УДК 517.977

© *М. Н. Виноградова*

О ПОИМКЕ ДВУХ УБЕГАЮЩИХ В ЗАДАЧЕ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Приведены достаточные условия поимки двух убегающих в задаче простого преследования.

Ключевые слова: дифференциальная игра, фазовые ограничения, кусочно-программные стратегии, контрстратегии.

§ 1. Простое преследование двух убегающих с фазовыми ограничениями

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+2$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и двух убегающих E_1, E_2 [1–5]. Законы движения каждого из преследователей P_i и каждого из убегающих E_j имеют вид ($i = 1, \ldots, n$, $j = 1, 2$)

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad u_i \in V; \quad \dot{y}_j(t) = v(t), \quad v \in V; \quad x_i,\, y_j,\, u_i,\, v \in \mathbb{R}^k. \tag{1}$$

При $t = 0$ заданы начальные условия $x_i(0) = x_i^0, \quad y_j(0) = y_j^0$, причём $x_i^0 \neq y_j^0$, V — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

Предполагается, что убегающие в процессе игры не покидают пределы выпуклого множества

$$D = \{y : y \in \mathbb{R}^k, \langle p_s, y\rangle \leqslant \mu_s,\, s = 1, \ldots, r\},$$

где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные вектора, $\mu_1, \ldots, \mu_s$ — вещественные числа такие, что $\operatorname{int} D \neq \varnothing$.

Преследователи используют кусочно-программные контрстратегии.

Обозначим данную игру Γ.

О п р е д е л е н и е 1. *В игре Γ происходит поимка, если существует $T > 0$ и для любого разбиения σ отрезка $[0, T]$ существуют кусочно-программные контрстратегии $U_1, \ldots, U_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, моменты времени $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$, номера $l, s \in \{1, \ldots, n\}$ такие, что $x_l(\tau_1) = y_1(\tau_1)$, $x_s(\tau_2) = y_2(\tau_2)$ для любых траекторий y_1, y_2 убегающих E_1, E_2.*

От систем (1) перейдем к системе

$$\dot{z}_{ij} = u_i - v, \quad z_{ij}(0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0.$$

Введем следующие обозначения:

$$I_0 = \{1, \ldots, n\}, \quad d = \max\{|v|, v \in V\}, \quad \lambda(a, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda a \in V - v\}, \quad c = y_1^0 - y_2^0.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть V — шар с центром в нуле, существуют множества $J_1, J_2 \subset \{1, \ldots, n\}$, $I_1, I_2 \subset I_0 \setminus (J_1 \cup J_2)$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ такие, что наборы*

$$\{z_{i1}^0,\, i \in J_1,\, p_1, \ldots, p_r,\, -c\}, \quad \{z_{i2}^0,\, i \in J_2,\, p_1, \ldots, p_r,\, c\},$$
$$\{z_{l1}^0,\, l \in J_1 \setminus (J_1 \cap J_2),\; z_{s2}^0,\; s \in J_2 \setminus (J_1 \cap J_2),\; z_{\alpha 1}^0,\; \alpha \in I_1,\; z_{\beta 2}^0,\; \beta \in I_2,\, p_1, \ldots, p_r\}$$

образуют положительный базис, причем $|J_1| \geqslant k$, $|J_2| \geqslant k$, $|J_1^0| + |J_2^0| \geqslant k + 1$, где $J_1^0 = (I_1 \cup J_1) \setminus (J_1 \cap J_2)$, $J_2^0 = (I_2 \cup J_2) \setminus (J_1 \cap J_2)$.

Тогда в игре Γ происходит поимка.

§ 2. Преследование двух убегающих в нестационарной задаче простого преследования

Законы движения каждого из преследователей P_i и каждого из убегающих E_j имеют вид:

$$\dot{x}_i(t) = a(t)u_i(t),\, u_i \in V; \quad \dot{y}_j(t) = a(t)v(t),\, v \in V; \quad x_i, y_j, u_i, v \in \mathbb{R}^k \tag{2}$$

При $t = t_0$ заданы начальные условия $x_i(t_0) = x_i^0, \quad y_j(t_0) = y_j^0$, причём $x_i^0 \neq y_j^0$, V — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей, $a : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ — измеримая функция, ограниченная на любом компакте.

Систему уравнений (2) заменим следующей:

$$\dot{z}_{ij} = a(t)(u_i - v), \quad z_{ij} = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0.$$

Т е о р е м а 2. *Пусть V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, существуют множества*

$$J_1, J_2 \subset \{1, \ldots, n\}, \quad I_1, I_2 \ \subset \ I_0 \ \setminus \ (J_1 \cup J_2), \quad I_1 \cap I_2 = \varnothing$$

такие, что наборы

$$\{z_{i1}^0, i \in J_1, -c\}, \quad \{z_{i2}^0, i \in J_2, c\},$$

$$\{z_{l1}^0, l \in J_1 \setminus (J_1 \cap J_2),\, z_{s2}^0, s \in J_2 \setminus (J_1 \cap J_2), z_{\alpha 1}^0, \alpha \in I_1, z_{\beta 2}^0, \beta \in I_2\}$$

образуют положительный базис, причем $|J_1| \geqslant k, \quad |J_2| \geqslant k, \quad |J_1^0| + |J_2^0| \geqslant k+1$, *где* $c = y_1^0 - y_2^0, \quad I_0 = \{1, \ldots, n\}$ $J_1^0 = (I_1 \cup J_1) \setminus (J_1 \cap J_2), \quad J_2^0 = (I_2 \cup J_2) \setminus (J_1 \cap J_2)$.

Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

Список литературы

1. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Удмуртский университет, 2009. 266 с.
2. Банников А.С. Об одной задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 3–11.
3. Петров Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2. Вып. 4. С. 74–83.
4. Чикрий А.А. Конфликтно-управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 380 с.
5. Банников А.С., Петров Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.

Поступила в редакцию 01.02.2012

M. N. Vinogradova

On the capture of two evaders in a simple pursuit–evasion problem

Sufficient conditions for the capture two evaders in a simple pursuit–evasion problem are obtained.

Keywords: differential game, phase restrictions, piece–program strategy, counterstrategy.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 49N75

Виноградова Марина Николаевна, ассистент, кафедра математики и информатики, филиал Удмуртского государственного университета в городе Воткинске, 427433, Россия, г. Воткинск, ул. Расковой, 1 а. E-mail: mnvinogradova@mail.ru

Vinogradova Marina Nikolaevna, Assistant Lecturer, Department of Mathematics and Informatics, Udmurt State University Branch in Votkinsk, ul. Raskovoi, 1 a, Votkinsk, 427433, Russia