УДК 517.977

© *Я. А. Вешкурова, А. Н. Сесекин*

О НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ [1]

Приведена формализация понятия решения для дифференциальных уравнений нейтрального типа с обобщенным воздействием в правой части. Получены достаточные условия, обеспечивающие существование так формализованного решения и получено интегральное уравнение, описывающее это решение.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения нейтрального типа, импульсное воздействие, функции ограниченной вариации.

Введение

Существует большое количество приложений, в которых запаздывающий аргумент входит не только в переменную, но и в ее производную. Это так называемые дифференциально-разностные уравнения нейтрального типа. Особенность таких уравнений состоит в том, что в правой части дифференциальных уравнений может быть некорректная операция умножения разрывных функций на обобщенные [1]. В данной работе развивается подход, ранее развивавшийся для обыкновенных дифференциальных уравнений с обобщенным воздействием [2], который основан на замыкании множества гладких решений, в пространстве функций ограниченной вариации на более общий класс дифференциальных уравнений нейтрального типа.

§ 1. Первый вариант дифференциального уравнения нейтрального типа

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), x(t-\tau)\big) + Q\big(t, x(t)\big)\dot{x}(t-\tau) + B\big(t, x(t)\big)\ \dot{v}(t),\ \ x(t) = \varphi(t),\ t \in [t_0-\tau, t_0]. \quad (1)$$

Здесь $t \in [t_0, \vartheta]$, $x(t)$, $v(t)$ соответственно n- и m-мерные вектор-функции времени, $f(t,x,y)$ — n-мерная вектор-функция, и $B(t,x)$, $Q(t,x)$ — $n \times m$ и $n \times n$-мерные матрицы-функции, $v(\cdot) \in BV_m[t_0, \vartheta]$, где $BV_m[t_0, \vartheta]$ означает банахово пространство m-мерных вектор-функций ограниченной вариации, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание, $\varphi(t)$ — начальная n-мерная вектор-функция ограниченной вариации.
Предположим, что $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ измерима по t, непрерывна по остальным переменным и липшицева по x, $B(\cdot,\cdot)$, $Q(\cdot,\cdot)$ непрерывны и липшицевы по второй переменной на множестве $\{t \in [t_0, \vartheta],\ \|x\| < \infty\}$, где $\|x\| = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2}$, и удовлетворяют следующим стандартным условиям на том же множестве:

$$\|f(t,x,y,v)\| \leqslant \kappa(1+\|x\|),\ \ |Q(t,x)\| \leqslant \kappa(1+\|x\|),\quad \|B(t,x)\| \leqslant \kappa(1+\|x\|),$$

где κ — некоторая положительная константа.
Выберем две последовательности абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$, $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, поточечно сходящиеся к $v(t) \in BV_m[t_0, \vartheta]$ и $\varphi(t) \in BV_m[t_0, \vartheta]$ соответственно. В соответствии с [2] решение задачи Коши (1) существует для любых абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$ и $\varphi_k(t)$ (функции $v(t)$ и $v_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют ограничению $\operatorname*{var}\limits_{[t_0,\vartheta]} v(\cdot) \leqslant a$). Пусть $x(t) = x_k(t)$ — решение задачи Коши (1) при $v_k(t)$, $\varphi_k(t)$.

О п р е д е л е н и е 1. Вектор-функция ограниченной вариации $x(t)$ называется *аппроксимируемым решением* задачи Коши (1), если $x(t)$ — поточечный предел последовательности $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, порожденной последовательностью $v_k(t), \varphi_k(t)$, и $x(t)$ не зависит от выбора $v_k(t)$ и $\varphi_k(t)$.

[1]Работа поддержана РФФИ (грант № 10–01–00356) и Программой № Р–04 Президиума РАН «Фундаментальные задачи из нелинейной динамики».

