2)}}{\partial t} + [\frac{\partial V_1^{(2)}}{\partial x}]'[Ax + u_1 + u_2] + f^{(2)}(t, u, x),$$

$$W_2^{(i)}(t, x, u, V_2^{(i)}) = \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial t} + [\frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial x}]'[Ax + u_1 + u_2] + f_2(t, u, x)$$

и обозначим

$$V = \begin{cases} (V_1^{(1)}, V_2^{(1)}) \ \text{при}\ t \in [t_*, t_1), \\ (V_1^{(2)}, V_2^{(2)}) \ \text{при}\ t \in [t_1, \vartheta]. \end{cases}$$

У т в е р ж д е н и е 3.2. *Пусть существуют функции* $u_{i1}(t, x, V)$, *определенные при* $t \in [0, t_1]$, $u_{i2}(t, x, V)$, *определенные при* $t \in [t_1, \vartheta]$ $(i = 1, 2)$, *и непрерывно дифференцируемые*

скалярные функции $V_i^{(j)}(t,x)$ $(i,j=1,2)$ *такие, что*
1) *при всех* $x \in \mathbf{R^n}$

$$V_i^{(2)}(\vartheta,x)=0,\ V_i^{(1)}(t_1,x)=V_i^{(2)}(t_1,x);$$

2) *для всех* $t \in [t_1,\vartheta]$, $x \in \mathbf{R^n}$ *и* $V_i^{(2)} \in \mathbf{R}$ $(i=1,2)$

$$\max_{u_1} W_1^{(2)}(t,x,u_1,u_{22}(t,x,V),V_1^{(2)}) =$$
$$= W_1^{(2)}(t,x,u_{12}(t,x,V),u_{22}(t,x,V),V_1^{(2)}),$$
$$\max_{u_2} W_2^{(2)}(t,x,u_{12}(t,x,V),u_2,V_2^{(2)}) =$$
$$= W_2^{(2)}(t,x,u_{12}(t,x,V),u_{22}(t,x,V),V_2^{(2)}),$$

для любых $t \in [0,t_1]$, $x \in \mathbf{R^n}$ *и* $V_i^{(1)} \in \mathbf{R}$ $(i=1,2)$

$$\max_{u_1} W_1^{(1)}(t,x,u_1,u_{21}(t,x,V),V_1^{(1)}) =$$
$$= W_1^{(1)}(t,x,u_{11}(t,x,V),u_{21}(t,x,V),V_1^{(1)}),$$
$$\max_{u_2} W_2^{(1)}(t,x,u_{11}(t,x,V),u_2,V_2^{(1)}) =$$
$$= W_2^{(1)}(t,x,u_{11}(t,x,V),u_{21}(t,x,V),V_2^{(1)});$$

3) *для любых* $x \in \mathbf{R^n}$ *и* $t \in [t_1,\vartheta], i=1,2$

$$W_i^{(2)}(t,x,u_{12}(t,x,V(t,x)),u_{22}(t,x,V(t,x)),V_i^{(2)}(t,x))=0,$$

для всех $x \in \mathbf{R^n}$ *и* $t \in [0,t_1], i=1,2$

$$W_i^{(1)}(t,x,u_{11}(t,x,V(t,x)),u_{21}(t,x,V(t,x)),V_i^{(1)}(t,x))=0,$$

4) $u_{ij}(t,x,V(t,x))=u_{ij}^*(t,x)$, $U_{ij}^* \div u_{ij}^*(t,x)$, $U_{ij} \in \mathbf{U_i}$ $(i,j=1,2)$.

Тогда ситуация

$$U^* = \begin{cases} (U_{11}^*,U_{21}^*) \div (u_{11}^*(t,x),u_{21}^*(t,x)) \text{ при } t \in [t_*,t_1), \\ (U_{12}^*,U_{22}^*) \div (u_{12}^*(t,x),u_{22}^*(t,x)) \text{ при } t \in [t_1,\vartheta] \end{cases} \tag{3.6}$$

реализует гарантированное t_1 *–равновесие игры (1.1) при любых начальных позициях* $(t_*,x_*) \in [0,t_1) \times \mathbf{R^n}$.

У т в е р ж д е н и е 3.3. *Пусть в игре* (1.1) $D_{22} < 0$ *и существуют постоянные* α, $\beta \in [0,1]$ *такие, что*

