УДК 517.929.2

© *А. А. Айзикович, Д. С. Кочурова*

О НЕОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Для линейного разностного уравнения третьего порядка получен признак неосцилляции и $(1,2)$-неосцилляции его решений.

Ключевые слова: разностное уравнение, неосцилляция, квазинуль, сопряженное уравнение.

Введение

В дифференциальных уравнениях первой работой, посвященной проблеме распределения нулей решений линейного уравнения третьего порядка, является работа Азбелева Н.В. и Цалюка З.Б. [1], ее продолжением стала работа Zettl A. [2]. В разностных уравнениях изучением распределения квазинулей для частного вида линейного разностного уравнения третьего порядка занимались Henderson J., Peterson A. [3], некоторым распределением квазинулей и нулей для n-го порядка – Krueger R.J. [4]. Работа использует подход, приведенный в [2], и содержит обобщения некоторых теорем из [3] и [4]. Далее рассмотрим разностное уравнение третьего порядка

$$L_3y(t) \equiv y(t+3)+p_2(t)y(t+2)+p_1(t)y(t+1)+p_0(t)y(t) = 0, \quad t \in [0, N-3] \doteq \{0, 1, \ldots, N-3\}\,, \tag{1}$$

где $p_2(t)$, $p_1(t)$, $p_0(t)$ — действительные функции, определенные на множестве $[0, N-3]$ и удовлетворяющие необходимым условием неосцилляции: $p_2(t) < 0$, $p_1(t) > 0$, $p_0(t) < 0$ [5, 6], и сопряженное уравнение к уравнению (1)

$$L_3^*z(t) \equiv p_0(t+3)z(t+3) + p_1(t+2)z(t+2) + p_2(t+1)z(t+1) + z(t) = 0, \quad t \in [0, N-6]. \tag{2}$$

Основными результатами являются признак $(1,2)$-неосцилляции на множестве $[0, N]$ и признак неосцилляции на множестве $[2, N]$ уравнения (1). Также установлены условия связи квазинулей исходного и сопряженного ему уравнения (2).

§ 1. Определения

О п р е д е л е н и е 1. Функция $y(t)$, не равная тождественно нулю, имеет *квазинуль порядка p, $p \geqslant 1$ в точке* $t = 0$, если $y(i) = 0$, $0 \leqslant i \leqslant p-1$, и y имеет *квазинуль порядка p, $p \geqslant 1$ в точке t, $t \leqslant N-p$*, если $y(t) \neq 0$, $(-1)^p y(t)y(t+p) \geqslant 0$, где $y(t+i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant p-1$ [3].

О п р е д е л е н и е 2. Решение $y(t)$ имеет (p,q)*-пару квазинулей*, если в точке t_1 оно имеет квазинуль порядка p, а в точке t_2, $t_2 \geqslant t_1 + p$ квазинуль порядка q, который является первым квазинулем после точки $t_1 + p - 1$ [3].

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $t \in [0, N]$ — некоторая фиксированная точка. *Промежуток $[t, b]$, $b \leqslant N$, в котором нет (p,q)-пары квазинулей решений уравнения* (1), *будем называть промежутком $(p,q)_t$-неосцилляции.* Максимальный при фиксированном t промежуток $(p,q)_t$-неосцилляции обозначим через $[t, a_{pq}(t)]$. Максимальный при фиксированном t промежуток неосцилляции обозначим через $[t, a(t)]$.

§ 2. Признак неосцилляции

Т е о р е м а 1. *Пусть разностное уравнение* (1) *имеет нетривиальное решение $y(t)$ с $(2,1)$-парой квазинулей в точках t_1 и t_2, $t_1 \in [2, N-6]$, $t_2 \in [4, N-4]$, $t_2 \geqslant t_1 + 2$ и t_2 является первым квазинулем $y(t)$ после t_1. Тогда найдется нетривиальное решение уравнения* (2) *с $(1,2)$-парой квазинулей на множестве $t \in [t_1 - 2, t_2 - 1]$.*

Т е о р е м а 2. *Промежуток неосцилляции* $[t, a(t)]$ *для уравнения* (1) *является пересечением промежутков* $[t, a_{12}(t)]$ *и* $[t, a_{21}(t)]$, *то есть* $a(t) = \min(a_{12}(t), a_{21}(t))$.

Т е о р е м а 3. *Если справедливы неравенства*

$$p_0(t) \geqslant -1, \quad p_2(t) \leqslant -3, \quad p_1(t) + p_2(t) \geqslant 0, \quad t \in [0, N-3],$$

то уравнение (1) $(1,2)$*-неосцилляционно на множестве* $[0, N]$.

Запишем предыдущую теорему для сопряженного уравнения (2).

Т е о р е м а 4. *Если справедливы неравенства*

$$p_1(t+2) + 2p_0(t+3) \geqslant 1, \quad p_2(t+1) + p_1(t+2) + p_0(t+3) + 1 \leqslant 0, \quad t \in [0, N-6],$$

то уравнение (2) $(1,2)$*-неосцилляционно на множестве* $t \in [0, N-3]$.

Т е о р е м а 5. *Если справедливы следующие неравенства*

$$p_0(t) \geqslant -1, \quad p_2(t) \leqslant -3, \quad p_1(t) + p_2(t) \geqslant 0, \quad t \in [2, N-3],$$
$$p_1(t+2) + 2p_0(t+3) \geqslant 1, \quad p_2(t+1) + p_1(t+2) + p_0(t+3) + 1 \leqslant 0, \quad t \in [0, N-6],$$

то уравнение (1) *неосцилляционно на множестве* $t \in [2, N]$.

Полученный признак неосцилляции является разностным аналогом результата [2].

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Цалюк З.Б. К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка // Матем. сборник. 1960. Т. 51 (93). № 4. С. 475–486.
2. Zettl A. Factorization and disconjugacy of third order differential equations // Proc. of the American Math. Society. 1972. Vol. 31. № 1. P. 203–208.
3. Henderson J., Peterson A. Disconjugacy for a third order linear difference equation // Computers Math. Applic. 1994. Vol. 28. № 1–3. P. 131–139.
4. Krueger R.J. Disconjugacy of n-th order difference equations: dis. ... Ph. D. University of Nebraska. Nebraska, 1998. 95 p.
5. Тептин А.Л. Теоремы о разностных неравенствах для n-точечных разностных краевых задач // Матем. сборник. 1963. Т. 62. № 3. С. 345–370.
6. Hartman P. Difference equations: disconjugacy, principal solutions, Green‘s functions, complete monotonicity // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. Vol. 246. P. 1–30.

Поступила в редакцию 01.02.2012

A. A. Aizikovich, D. S. Kochurova

Disconjugacy for a third order linear difference equation

The necessary and sufficient conditions of disconjugacy are obtained for a third order linear difference equation.

Keywords: difference equation, disconjugacy, quasyzero, adjoint equation.

Mathematical Subject Classifications: 39A10

Айзикович Александр Аркадьевич, к.ф.-м.н., доцент, Ижевский государственный технический университет, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7. E-mail: pmi@istu.ru

Кочурова Дарья Станиславовна, аспирант, кафедра прикладной математики и информатики, Ижевский государственный технический университет, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7. E-mail: pmi@istu.ru

Aizikovich Aleksandr Arkad'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Izhevsk State Technical University, ul. Studencheskaya, 7, Izhevsk, 426069, Russia

Kochurova Dar'ya Stanislavovna, post-graduate student, Department of Applied Mathematics and Informatics, Izhevsk State Technical University, ul. Studencheskaya, 7, Izhevsk, 426069, Russia