УДК 517.929

© ***А. С. Баландин***

О ДОСТАТОЧНЫХ ПРИЗНАКАХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Для автономного линейного дифференциального уравнения с несколькими запаздываниями предлагаются эффективные достаточные признаки экспоненциальной устойчивости.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение, экспоненциальная устойчивость, фундаментальное решение.

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$\dot{x}(t)+\sum\nolimits_{k=1}^{k_0} b_k x(t-p_k)+\sum\nolimits_{m=1}^{m_0} c_m \int_{t-q_m}^{t} x(s)\,ds=0, \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где k_0, $m_0\in\mathbb{N}$, b_k, c_m, p_k, $q_m\in\mathbb{R}_+$. При отрицательных значениях аргумента функцию x полагаем равной нулю.

Под решением уравнения (1) будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию x, удовлетворяющую (1) почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

Как известно (см. [1, с. 89–90]), уравнение (1) экспоненциально устойчиво, если существуют такие $N,\alpha>0$, что при всех $t\in\mathbb{R}_+$ справедливо неравенство $|X(t)|\leqslant Ne^{-\alpha t}$, где $X(t)$ — фундаментальное решение, являющееся решением уравнения (1) при $x(0)=1$.

Исследование экспоненциальной устойчивости для автономных уравнений традиционно сводят к вопросу о расположении нулей характеристической функции относительно мнимой оси. Если параметры уравнения заданы численно, то вопрос об устойчивости любого уравнения вида (1) легко решается. Но если ставится задача описать область устойчивости в пространстве параметров, то сложность задачи резко возрастает. Например, в работе [2] была предпринята попытка найти необходимые и достаточные условия устойчивости уравнения (1) в случае двух сосредоточенных слагаемых. Это исследование показало, что эффективное описание области устойчивости возможно лишь при небольших отношениях запаздываний, и с увеличением этого отношения структура области сильно усложняется: бесконечно увеличивается количество звеньев, из которых составлена граница области устойчивости, и нет возможности хоть как-то упорядочить эти звенья. И это в двумерном случае! В многомерном случае также легко получить уравнения, которым удовлетворяет граница области устойчивости, но определить, между какими частями этой границы находится область устойчивости, оказывается чрезвычайно сложной задачей. Поэтому наряду с получением критериев устойчивости целесообразно использовать достаточные признаки.

Рассмотрим уравнение (1), содержащее только сосредоточенные запаздывания. В работе [3] для таких уравнений был получен следующий результат.

Т е о р е м а 1 (см. [3]). *Пусть $c_m=0$, $m=1,2,\ldots,m_0$, и $\sum_{k=1}^{k_0} b_k p_k<\frac{\pi}{2}$. Тогда уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво.*

Заметим, что этот признак удобен в применении, справедлив для любого количества слагаемых и обращается в критерий в случае одного слагаемого [4].

Теперь рассмотрим уравнение (1), содержащее только распределённые запаздывания. Оказалось, что для таких уравнений можно получить аналог теоремы 1.

Т е о р е м а 2. *Пусть $b_k=0$, $k=1,2,\ldots,k_0$, и $\sum_{m=1}^{m_0} c_m q_m^2<\frac{\pi^2}{2}$. Тогда уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво.*

Этот признак также превращается в критерий в случае одного слагаемого [5].

Теперь попытаемся объединить результаты рассмотренных случаев. Естественно предположить, что для уравнения (1) достаточным условием экспоненциальной оценки будет условие

$$\frac{2}{\pi}\sum\nolimits_{k=1}^{k_0} b_k p_k + \frac{2}{\pi^2}\sum\nolimits_{m=1}^{m_0} c_m q_m^2 < 1. \tag{2}$$

К сожалению, гипотеза оказывается неверной даже в простых случаях. Например, для уравнения $\dot{x}(t)+0.39x(t-2)+0.27\int_{t-3}^{t} x(s)\,ds = 0$ условие (2) выполняется, но уравнение неустойчиво.

Поиски достаточного признака, подходящего под сформулированные выше условия привели к двум вариантам.

1 вариант. Пусть $A_0 = \frac{2}{\pi}\big(\cos s + s\sin s\big)$, где s определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} \sin s - s\cos s = \frac{t}{\pi}\big(2-\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\big)\big(\frac{t-2\operatorname{tg} t}{t-4\operatorname{tg} t}\big) \\ \cos s + s\sin s = \frac{t}{\pi}\big(\frac{t}{2}+2\operatorname{ctg}\frac{t}{2}-\frac{t}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}\big) \end{cases}$$

при $t\in(2.8, 2.9),\ s\in(1.8, 1.9)$.

Т е о р е м а 3. *Если* $\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{k_0} b_k p_k + \frac{2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{m_0} c_m q_m^2 < A_0$ $(\approx 0,97)$, *то уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво.*

В теореме 3 удалось сохранить вид легко проверяемого неравенства (2), но пришлось понизить ограничивающую константу.

2 вариант. Введем в системе координат Ouv кривую

$$\left\{u = -\frac{\varphi\sin(q\varphi)}{\cos\varphi-\cos((1-q)\varphi)},\quad v = \frac{q^2\varphi^2\cos\varphi}{\cos\varphi-\cos((1-q)\varphi)},\quad \varphi\in\left(\frac{\pi}{2},\varphi_0\right)\right\},$$

где $q(\varphi)$ — неявно заданная функция, определяемая равенством $2\cos\varphi-(2+q\varphi^2)\cos((1-q)\varphi)+\varphi(2\sin\varphi-(2-q)\sin((1-q)\varphi)) = 0$ при $q\in(1.5, 1.6)$ и $\varphi\in[\frac{\pi}{2},\varphi_0]$, а $\varphi_0\approx 2.01519$ — корень уравнения $(\pi-4\varphi)\operatorname{tg}\varphi = 4+\pi\varphi$ на отрезке $[2,3]$. Область, ограниченную кривой и осями координат, назовем D.

Т е о р е м а 4. *Пусть точка* $\left\{\sum_{k=1}^{k_0} b_k p_k, \sum_{m=1}^{m_0} c_m q_m^2\right\}$ *принадлежит области* D. *Тогда уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво.*

Криволинейная граница ∂D замечательна тем, что для каждой ее точки $M(u_0, v_0)$ найдутся такие пары (b, p) и (c, q), $bp = u_0$, $cq^2 = v_0$, что точка является границей области экспоненциальной устойчивости уравнения $\dot{x}(t)+bx(t-p)+c\int_{t-q}^{t} x(s)\,ds = 0$.

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
2. Levitskaya I.S. Stability domain of a linear differential equation with two delays // Computers and Math. with Appl. 2006. Vol. 51. № 1. P. 153–159.
3. Vaguina M.Yu., Kipnis M.M. Stability of the zero solution of delay differential equations // Math. Notes. Vol. 74. № 5–6. P. 740–743.
4. Андронов А.А., Майер А.Т. Простейшие линейные системы с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1946. Т. 7. № 2, 3. С. 95–106.
5. de Oliveira J.C.F., Carvalho L.A.V. A Lyapunov functional for a retarded differential equation // SIAM. J. Math. Anal. 1985. № 16. P. 1295–1305.

Поступила в редакцию 14.02.2012

A. S. Balandin

On sufficient conditions of exponential stability for a autonomous equation with aftereffect

The effective sufficient conditions of exponential stability are proposed for a autonomous linear differential equation with some delays.

Keywords: differential difference equation, exponential stability, fundamental solution.

Mathematical Subject Classifications: 34K06, 34K20

Баландин Антон Сергеевич, м.н.с., научно-исследовательский центр функционально-дифференциальных уравнений, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр., 29. E-mail: balandin-anton@yandex.ru

Balandin Anton Sergeevich, Junior Researcher, Perm National Research Polytechnic University, Komsomolskii pr., 29, Perm, 614990, Russia