$$D_1(\alpha) < 0, \ D_1(\beta) < 0,$$

и система

$$\begin{gathered}\dot\theta_1^{(2)} + \theta_1^{(2)}[A - D_1^{-1}(\beta)C_1(\beta) - D_{22}^{-1}C_2] + [A' - C_1(\beta)D_1^{-1}(\beta) - \\ -C_2D_{22}^{-1}]\theta_1^{(2)} - \theta_1^{(2)}D_1^{-1}(\beta)\theta_1^{(2)} + \theta_2^{(2)}D_{22}^{-1}D_2(\beta)D_{22}^{-1}\theta_2^{(2)} + \\ +\theta_2^{(2)}D_{22}^{-1}[D_2(\beta)D_{22}^{-1}C_2 - C_1(\beta)] + [C_2D_{22}^{-1}D_2(\beta) - \\ -C_1(\beta)]D_{22}^{-1}\theta_2^{(2)} + AC_1(\beta) + C_1(\beta)A' - C_1(\beta)D_1^{(-1)}(\beta)C_1(\beta) - \\ -C_1(\beta)D_{22}^{-1}C_2 - C_2D_{22}^{-1}C_1(\beta) + C_2D_{22}^{-1}D_2(\beta)D_{22}^{-1}C_2 = 0_{n\times n}, \\ \theta_1^{(2)}(\vartheta) = 0_{n\times n};\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\dot\theta_2^{(2)} + \theta_2^{(2)}[A - D_1^{-1}(\beta)C_1(\beta) - D_{22}^{-1}C_2] + [A' - C_1(\beta)D_1^{-1}(\beta) - \\ -C_2D_{22}^{-1}]\theta_2^{(2)} - \theta_2^{(2)}D_{22}^{-1}\theta_2^{(2)} + \theta_1^{(2)}D_1^{-1}(\beta)[D_{21}D_1^{-1}(\beta)C_1(\beta) - \\ -C_2] + [C_1(\beta)D_1^{-1}(\beta)D_{21} - C_2]D_1^{-1}(\beta)\theta_1^{(2)} + AC_2 + C_2A' - \\ -C_2D_1^{-1}(\beta)C_1(\beta) - C_1(\beta)D_1^{-1}(\beta)C_2 + \\ +C_1(\beta)D_1^{-1}(\beta)D_{21}D_1^{-1}(\beta)C_1(\beta) - C_2D_{22}^{-1}C_2 = 0_{n\times n}, \\ \theta_2^{(2)}(\vartheta) = 0_{n\times n}\end{gathered}$$

имеет продолжимое на $[\vartheta, t_1]$ *решение* $\theta_1^{(2)}(t)$, $\theta_2^{(2)}(t)$, *а система*

$$\begin{gathered}\dot\theta_1^{(1)} + \theta_1^{(1)}[A - D_1^{-1}(\alpha)C_1(\alpha) - D_{22}^{-1}C_2] + [A' - C_1(\alpha)D_1^{-1}(\alpha) - \\ -C_2D_{22}^{-1}]\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(1)}D_1^{-1}(\alpha)\theta_1^{(1)} + \theta_2^{(1)}D_{22}^{-1}D_2(\alpha)D_{22}^{-1}\theta_2^{(1)} + \\ +\theta_2^{(1)}D_{22}^{-1}[D_2(\alpha)D_{22}^{-1}C_2 - C_1(\alpha)] + [C_2D_{22}^{-1}D_2(\alpha) - \\ -C_1(\alpha)]D_{22}^{-1}\theta_2^{(1)} + AC_1(\alpha) + C_1(\alpha)A' - C_1(\alpha)D_1^{-1}(\alpha)C_1(\alpha) - \\ -C_1(\alpha)D_{22}^{-1}C_2 - C_2D_{22}^{-1}C_1(\alpha) + C_2D_{22}^{-1}D_2(\alpha)D_{22}^{-1}C_2 = 0_{n\times n}, \\ \theta_1^{(1)}(t_1) = \theta_1^{(2)}(t_1);\end{gathered}$$

$$\dot{\theta}_2^{(1)} + \theta_2^{(1)}[A - D_1^{-1}(\alpha)C_1(\alpha) - D_{22}^{-1}C_2] + [A' - C_1(\alpha)D_1^{-1}(\alpha) -$$
$$-C_2D_{22}^{-1}]\theta_2^{(1)} - \theta_2^{(1)}D_{22}^{-1}\theta_2^{(1)} + \theta_1^{(1)}D_1^{-1}(\alpha)[D_{21}D_1^{-1}(\alpha)C_1(\alpha) -$$
$$-C_2] + [C_1(\alpha)D_1^{-1}(\alpha)D_{21} - C_2]D_1^{-1}(\alpha)\theta_1^{(1)} + AC_2 + C_2A' -$$
$$-C_2D_1^{-1}C_1(\beta) - C_1(\alpha)D_1^{-1}(\alpha)C_2 +$$
$$+C_1(\alpha)D_1^{-1}(\alpha)D_{21}D_1^{-1}(\alpha)C_1(\alpha) - C_2D_{22}^{-1}C_2 = 0_{n\times n},$$
$$\theta_2^{(1)}(t_1) = \theta_2^{(2)}(t_1).$$

Тогда ситуация $U^* = (U_1^*, U_2^*)$ *из гарантированного* t_1 *– равновесия имеет вид*

$$U_1^* = \begin{cases} U_{11}^* \div -D_1^{-1}(\alpha)[\theta_1^{(1)}(t) + C_1(\alpha)]x & \textit{при}\ t \in [0, t_1), \\ U_{12}^* \div -D_1^{-1}(\beta)[\theta_1^{(2)}(t) + C_1(\beta)]x & \textit{при}\ t \in [t_1, \vartheta], \end{cases}$$

$$U_2^* = \begin{cases} U_{21}^* \div -D_{22}^{-1}[\theta_2^{(1)}(t) + C_2]x & \textit{при}\ \ t \in [0, t_1), \\ U_{22}^* \div -D_{22}^{-1}[\theta_2^{(2)}(t) + C_2]x & \textit{при}\ \ t \in [t_1, \vartheta]. \end{cases}$$

Автор благодарит проф. В.И. Жуковского за обсуждение работы и замечания.

Список литературы

1. Житенева Ю.Н. Дифференциальная игра с ґсоюзникамиЄ и ґпротивникамиЄ // Проблемы управления и информатики. 1999. Ґ 5. С. 23 - 33.