УДК 517.977

© ***А. И. Благодатских***

ОДНОВРЕМЕННАЯ МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА УБЕГАЮЩИХ

Получены необходимые и достаточные условия одновременной многократной поимки в задачах группового преследования с равными возможностями участников.

Ключевые слова: поимка, многократная поимка, одновременная многократная поимка, преследование, убегание, дифференциальные игры, конфликтно управляемые процессы.

Введение

Задача простого группового преследования одного убегающего с равными возможностями впервые рассматривалась Б.Н. Пшеничным, были получены [1] необходимые и достаточные условия поимки. Н.Л. Григоренко ввел понятие многократной поимки, для задачи с простыми движениями и равными возможностями им представлены [2] необходимые и достаточные условия многократной поимки одного убегающего. А.А. Чикрий и Н.Н. Петров получили [3, 4] достаточные условия многократной поимки одного убегающего в конфликтно управляемых процессах и в примере Л.С. Понтрягина с равными возможностями. Для перечисленных задач приведены [5, 6] достаточные условия многократной, нестрогой одновременной и одновременной многократных поимок одного убегающего, в частности, для задачи простого группового преследования с равными возможностями получены [6] необходимые и достаточные условия одновременной многократной поимки одного убегающего.

Многократная поимка одного убегающего происходит, если заданное количество преследователей ловят его, при этом моменты поимки могут не совпадать. Если моменты поимки (не обязательно наименьшие) совпадают, то говорят, что происходит нестрогая одновременная многократная поимка одного убегающего. Кроме того, если совпадают наименьшие моменты поимки, то происходит одновременная многократная поимка одного убегающего. Наконец, говорят, что происходит одновременная многократная поимка группы убегающих, если в результате преследования происходит одновременная многократная поимка всех убегающих, причем в один и тот же момент времени.

§ 1. Задача простого преследования группы убегающих

В пространстве R^k $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей P_1, P_2, …, P_n и m убегающих E_1, E_2, …, E_m с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = u_i, \qquad u_i \in V_j, \qquad x_i(t_0) = X_i^0, \qquad i \in I_j, \\ &\dot{y}_j = v_j, \qquad v_j \in V_j, \qquad y_j(t_0) = Y_j^0, \qquad j \in J, \end{aligned} \tag{1}$$

где $X_i^0 \neq Y_j^0$ для всех $i \in I_j$, $j \in J$. Здесь x_i, $y_j \in R^k$, V_j — строго выпуклые компакты в R^k с гладкой границей и непустой внутренностью, $I_j \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ — попарно непересекающиеся множества такие, что $|I_j| = a_j \geqslant 1$, $\sum\limits_{j \in J} a_j = n$, $J = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Для каждого $q = 1, 2, \ldots, a_j$ определим множество

$$\Omega_j(q) = \big\{\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q\} \subset I_j : \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_q\big\}, \ j \in J.$$

О п р е д е л е н и е 1. В игре Γ возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, где $a_j \geqslant b_j \geqslant 1$, если существуют такие момент $T_0 = T_0(X_i^0, Y_j^0, i \in I_j, j \in J)$, квазистратегии преследователей P_i, $i \in I_j$, что для любых допустимых управлений v_j убегающих E_j найдутся момент $\tau \in [t_0, T_0]$ и множества $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$, $j \in J$, для которых выполнено

$$x_\alpha(\tau) = y_j(\tau), \quad x_\alpha(s) \neq y_j(s) \ \text{ для всех } \ s \in [t_0, \tau), \quad \alpha \in \Lambda_j, \quad j \in J.$$

Вводя n замен $z_{ij} = x_i - y_j$, $i \in I_j$, $j \in J$, перепишем соотношения (1) в виде

$$\dot{z}_{ij} = u_i - v_j, \quad u_i, v_j \in V_j, \quad z_{ij}(t_0) = Z_{ij}^0 = X_i^0 - Y_j^0 \neq 0, \quad i \in I_j, \quad j \in J.$$

У с л о в и е 1. $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{Z_{lj}^0,\ l \in L_j\}$ для всех $L_j \in \Omega_j(a_j - b_j + 1)$, $j \in J$.

Т е о р е м а 1. *В игре* Γ *возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие* 1.

§ 2. Почти периодический конфликтно управляемый процесс

В R^k ($k \geqslant 2$) рассматривается игра Γ $n+1$ лиц: преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающего E.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A(t)x_i + u_i, \qquad u_i \in V, \qquad x_i(t_0) = X_i^0, \\ \dot{y} &= A(t)y + v, \qquad\ \ v \in V, \qquad y(t_0) = Y^0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $X_i^0 \neq Y^0$ для всех $i \in I$. Здесь x_i, $y \in R^k$, V — строго выпуклый компакт в R^k с гладкой границей и непустой внутренностью, $I = \{1, \ldots, n\}$, $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k.

Для каждого $q = 1, \ldots, n$ определим множество $\Omega(q) = \big\{\{\omega_1, \ldots, \omega_q\} \subset I \colon \omega_1 < \ldots < \omega_q\big\}$.

О п р е д е л е н и е 2. В игре Γ возможна одновременная m-кратная поимка ($m \geqslant 1$), если существуют такие момент $T_0 = T_0(X_i^0, Y^0, i \in I)$ и квазистратегии преследователей P_i, что для любого допустимого управления $v(t)$ убегающего E найдутся момент $\tau \in [t_0, T_0]$ и множество $\Lambda \in \Omega(m)$, для которых выполнено $x_\alpha(\tau) = y(\tau)$, $x_\alpha(s) \neq y(s)$, $s \in [t_0, \tau)$, $\alpha \in \Lambda$.

Вводя n замен $z_i = x_i - y$, $i \in I$, перепишем соотношения (2) в виде

$$\dot{z}_i = A(t)z_i + u_i - v, \quad u_i, v \in V, \quad z_i(t_0) = Z_i^0 = X_i^0 - Y^0 \neq 0, \quad i \in I.$$

У с л о в и е 2. $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{Z_l^0, l \in L\}$ для всех $L \in \Omega(n - m + 1)$.

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{\varphi} = A(t)\varphi$ такая, что $\Phi(t_0)$ совпадает с единичной матрицей.

П р е д п о л о ж е н и е 1. $\Phi(t)$ является почти периодической в смысле Бора.

В данной работе выражение «функция (определенная на $[t_0, \infty)$) является почти периодической в смысле Бора» означает, что ее можно доопределить при всех $t < t_0$ так, чтобы полученная функция стала почти периодической по Бору.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены предположение* 1 *и условие* 2. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная* m*-кратная поимка.*

Список литературы

1. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
2. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
3. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992. 380 с.
4. Петров Н.Н. Многократная поимка в примере Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 747–754.
5. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Удмуртский университет, 2009. 266 с.
6. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 54–59.

Поступила в редакцию 10.02.2012

A. I. Blagodatskikh

Simultaneous multiple capture of evaders

The necessary and sufficient conditions for simultaneous multiple capture in a group pursuit problems with different opportunities for the participants are obtained.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 49N75

Благодатских Александр Иванович, к.ф.-м.н., доцент, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: aiblag@mail.ru

Blagodatskikh Aleksandr Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia