УДК 517.977

© ***А. С. Банников***

К НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ[1]

Рассматривается нестационарная задача простого преследования несколькими управляемыми объектами одного убегающего с фазовыми ограничениями на состояние убегающего и одинаковыми динамическими возможностями всех участников. Получены достаточные условия поимки и уклонения.

Ключевые слова: дифференциальные игры, фазовые ограничения, кусочно-программные стратегии и контрстратегии.

Введение. Рассматривается нестационарная задача простого преследования несколькими управляемыми объектами одного убегающего с фазовыми ограничениями на состояние убегающего и одинаковыми динамическими возможностями всех участников. Стационарный случай $a(t) \equiv 1$ рассматривался многими авторами. В работах [1, 2] получено решение задачи без фазовых ограничений. В работе [3] получено решение задачи с фазовыми ограничениями, когда множество, ограничивающее управления игроков, — шар единичного радиуса, терминальные множества — выпуклые компакты.

В данной работе рассмотрен нестационарный случай, когда множество допустимых управлений игроков и терминальные множества — выпуклые компакты, фазовые ограничения — выпуклое многогранное множество.

Постановка задачи. В конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n{+}1$-го лица: n преследователей $P_1,\ldots, P_n$ и одного убегающего E. Законы движения каждого из преследователей и убегающего имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} P_i\colon &\quad \dot{x}_i(t) = a(t)u_i(t), \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in Q,\\ E\colon &\quad \dot{y}(t) = a(t)v(t), \quad y(t_0) = y^0, \quad v \in Q, \end{aligned}$$

причём $z_i^0 = x_i^0 - y^0 \notin M_i$, $i \in N_n \doteq \{1,\ldots,n\}$, $M_i \subset \mathbb{R}^k$ — заданные выпуклые компакты, $a(t)\colon [t_0,+\infty) \to \mathbb{R}$ — измеримая по Лебегу функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве полуоси $[t_0,+\infty)$, $Q \subset \mathbb{R}^k$ — выпуклый компакт.

Предполагается, что убегающий E в процессе игры не покидает пределы выпуклого многогранного множества D с непустой внутренностью

$$D = \Big\{ w \in \mathbb{R}^k | \langle p_j, w\rangle \leqslant \mu_j, \quad j = 1,\ldots,r \Big\},$$

где $p_1,\ldots, p_r$ — единичные векторы, $\mu_1,\ldots, \mu_r$ — вещественные числа, такие что $\operatorname{Int} D \neq \varnothing$.

Пусть $z_i(t) = x_i(t) - y(t)$, $i \in N_n$, $z(t) = \big(z_1(t),\ldots,z_n(t)\big)$, $z^0 = z(t_0)$. Тогда

$$\dot{z}_i(t) = a(t)\big(u_i(t) - v(t)\big), \quad z_i(t_0) = z_i^0. \tag{1}$$

Игра рассматривается в паре позиционные контрстратегии преследователей — позиционные стратегии убегающего.

О п р е д е л е н и е 1. В игре Γ возможно *уклонение от встречи,* если для любого $T > t_0$ существует такая стратегия V убегающего E, что для любых контрстратегий U_i преследователей P_i, $i \in N_n$, выполнено

$$z_i(t) \notin M_i, \quad t \in [t_0, T], \quad i \in N_n.$$

[1]Работа поддержана РФФИ (грант № 12–01–00195).

О п р е д е л е н и е 2. В игре Γ происходит *поимка,* если существует $T > t_0$ и для любой стратегии V убегающего E существуют контрстратегии U_i преследователей P_i, $i \in N_n$, момент времени $\tau \in [t_0, T]$ и номер $m \in \{1, \ldots, n\}$ такие, что

$$z_m(\tau) \in M_m.$$

Достаточные условия поимки и уклонения. Введём функции λ_i (λ_i^-) следующим образом:

$$\lambda_i(v, m_i) = \max\{\lambda | v - \lambda(z_i^0 - m_i) \in Q,\ v \in Q\}, \qquad \lambda_i(v) = \max_{m_i \in M_i} \lambda_i(v, m_i),$$

$$\lambda_i^-(w, m_i) = \max\{\lambda | w - \lambda(z_i^0 - m_i) \in -Q,\ w \in -Q\}, \quad \lambda_i^-(w) = \max_{m_i \in M_i} \lambda_i^-(w, m_i),$$

$$\lambda_{n+j}(v) = \langle p_j, v\rangle,\ v \in Q, \quad \lambda_{n+j}^-(w) = \langle p_j, w\rangle,\ w \in -Q.$$

Так как Q — выпуклый компакт, то функции непрерывны и существуют ([4])

$$\delta(z^0) = \min_{v \in Q} \max_{i \in N_{n+r}} \lambda_i(v), \quad \delta^-(z^0) = \min_{w \in -Q} \max_{i \in N_{n+r}} \lambda_i^-(w).$$

Т е о р е м а. *Пусть начальная позиция z^0 и функция $a(\cdot)$ таковы, что*

$$\widehat{T} = \min\Big\{t \geqslant t_0 |\quad \delta(z^0) \int\limits_{\{\tau \in [t_0, t] | a(\tau) > 0\}} a(s)\, ds + \delta^-(z^0) \int\limits_{\{\tau \in [t_0, t] | a(\tau) < 0\}} |a(s)|\, ds \geqslant n\Big\} < +\infty.$$

Тогда в игре Γ происходит поимка.

С л е д с т в и е (см. [5]). *Пусть Q — шар с центром в нуле, $\int_{t_0}^{\infty} |a(s)|\, ds = +\infty$, число элементов множества $\bigcup_{i=1}^{n}(z_i^0 - M_i)$ не меньше k. Для того, чтобы в игре Γ происходила поимка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{conv}\{z_1^0 - M_1, \ldots, z_n^0 - M_n, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Список литературы

1. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
2. Григоренко Н.Л. Игра простого преследования–убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. МГУ. Сер. вычисл. матем. и кибер. 1983. № 1. С. 41–47.
3. Петров Н.Н. Теория игр: учеб.пособие. Ижевск: Удмуртский университет, 1997. 197 с.
4. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с.
5. Об одной задаче группового преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 2–11.

Поступила в редакцию 01.02.2012

A. S. Bannikov

About non-stationary problem of simple pursuit

The sufficient conditions of capture and evasion are obtained for non-stationary problem of simple pursuit.

Keywords: differential games, phase restrictions.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 49N75

Банников Александр Сергеевич, ассистент, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: asbannikov@gmail.com

Bannikov Aleksandr Sergeevich, Assistant Lecturer, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia