УДК 517.917

© *М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов*

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРОВАННОГО РЕЗУЛЬТАТА В СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УПРАВЛЕНИИ[1]

Дана процедура вычисления оптимального гарантированного результата в системе с запаздыванием в управлении при показателе качества, представляющем собой евклидову норму совокупности отклонений движения системы в заданные моменты времени от начала координат.

Ключевые слова: оптимальное управление, дифференциальные игры, запаздывание.

§ 1. Постановка задачи

В рамках теоретико-игрового подхода [1,2] рассматривается задача о вычислении величины оптимального гарантированного результата управления в системе

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + B_h(t)u(t-h) + C(t)v(t), \quad t_0 \leqslant t_* \leqslant t \leqslant \vartheta, \qquad (1)$$
$$x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P \subset \mathbb{R}^r, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^s, \quad h = \mathrm{const} > 0,$$

при начальных условиях

$$x(t_*) = x_* \in \mathbb{R}^n, \quad u_{t_*}(\cdot) = \big\{u_{t_*}(\xi) = u(t_* + \xi),\ \xi \in [-h, 0)\big\} = p_*(\cdot) \in U, \qquad (2)$$

и показателе качества

$$\gamma = \sqrt{\|D^{[h_*]}x(t^{[h_*]})\|^2 + \ldots + \|D^{[N]}x(t^{[N]})\|^2}. \qquad (3)$$

Здесь x — фазовый вектор, $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$, u — управляющее воздействие, v — воздействие помехи; t_0 и ϑ — зафиксированы; P и Q — компакты; матрицы-функции $A(t)$, $B(t)$, $B_h(t)$ и $C(t)$ кусочно-непрерывны; h — запаздывание; U — множество измеримых (по Борелю) функций из $[-h, 0)$ в P; $D^{[i]}$ — постоянные $(p^{[i]} \times n)$-матрицы ($1 \leqslant p^{[i]} \leqslant n$), $t^{[i]} \in [t_0, \vartheta]$ — оценочные моменты, $i = \overline{1, N}$; $t^{[i+1]} = t^{[i]} + h$, $i = \overline{1, N-1}$, $t^{[1]} < t_0 + h$, $t^{[N]} = \vartheta$; $h(t) = \min\{i = \overline{1, N} : t^{[i]} \geqslant t\}$, $h_* = h(t_*)$; $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Цель оптимизации – минимизация показателя (3).

Под стратегией управления понимаем произвольную функцию $U = U\big(t, x, p(\cdot), \varepsilon\big) \in P$, где $t \in [t_0, \vartheta)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $p(\cdot) \in U$ и $\varepsilon > 0$ — параметр точности [1]. Стратегия действует в дискретной по времени схеме на базе разбиения $\Delta_\delta = \big\{\tau_j : \tau_1 = t_*,\ 0 < \tau_{j+1} - \tau_j \leqslant \delta,\ j = \overline{1, k},\ \tau_{k+1} = \vartheta\big\}$, формируя управляющее воздействие согласно правилу

$$u(t) = U\big(\tau_j, x(\tau_j), u_{\tau_j}(\cdot), \varepsilon\big), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad u_{\tau_j}(\cdot) = \big\{u_{\tau_j}(\xi) = u(\tau_j + \xi),\ \xi \in [-h, 0)\big\}. \qquad (4)$$

Пусть $S = S\big(t_*, x_*, p_*(\cdot), U(\cdot), \Delta_\delta, \varepsilon\big)$ — множество троек $\{x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)\}$ таких, что $v(\cdot)$ — измеримая функция из $[t_*, \vartheta)$ в Q, $u(\cdot)$ — удовлетворяющая (2) измеримая функция из $[t_* - h, \vartheta)$ в P, которая на $[t_*, \vartheta)$ формируется в согласии с (4), $x(\cdot)$ — удовлетворяющая (2) абсолютно непрерывная функция из $[t_*, \vartheta]$ в $\mathbb{R}^n$, которая вместе с $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (1) при почти всех $t \in [t_*, \vartheta]$. Оптимальным гарантированным результатом управления будет

$$\Gamma_u^0\big(t_*, x_*, p_*(\cdot)\big) = \inf_{U(\cdot)} \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \lim_{\delta \to 0} \sup_{\Delta_\delta} \big\{\gamma \,|\, \{x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)\} \in S\big\}.$$

В случае, когда нет запаздывания в управлении, эффективные процедуры вычисления оптимального гарантированного результата в подобных задачах даны, например, в [1,3].

§ 2. Процедура вычисления оптимального гарантированного результата

Пусть $X(t, \tau)$ — матрица Коши для уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Пусть разбиение Δ_δ содержит все точки разрыва матриц-функций $A(t)$, $B(t)$, $B_h(t+h)$, $C(t)$ и моменты времени $t^{[i]}$, $i = \overline{h_*, N}$. Для $j = \overline{1, k}$ обозначим $h(\tau_j - 0) = h(\tau_j)$; а также $h(\tau_j + 0) = h(\tau_j) + 1$, если $\tau_j = t^{[h(\tau_j)]}$, и $h(\tau_j + 0) = h(\tau_j)$, если $\tau_j < t^{[h(\tau_j)]}$. Положим $h(\tau_{k+1} + 0) = h(\tau_{k+1} - 0) = h(\tau_{k+1})$.

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12–П–1–1002), а также при поддержке РФФИ (грант № 12–01–00290–а) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ–5927.2012.1).

Попятно по шагам разбиения Δ_δ построим последовательность множеств $G_j(t_*,\tau_j\pm 0)\subset \mathbb{R}^{p^{[h(\tau_j\pm 0)]}}\times\mathbb{R}^n$ и функций $\varphi_j(t_*,\tau_j\pm 0,l,m)$, $(l,m)\in G_j(t_*,\tau_j\pm 0)$, $j=\overline{1,k+1}$.

При $j=k+1$ полагаем

$$G_{k+1}(t_*,\tau_{k+1}\pm 0)=\big\{(l,m):\|l\|\leqslant 1, m=0\big\},\quad \varphi_{k+1}(t_*,\tau_{k+1}\pm 0,l,m)\equiv 0.$$

Пусть $1\leqslant j\leqslant k$ и уже построены $G_{j+1}(t_*,\tau_{j+1}\pm 0)$ и $\varphi_{j+1}(t_*,\tau_{j+1}\pm 0,l,m)$. Тогда определяем

$$G_j(t_*,\tau_j+0)=G_{j+1}(t_*,\tau_{j+1}-0),\quad \varphi_j(t_*,\tau_j+0,l,m)=\big\{\psi_j(t_*,\cdot)\big\}^*_{G_j(t_*,\tau_j+0)},$$

где символ $\{\psi(\cdot)\}^*_G$ означает выпуклую сверху оболочку функции $\psi(l,m)$ на множестве G и

$$\psi_j(t_*,l,m)=\varphi_{j+1}(t_*,\tau_{j+1}-0,l,m)+\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\bigg(\Big\langle l,D^{[h(\tau_j+0)]}X(t^{[h(\tau_j+0)]},\tau)\big(B(\tau)u+C(\tau)v\big)\Big\rangle+$$

$$+\Big\langle m,X(\vartheta,\tau)\Big(\big(B(\tau)+X(\tau,\tau+h)B_h(\tau+h)\big)u+C(\tau)v\Big)\Big\rangle\bigg)d\tau,\quad (l,m)\in G_j(t_*,\tau_j+0).$$

Далее, если $h(\tau_j-0)=h(\tau_j+0)$, то полагаем

$$G_j(t_*,\tau_j-0)=G_j(t_*,\tau_j+0),\quad \varphi_j(t_*,\tau_j-0,l,m)=\varphi_j(t_*,\tau_j+0,l,m).$$

Если же $h(\tau_j-0)+1=h(\tau_j+0)$, то, рассматривая для $(l,m)\in\mathbb{R}^{p^{[h(\tau_j-0)]}}\times\mathbb{R}^n$ множество $Y_j(l,m)=\big\{\big(\nu_*,(l_*,m_*)\big)\in[0,1]\times G_j(t_*,\tau_j+0):\|l\|^2\leqslant 1-\nu_*^2,\ m=\nu_*\big(m_*+X^T(t^{[h(\tau_j+0)]},\vartheta)D^{[h(\tau_j+0)]T}l_*\big)\big\}$, определяем

$$G_j(t_*,\tau_j-0)=\big\{(l,m):Y_j(l,m)\neq\emptyset\big\},\ \varphi_j(t_*,\tau_j-0,l,m)=\max_{(\nu_*,l_*,m_*)\in Y_j(l,m)}\nu_*\varphi_j(t_*,\tau_j+0,l_*,m_*).$$

Рассмотрим величину

$$e\big(t_*,x_*,p_*(\cdot);\Delta_\delta\big)=\max_{(l,m)\in G_1(t_*,\tau_1-0)}\Big(\varphi_1(t_*,\tau_1-0,l,m)+\big\langle l,D^{[h_*]}\big(X(t^{[h_*]},t_*)x_*+$$

$$+\int_{t_*-h}^{t^{[h_*]}-h}X(t^{[h_*]},\tau+h)B_h(\tau+h)u(\tau)d\tau\big)\big\rangle+\big\langle m,X(\vartheta,t_*)x_*+\int_{t_*-h}^{t_*}X(\vartheta,\tau+h)B_h(\tau+h)u(\tau)d\tau\big\rangle\Big).$$

Т е о р е м а 1. *Для любого числа $\zeta>0$ найдется число $\delta(\zeta)>0$, такое, что, каковы бы ни были $0<\delta\leqslant\delta(\zeta)$ и разбиение Δ_δ, будет справедливо неравенство*

$$|\Gamma^0_u\big(t_*,x_*,p_*(\cdot)\big)-e\big(t_*,x_*,p_*(\cdot);\Delta_\delta\big)|\leqslant\zeta.$$

Список литературы

1. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under Lack of Information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p.
2. Осипов Ю.С., Пименов В.Г. К теории дифференциальных игр в системах с последействием // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. Вып. 6. С. 963–977.
3. Лукоянов Н.Ю. К вопросу вычисления цены дифференциальной игры для позиционного функционала // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 188–198.

Поступила в редакцию 14.02.2012

M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov

Calculating the optimal guaranteed result in systems with control delays

The procedure of calculating the optimal guaranteed result is obtained for systems with control delays and the quality index, which is the Euclidian norm of the set of deviations of the system motion at the given instants from the origin.

Keywords: optimal control, differential games, delay.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 93B52, 49J35

Гомоюнов Михаил Игоревич, программист, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: gomojunov@mail.ru

Лукоянов Николай Юрьевич, д.ф.-м.н., зав. сектором, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: nyul@imm.uran.ru

Gomoyunov Mikhail Igorevich, Programmer, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia

Lukoyanov Nikolai Yur'evich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of Department, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia