УДК 517.954

© ***А. С. Волкова***

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ

Получен аналог леммы Дю-Буа-Реймонда, вводятся подпространства пространства $W_2^1(\Gamma)$ и понятия обобщенных решений соответствующих краевых задач.

Ключевые слова: краевые задачи на графе–звезда, лемма Дю-Буа-Реймонда, обобщенные решения.

Пусть Γ – граф-звезда, состоящий из m одинаковых ребер γ_k и одного внутреннего узла ξ. При этом ребра γ_k $(k=\overline{1,m-1})$ параметризованы отрезком $[0,\pi/2]$ (ориентация на ребрах «к узлу ξ»), ребро γ_m — отрезком $[\pi/2,\pi]$ (ориентация на ребре — «от узла ξ»). Объединение всех ребер, не содержащих концевых точек, обозначим через Γ_0, через V — множество всех узлов графа: $V=\partial\Gamma\cup\{\xi\}$ ($\partial\Gamma$ — множество граничных узлов), $\Gamma_0=\Gamma\setminus V$.

Обозначим через $C(\Gamma)$ множество непрерывных на Γ функций, $C[\Gamma]$ – множество кусочно непрерывных функций (непрерывность на ребрах, пределы в узле ξ по разным ребрам могут быть различными), $C^n[\Gamma]$ – множество функций, для которых все производные до n-го порядка включительно принадлежат $C[\Gamma]$. Через $C_0^\infty(\Gamma_0)$ обозначим множество функций $\varphi(x)\in C^\infty[\Gamma]$, компактный носитель которых лежит в Γ_0 (финитные бесконечно дифференцируемые в Γ_0 функции); $L_2(\Gamma)$ – пространство функций, интегрируемых с квадратом на графе Γ. Сужение функции $u(x)$ на ребро γ_k будем обозначать через $u(x)_{\gamma_k}$. Аналогично работам [1] и [2] для функции $u(x)\in L_2(\Gamma)$ вводится понятие обобщенной производной $\frac{du(x)}{dx}\in L_2(\Gamma)$.

Пространство функций $u(x)\in L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную первого порядка, обозначим через $W_2^1(\Gamma)$. Элементы $u(x)\in W_2^1(\Gamma)$ суть функции $u(x)\in L_2(\Gamma)$, эквивалентные абсолютно непрерывным на $\overline{\Gamma}_0$ функциям (обозначаются также $u(x)$), имеющим почти всюду производную $\frac{du(x)}{dx}$ как элемент пространства $L_2(\Gamma)$. Таким образом, говоря о функции $u(x)\in W_2^1(\Gamma)$, мы будем иметь в виду функцию $u(x)$ с указанными выше свойствами. Норма в пространстве $W_2^1(\Gamma)$ определяется скалярным произведением $(u,v)_{W_2^1(\Gamma)}=\int\limits_\Gamma[uv+\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}]\,dx$; $W_2^1(\Gamma)$ — полное гильбертово пространство (полнота является следствием замкнутости обобщенного дифференцирования).

Введем утверждение, аналогичное утверждению леммы Дю-Буа-Реймонда [3]:

Л е м м а 1. *Если для любого сколь угодно малого положительного числа ϵ и некоторой функции $f(x)\in C[\Gamma]$ выполняется неравенство $|\int\limits_\Gamma f(x)h'(x)]\,dx|<\epsilon$, какова бы ни была функция $h(x)\in C^1[\Gamma]$, $h(x)|_{x\in V}=0$, то $f(x)$ — кусочно-постоянная функция на Γ: $f(x)_{\gamma_k}=c_k$ (c_k — const), $k=\overline{1,m}$.*

Обозначим через $L(u,\eta)$ билинейную форму

$$L(u,\eta)=\int_\Gamma\left(a(x)\frac{du(x)}{dx}\eta'(x)+b(x)u(x)\eta(x)\right)\,dx, \tag{1}$$

соответствующую дифференциальному выражению $(Lu)(x)\equiv-\frac{d}{dx}(a(x)\frac{du(x)}{dx})+b(x)u(x)$ при x, изменяющихся внутри каждого ребра $\gamma_k\subset\Gamma$ $(x\in\Gamma_0)$. Коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ в (1) — измеримые на Γ функции: $a(x)\in L_2(\Gamma)$, $b(x)\in L(\Gamma)$. Выражение для $L(u,\eta)$ формально получено в результате однократного интегрирования по частям слагаемого $-\frac{d}{dx}(a(x)\frac{du(x)}{dx})$ в интеграле $\int\limits_\Gamma(Lu)(x)\eta(x)\,dx$. Нижеприведенная теорема является прямым следствием леммы.

Т е о р е м а 1. *Пусть функция $u(x)\in W_2^1(\Gamma)$ такова, что $L(u,\eta)=0$, при любой $\eta(x)\in C_0^\infty(\Gamma_0)$, тогда для каждого фиксированного k $(k=\overline{1,m})$ сужение $a(x)_{\gamma_k}\frac{du(x)}{dx}_{\gamma_k}$ непрерывно в точке $\frac{\pi}{2}\in\gamma_k$.*

Из теоремы следует, что в пространстве $W_2^1(\Gamma)$ есть функции $u(x)\in C(\Gamma)$, удовлетворяющие соотношению
$$\sum_{k=1}^{m-1} a(\frac{\pi}{2})_{\gamma_k}\frac{du(\frac{\pi}{2})_{\gamma_k}}{dx}=a(\frac{\pi}{2})_{\gamma_m}\frac{du(\frac{\pi}{2})_{\gamma_m}}{dx}. \tag{2}$$

Введем подпространства пространства $W_2^1(\Gamma)$, играющие основополагающую роль при изучении уравнений эллиптического типа, порождаемых дифференциальным выражением $(Lu)(x)$ на графе Γ, а также соответствующих им краевых задач.

Обозначим через $\Omega(a,\Gamma,\xi)$ множество непрерывных на Γ функций $u(x)$ класса $W_2^1(\Gamma)$, для которых сужение $(a(x)\frac{du(x)}{dx})_{\gamma_k}$ непрерывно в концевой точке $\frac{\pi}{2}$ каждого ребра γ_k $(k=\overline{1,m})$ и удовлетворяется соотношение (2); $\Omega_0(a,\Gamma,\xi)$ — множество функций из $\Omega(a,\Gamma,\xi)$, обращающихся в нуль на $\partial\Gamma$; $\Omega(a,\Gamma,V)$ – множество непрерывных на Γ функций $u(x)$ класса $W_2^1(\Gamma)$, для которых сужение $(a(x)\frac{du(x)}{dx})_{\gamma_k}$ непрерывно во всех концевых точках каждого ребра γ_k $(k=\overline{1,m})$ и удовлетворяется соотношение (2). Пусть $W_2^1(a,\Gamma,\xi)$, $W_{2,0}^1(a,\Gamma,\xi)$ и $W_2^1(a,\Gamma,V)$ — замыкания множеств $\Omega(a,\Gamma,\xi)$, $\Omega_0(a,\Gamma,\xi)$ и $\Omega(a,\Gamma,V)$ по норме пространств $W_2^1(\Gamma)$ соответственно. Ясно, что $W_{2,0}^1(a,\Gamma,\xi)\subset W_2^1(a,\Gamma,\xi)$. Полнота гильбертовых пространств $W_2^1(a,\Gamma,\xi)$, $W_{2,0}^1(a,\Gamma,\xi)$ и $W_2^1(a,\Gamma,V)$ является следствием их замкнутости в $W_2^1(\Gamma)$.

Пространство $W_{2,0}^1(a,\Gamma,\xi)$ играет основополагающую роль при изучении первой краевой задачи для эллиптического уравнения на графе (задачи Дирихле), пространство $W_2^1(a,\Gamma,V)$ — при изучении других краевых задач.

Дифференциальное уравнение на геометрическом графе Γ в классе C^2, порожденные дифференциальным выражением $(Lu)(x)$ с достаточно гладкими коэффициентами $a(x)$ и $b(x)$, подразумевает классическую форму
$$(Lu)(x)=f(x) \tag{3}$$
и соотношение (2) в узле ξ. Для уравнения (3) рассмотрим задачу Дирихле, состоящую в нахождении функции $u(x)$ из класса $W_2^1(\Gamma)$, удовлетворяющей краевому условию $u(x)|_{\partial\Gamma}=0$.

О п р е д е л е н и е 1. *Обобщенным решением* класса $W_2^1(\Gamma)$ задачи Дирихле называется функция $u(x)\in W_{2,0}^1(a,\Gamma,\xi)$, удовлетворяющая интегральному тождеству $L(u,\eta)=\int\limits_\Gamma f(x)\eta(x)dx$ для любых функций $\eta(x)\in C_0^\infty(\Gamma_0)$.

Для задачи Дирихле верна теорема единственности и имеет место основное свойство — фредгольмова разрешимость в пространстве $W_{2,0}^1(a,\Gamma,\xi)$. Аналогично вводится понятие обобщенного решения других краевых задач и устанавливается их фредгольмова разрешимость.

Список литературы

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Физматлит, 1973. 408 с.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. № 1. М.: Физматлит, 1981. 550 с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс. М.: Физматлит, 1961. 435 с.

Поступила в редакцию 30.01.2012

A. S. Volkova

A generalized solution of boundary value problem for an elliptic equation on a graph

We obtain an analogue of lemma Du-Bua-Reymond, we introduce subspaces $W_2^1(\Gamma)$ and the concept of generalized solutions of the corresponding boundary value problems.

Keywords: graph–star, generalized derivative, lemma Du-Bua-Reymond, generalized solutions.

Mathematical Subject Classifications: 34B45

Волкова Анна Сергеевна, аспирант, кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей, Воронежский государственный университет, 394050, Россия, г. Воронеж, Университетская пл., 1. E-mail: volan100@mail.ru

Volkova Anna Sergeevna, post-graduate student, Department of Partial Differential Equations and Probability Theory, Voronezh State University, Universitetskaya pl., 1, Voronezh, 394050, Russia