УДК 517.977

© ***Б. Г. Гребенщиков***

АЛГОРИТМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Предлагается несколько алгоритмов стабилизации систем с двумя запаздываниями, содержащих в правой части экспоненциальный множитель. При этом используются методы стабилизации разностных систем.

Ключевые слова: стабилизация, линейная управляемая система, асимптотическая устойчивость.

Введение

Системы с линейными запаздываниями встречаются в задачах физики, механики, биологии [1]. Часто решения этих систем неустойчивы и возникает проблема стабилизации систем подобного рода. Данные системы заменой аргумента приводятся к системам с экспоненциальным множителем в правой части и с постоянными запаздываниями.

§ 1. Постановка задачи

В первой части предложен алгоритм стабилизации системы следующего вида:

$$\frac{dx(t)}{dt} = e^t \left(Ax(t) + \sum_{i=1}^{2} B_i x(t-\tau_i) + Cu(t) \right), \qquad 0 < \tau_1 < \tau_2, \quad t \geqslant t_0. \tag{1}$$

Здесь A, B_i — постоянные матрицы размерности $m \times m$, при этом считаем, что матрицы B_i имеют обратные; постоянная матрица C имеет размерность $m \times r$; $u(t)$ — r-мерная вектор-функция управляющего воздействия; m-мерная вектор-функция $x(t)$ определена на интервале $[t_0-\tau_2, t_0]$ начальной вектор-функцией $\varphi(t)$. Полагаем, что матрица A имеет все собственные значения с отрицательной вещественной частью. Далее, считаем, что при $u(t) \equiv 0$ нулевое решение системы (1) неустойчиво, или устойчиво, но не асимптотически.

Во второй части предложен алгоритм стабилизации системы

$$\frac{dz(t)}{dt} = e^t \left(A(t)z(t) + B(t)z(t-\tau_1) + kB(t)z(t-\tau_2) + C(t)u(t) \right), \quad \tau_2 = \tau_1 + T, \quad k = \text{const}. \tag{2}$$

Здесь матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — периодические с периодом $0 < T < \tau_1$; m-мерная вектор-функция $z(t)$ определена на интервале $[t_0-\tau_2, t_0]$ начальной вектор-функцией $\psi(t)$. Собственные значения матрицы $A(t)$ имеют отрицательную вещественную часть, матрица $B(t)$ имеет обратную. Полагаем, что решение соответствующей управляемой вырожденной системы (при $u(t) \equiv 0$)

$$\bar{x}(t) = -A^{-1}(t)B(t)\bar{x}(t-\tau_1) - kA^{-1}(t)B(t)\bar{x}(t-\tau_2)$$

неустойчиво, причем неустойчивы (или устойчивы, но не асимптотически) решения разностных систем вида

$$\bar{y}(t) = -A^{-1}(t)B(t)\bar{y}(t-\tau_1)$$
$$\bar{z}(t) = -kA^{-1}(t)B(t)\bar{z}(t-\tau_2).$$

§ 2. Стабилизация системы с постоянными матрицами A, B_i, C

Будем стабилизировать следующие вспомогательные функционально-разностные подсистемы с одним запаздыванием вида

$$\bar{y}(t) = -A^{-1}B_1\bar{y}(t-\tau_1) - A^{-1}Cv(t)$$

$$\bar{z}(t) = -A^{-1}B_2\bar{z}(t-\tau_2) - A^{-1}Cw(t),$$

выбирая в них управления $v(\tau)$ и $w(\tau)$ в соответствии с правилами, подобными приведенным в [2], то есть

$$v(t) = -\left(E_r + (A^{-1}C)^T R_1 A^{-1}C\right)^{-1} (A^{-1}C)^\top R_1 A^{-1} B_1 y$$

$$w(t) = -\left(E_r + (A^{-1}C)^T R_2 A^{-1}C\right)^{-1} (A^{-1}C)^\top R_2 A^{-1} B_2 z$$

(E_r — единичная матрица размерности $r \times r$).

Здесь R_j — определенно положительные матрицы размерности $m \times m$, удовлетворяющие матричным уравнениям

$$(A^{-1}B_j)^\top R_j A^{-1}B_j - (A^{-1}B_j)^\top R_j A^{-1}C\left(E_r + (A^{-1}C)^\top R_j A^{-1}C\right)^{-1}(A^{-1}C)^\top R_j A^{-1}B_j = \alpha_j R_j,$$
$$\alpha_j = \mathrm{const},\;\; 0 < \alpha_j < 1,\;\; j = 1, 2,$$

или, для величин R_j^{-1} справедливы уравнения

$$R_j^{-1} + A^{-1}C(A^{-1}C)^T = \frac{1}{\alpha_j} A^{-1}B_j R_j^{-1}\left(A^{-1}B_j\right)^T,\;\; j = 1, 2.$$

За счет малости α_i стабилизация исходной системы (1) данным методом возможна.

§ 3. Стабилизация системы с периодическими матрицами $A(t)$, $B_i(t)$, $C(t)$

При стабилизации системы (2) стабилизируем соответствующие вырожденные системы управлениями, имеющими вид

$$\bar{v}(t) = -\left(E_r + C^\top(t)\bar{R}(t+\tau_1)C(t)\right)^{-1} C^\top \bar{R}(t+\tau_1)A(t)\bar{y}(t-\tau_1)$$
$$\bar{w}(t) = -\left(E_r + C^\top(t)k\bar{R}(t+\tau_2)C(t)\right)^{-1} C^\top k\bar{R}(t+\tau_2)A(t)\bar{z}(t-\tau_2).$$

Матрица $\bar{R}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{R}^{-1}(t+\tau_1) + 2C(t)C^\top(t) = \frac{1}{\alpha}A(t)\bar{R}^{-1}(t)A^\top(t),\;\; \alpha = \mathrm{const},\quad 0 < \alpha < 1.$$

Последнее уравнение разрешимо при достаточно малом α.

§ 4. Заключение

Решена задача стабилизации систем с двумя постоянными запаздываниями и экспоненциальным множителем в правой части. При этом использовались алгоритмы стабилизации разностных систем.

Список литературы

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
2. Фурасов В.Д. Устойчивость и стабилизация дискретных процессов. М.: Наука, 1982. 192 с.

Поступила в редакцию 15.02.2012

B. G. Grebenshchikov

Algorithms of stabilization of some systems with two delays

The algorithms of stabilization of systems with two delays containing exponential factor in the right-hand side are proposed. For this purpose the methods of stabilization of difference systems are used.

Keywords: stabilization, linear control system, asymptotic stability.

Mathematical Subject Classifications: 39A30, 93D20

Гребенщиков Борис Георгиевич, к.ф.-м.н., доцент, кафедра прикладной математики, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51. E-mail: ABLozhnikov@yandex.ru

Grebenshchikov Boris Georgievich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia