УДК 517.929

© ***Е. И. Бравый***

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для сингулярных функционально-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, краевые задачи, начальная задача, задача Коши, сингулярное уравнение, однозначная разрешимость.

В работе [1] предложен метод нахождения необходимых и достаточных условий существования единственного решения краевых задач для семейств линейных функционально-дифференциальных уравнений. Для некоторых задач получены «точные» множества параметров уравнений, для которых краевая задача для всех уравнений из заданного семейства однозначно разрешима. Здесь представлены новые неулучшаемые результаты об однозначной разрешимости, в частности, краевых задач для сингулярных уравнений.

Пусть $p : (0,1] \to \mathbb{R}$ — положительная функция, сужение которой на каждый отрезок $[\varepsilon, 1]$, $\varepsilon \in (0,1)$, суммируемо. Пусть также

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} p(t)\,dt = \infty. \tag{1}$$

Рассмотрим начальную задачу для уравнения с несуммируемой особенностью

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -p(t)x(t) + (Tx)(t) + f(t), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $f \in L[0,1]$, $T : C[0,1] \to L[0,1]$ — линейный ограниченный оператор. Решением задачи (2) будем называть такую удовлетворяющую почти всюду на $[0,1]$ функционально-дифференциальному уравнению задачи абсолютно непрерывную функцию $x : [0,1] \to \mathbb{R}$, что выполнено начальное условие $x(0) = 0$.

Несмотря на сингулярность, вызванную несуммируемостью функции p в окрестности точки $t = 0$, при некоторых условиях на оператор T для любой функции $f \in L[0,1]$ решение задачи (2) существует и единственно. Известные результаты о разрешимости подобных сингулярных задач использовали либо вольтерровость оператора T, либо специальные односторонние ограничения, при которых линейный оператор T не мог иметь произвольные отклонения аргумента, либо «малость» в определенном смысле оператора T давала возможность свести задачу к уравнению второго рода со сжимающим оператором (смотрите работы [2–6] и цитированную там литературу). Полученные здесь утверждения свободны от перечисленных ограничений. Мы находим наилучшие константы в условиях разрешимости, что придает результатам характер необходимых и достаточных условий.

Т е о р е м а 1. *Пусть заданы неотрицательные числа $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$. Для того чтобы задача Коши (2) была однозначно разрешима при всех таких $T = T^+ - T^-$, что линейные положительные операторы T^+, $T^- : C[0,1] \to L[0,1]$ удовлетворяют равенствам*

$$\|T^+\|_{C \to L} = \mathcal{T}^+, \quad \|T^-\|_{C \to L} = \mathcal{T}^-, \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства

$$\mathcal{T}^+ \leqslant 1, \quad \mathcal{T}^- \leqslant 2\sqrt{1 - \mathcal{T}^+}.$$

[1]Работа поддержана РФФИ (грант № 10–01–96054-р-урал-а).

Задача Коши с положительным сингулярным коэффициентом в линейном члене правой части
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = p(t)x(t) + (Tx)(t) + f(t), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = 0, \end{cases}$$
вообще говоря, может иметь бесконечное множество решений, из которого можно выбрать единственное, задав дополнительное условие на правом конце промежутка.

Т е о р е м а 2. *Пусть заданы неотрицательные числа $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$. Для того чтобы задача*
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = p(t)x(t) + (Tx)(t) + f(t), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = 0, \quad x(1) = c, \end{cases} \tag{4}$$
имела единственное решение при всех $c \in \mathbb{R}$, $f \in L[0,1]$ при всех таких $T = T^+ - T^-$, что линейные положительные операторы T^+, $T^- : C[0,1] \to L[0,1]$ удовлетворяют равенствам (3)*, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства*
$$\mathcal{T}^- \leqslant 1, \quad \mathcal{T}^+ \leqslant 2\sqrt{1 - \mathcal{T}^-}.$$

Пусть теперь уравнение не является сингулярным: условие (1) заменено на условие $p \in L$.

Т е о р е м а 3. *Пусть заданы неотрицательные числа $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$. Для того чтобы задача Коши* (2) *была однозначно разрешима при всех таких $T = T^+ - T^-$, что линейные положительные операторы T^+, $T^- : C[0,1] \to L[0,1]$ удовлетворяют равенствам* (3)*, необходимо и достаточно, чтобы*
$$\mathcal{T}^+ \leqslant 1, \quad \mathcal{T}^- \leqslant 1 + 2\sqrt{1 - \mathcal{T}^+}.$$

Необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости (2) при $p \equiv 0$ получены в [7]. Отметим также работы А. Е. Зернова [4,5], посвященные задачам (2), (4) при вольтерровом сингулярном нелинейном операторе T.

Список литературы

1. Бравый Е.И. Разрешимость краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011. 372 с.
2. Кигурадзе И.Т., Сохадзе З.П. О задаче Коши для эволюционных сингулярных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 1. С. 48–59.
3. Kiguradze I., Sokhadze Z. On the global solvability of the Cauchy problem for singular functional differential equations // Georgian Math. J. 1997. Vol. 4. № 4. P. 355–372.
4. Zernov A.E. On the solvability and asymptotics of solutions of one functional differential equation with singularity // Ukrainian Mathematical Journal. 2001. Vol. 53. № 4. P. 514–527.
5. Agarwal R.P., O'Regan D., Zernov O.E. A singular initial value problem for some functional differential equations // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 2004. № 3. P. 261–270.
6. Плаксина И.М. Об одном сингулярном линейном функционально-дифференциальном уравнении // Известия вузов. Математика. 2012. № 2. С. 92–96.
7. Bravyi E., Hakl R., Lomtatidze A. Optimal conditions on unique solvability of the Cauchy problem for the first order linear functional differential equations // Czechoslovak Mathematical Journal. 2002. Vol. 52 (127). № 3. P. 513–530.

Поступила в редакцию 14.02.2012

E. I. Bravyi

New results on the unique solvability of linear boundary value problems for functional differential equations

New necessary and sufficient conditions of the unique solvability of the initial value problem for linear functional differential equations with singularities are obtained.

Keywords: functional differential equations, boundary value problems, initial value problem, Cauchy problem, singular equations, unique solvability.

Mathematical Subject Classifications: 34K06, 34K10

Бравый Евгений Ильич, к.ф.–м.н., старший научный сотрудник, научно-исследовательский центр «Функционально-дифференциальные уравнения», Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29 а. E-mail: bravyi@perm.ru

Bravyi Evgenii Il'ich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Perm National Research Polytechnic University, Komsomolskii pr., 29 a, Perm, 614990, Russia