Т е о р е м а 1. *Пусть выполняются все оговоренные выше условия. Предположим также, что существуют частные производные $\partial b_{ij}/\partial x_\nu$ элементов матрицы-функции $B(\cdot,\cdot)$ и $\partial q_{ij}/\partial x_\nu$ элементов матрицы-функции $Q(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial b_{ij}(t,x)}{\partial x_\nu}b_{\nu l}(t,x)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial b_{il}(t,x)}{\partial x_\nu}b_{\nu j}(t,x),\ \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial q_{i\mu}(t,x)}{\partial x_\nu}q_{\nu\eta}(t,x)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial q_{i\eta}(t,x)}{\partial x_\nu}q_{\nu\mu}(t,x),$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial q_{i\mu}(t,x)}{\partial x_\nu}b_{\nu l}(t,x)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial b_{il}(t,x)}{\partial x_\nu}q_{\nu\mu}(t,x)$$

(условия Фробениуса) $i,\mu,\eta=1,2,\ldots,n$; $j,l=1,2,\ldots,m$.
Тогда для всякой вектор-функции ограниченной вариации $v(t)$ существует аппроксимируемое решение $x(t)$ задачи (1), удовлетворяющее интегральному уравнению

$$x(t)=\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t}f\big(\xi,x(\xi),x(\xi-\tau)\big)\,d\xi+\int_{t_0}^{t}Q\big(\xi,x(\xi)\big)\,dx^c(\xi)+\int_{t_0}^{t}B\big(\xi,x(\xi)\big)\,dv^c(\xi)$$
$$+\sum_{t_i\leqslant t,\,t_i\in\overline{\Omega}_-}\overline{S}\big(t_i,x(t_i-0),\Delta x(t_i-0)\big)+\sum_{t_i<t,\,t_i\in\overline{\Omega}_+}S\big(t_i,x(t_i),\Delta x(t_i-\tau+0)\big),$$
$$+\sum_{t_i\leqslant t,\,t_i\in\Omega_-}S\big(t_i,x(t_i-0),\Delta v(t_i-0)\big)+\sum_{t_i\leqslant t,\,t_i\in\Omega_+}S\big(t_i,x(t_i-0),\Delta v(t_i+0)\big)$$

Здесь $v^c(\xi)$ и $x^c(\xi)$ — непрерывные составляющие функций ограниченной вариации $v(\xi)$ и $x(\xi)$ соответственно,

$$\overline{S}(t,x(t),\Delta x(t-\tau))=z(1)-x(t),$$
$$\dot z(\xi)=Q(t,z(\xi))\Delta x(t),\quad z(0)=x(t),$$
$$S(t,x(t),\Delta v)=z(1)-x(t),$$
$$\dot z(\xi)=B(t,z(\xi))\Delta v(t),\quad z(0)=x(t),$$

$\Omega_-(\Omega_+)$ — множество точек левых (правых) разрывов $v(t)$; $\overline{\Omega}_-(\overline{\Omega}_+)$ — множество точек левых (правых) разрывов начальной функции $\varphi(t)$ и точек Ω_-,Ω_+, сдвинутое вправо на конечное число запаздываний (целое для точек Ω_-,Ω_+) τ; эти точки попадают в $[t_0,\vartheta]$.

$$\Delta v(t-0)=v(t)-v(t-0),\quad \Delta v(t+0)=v(t+0)-v(t),$$
$$\Delta x(t-0)=x(t)-x(t-0),\quad \Delta x(t+0)=x(t+0)-x(t).$$

Список литературы

1. Schwartz L. Theory des Distributions. Paris: Hermann. 1950–1951.
2. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы: модели и приложения. М: Наука, 1991. 240 с.

Поступила в редакцию 15.02.2012

Ya. A. Veshkurova, A. N. Sesekin

On nonlinear differential equations of neutral type with impulse control

The formalization of concept of the solution for the differential equations of neutral type with the distributions in the right part is performed. Sufficient conditions providing existence so the formalized solution are received. The integral equation describing so the formalized solution is obtained. Illustrating examples are resulted.

Keywords: differential equations of neutral type, systems with time delay, impulse control, functions of bounded variation.

Mathematical Subject Classifications: 49N25

Сесекин Александр Николаевич, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: sesekin@list.ru

Вешкурова Яна Александровна, студент, кафедра прикладной математики, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, ул. Мира, 19. E-mail: veshkurova@mail.ru

Sesekin Aleksandr Nikolaevich, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia

Veshkurova Yana Aleksandrovna, student, Department of Applied Mathematics, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia