УДК 517.911

© **В. Я. Дерр, И. Г. Ким**

# О ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $C$-ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Задача Коши для системы матричных дифференциальных уравнений с обобщенными функциями в коэффициентах «погружается» в пространство матричных $C$-обобщенных функций (обобщенных функций Коломбо). Соответствующая задача в представителях решается численно при фиксированных значениях праметров.

*Ключевые слова:* задача Коши, обобщенная функция, $C$-обобщенная функция, задача в представителях.

Рассмотрим задачу Коши $(a \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ X_0 \in \mathbb{R}^{n\times n})$:

$$X' = B'(t)X + F', \quad X(a) = X_0 \quad (X\colon pI \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B\colon pI \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad F\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}^{n\times n}), \qquad (1)$$

где штрих означает производную в смысле теории обобщенных функций.

Пусть $\mathcal{D}$ — множество финитных функций $\varphi : \mathcal{I} \to \mathbb{R},\ \varphi \in C^\infty$ ( то есть имеющих компактный в $\mathcal{I}$ носитель). Для $k = 1, 2, \ldots$ положим

$$\mathcal{A}_k \doteq \Big\{\varphi \in \mathcal{D}\colon \int_{\mathcal{I}} \varphi(t)\,dt = 1,\ \int_{\mathcal{I}} t^i\varphi(t)\,dt = 0,\ i = 1, \ldots, k\Big\},\ \varphi_\varepsilon \doteq \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),\ \varphi_\varepsilon \in A_i \Leftrightarrow \varphi_\varepsilon \in A_i,$$

Через $\mathcal{E}^n$ обозначим множество отображений $\mathcal{R} : \mathcal{A}_1 \to \mathbb{R}^{n\times n}$ таких, что функция $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\varphi, t)$ бесконечно дифференцируема по $t$ при любой фиксированной $\varphi \in \mathcal{A}_1$. Из $\mathcal{E}^n$ выделим подмножество «умеренных» элементов:

$$\mathcal{E}^n_M \doteq \Big\{\mathcal{R} \in \mathcal{E}^n : (\forall [a, b] \subset \mathcal{I})\ (\forall m \in \mathbb{N})\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall \varphi \in \mathcal{A}_N) \\ (\exists C,\, \eta)\ \big(\sup_{t\in[a,b]}\Big\|\frac{d^m}{dt^m}\mathcal{R}(\varphi_\varepsilon, t)\Big\| \leqslant \frac{C}{\mu^N}\ (0 < \varepsilon < \eta)\big)\Big\}.$$

Множество $\mathcal{E}^n_M$ — алгебра относительно сложения и умножения матричнозначных функций, а $\mathfrak{N} \subset \mathcal{E}^n_M$,

$$\mathfrak{N} \doteq \Big\{\mathcal{R} \in \mathcal{E}^n_M : (\forall [a, b] \subset \mathcal{I})\ (\forall m \in \mathbb{N})\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall k \geqslant N)\ (\forall \varphi \in \mathcal{A}_k) \\ (\exists C,\, \eta)\ \big(\sup_{t\in[a,b]}\Big\|\frac{d^m}{dt^m}\mathcal{R}(\varphi_\mu, t)\Big\| \leqslant C\mu^{k-N}\ (0 < \mu < \eta)\big)\Big\} -$$

двусторонний идеал этой алгебры. Элементы фактор-алгебры $\mathfrak{G}^n \doteq \mathcal{E}^n_M/\mathfrak{N}$ называются *$C$-обобщенными функциями* [1,2]. Аналогично определяются $C$-обобщенные числа (см. [1,2]), так что $C$-обобщенные функции имеют значение в каждой точке, которое в точности совпадает с обычным значением функции в точке только для бесконечно дифференцирумых функций.

«Погрузим» задачу (1) в пространство (матричных) $C$-обобщенных функций. Это означает, что теперь в (1) $X, B, F \in \mathfrak{G}^n$, а $X_0$ — $n\times n$-матрица, элементы которой — $C$-обобщенные числа, и все операции (сложение, умножение, дифференцирование) понимаются как соответствующие операции в $\mathfrak{G}^n$ [1]. Тогда этой задаче будет соответствовать задача Коши в представителях:

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R}_{B'}(\varphi_\varepsilon, t)\,\mathcal{R} + \mathcal{R}_{F'}(\varphi_\varepsilon, t), \quad \mathcal{R}(\varphi_\varepsilon, a) = \mathcal{R}_{X_0}(\varphi_\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad \varphi \in A_1, \qquad (2)$$

где

$$\mathcal{R}_{B'}(\varphi, t) = \int_{\mathcal{I}} \varphi(\tau)\,dB(\tau + t), \quad \mathcal{R}_{F'}(\varphi, t) = \int_{\mathcal{I}} \varphi(\tau)\,dF(\tau + t).$$

Коэффициенты в (2) — бесконечно дифференцируемые (матричные) функции, так что задача (2) однозначно разрешима.

В [2] показано: если $\int_{\mathcal{I}} \|\mathcal{R}_{B'}(\varphi_\varepsilon, t)\|\, dt \leqslant \mathcal{K} \ln \dfrac{1}{\varepsilon}$ $(0 < \varepsilon < \eta,$ константа $\mathcal{K}$ не зависит от $\varphi$ и $\varepsilon)$, то решение задачи (2) — *умеренная* функция $\mathcal{R}(\varphi, t)$. Если при этом существует предел $\mathcal{X} \doteq \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \mathcal{R}(\varphi_\varepsilon, t)$, не зависящий от $\varphi$, то естественно принять этот предел за решение исходной задачи (1). (Разумеется, эта схема работает и в случае, если $X, F, X_0$ — $n$-векторы.)

В качестве примера численной реализации этой схемы рассмотрим задачу вида (1), где $B'(t) = \begin{pmatrix} \delta(2t) & -2\delta(t) \\ \delta(t) & 1 \end{pmatrix}$, $f'(t) = \begin{pmatrix} e^t - \delta(2t) \\ 1 - \delta(t) - t \end{pmatrix}$, с начальными условиями $x(1) = (e, 1)^\top$. Ей соответствует задача Коши в представителях:

$$\mathcal{R}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{-2t}{\varepsilon}\right) & \frac{-2}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{-t}{\varepsilon}\right) \\ \frac{-1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{-t}{\varepsilon}\right) & 1 \end{pmatrix} \mathcal{R} + \begin{pmatrix} e^t - e^t \cdot \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{-2t}{\varepsilon}\right) + 2t \cdot \frac{-1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{-t}{\varepsilon}\right) \\ 1 - e^t \cdot \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{-t}{\varepsilon}\right) - t \end{pmatrix} \mathcal{R},\ :\ \mathcal{R}(\varphi_\varepsilon, 1) = \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Фиксируя $\varphi$ и $\varepsilon$, находим численное решение задачи (3), которое принимаем за решение исходной задачи Коши. Результаты численного приближения для различных $\varphi$ и $\varepsilon$ приведены в таблице. Точное решение — $x(t) = (e^t, t)^\top$.

| $\varphi(t) = \exp\left(\frac{-1}{1-t^2}\right)$ при $\|t\| < 1$ | | | | | | | $\varphi(t) = \exp\left(\frac{-1}{1-(t+1)^2}\right) + \exp\left(\frac{-1}{1-(t-1)^2}\right)$ при $\|t\| < 2$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon = 0,5$ | | | $\varepsilon = 0,1$ | | $\varepsilon = 0,01$ | | $\varepsilon = 0,5$ | | | $\varepsilon = 0,1$ | | $\varepsilon = 0,01$ | |
| $t$ | $x(t)$ | $y(t)$ | $x(t)$ | $y(t)$ | $x(t)$ | $y(t)$ | $t$ | $x(t)$ | $y(t)$ | $x(t)$ | $y(t)$ | $x(t)$ | $y(t)$ |
| 0,1 | 1,364 | 0,873 | 1,105 | 0,100 | 1,105 | 0,100 | 0,1 | 1,749 | 1,301 | 1,247 | 0,664 | 1,105 | 0,100 |
| 0,2 | 1,311 | 0,662 | 1,221 | 0,200 | 1,221 | 0,200 | 0,2 | 1,831 | 1,430 | 1,221 | 0,199 | 1,221 | 0,200 |
| 0,3 | 1,363 | 0,487 | 1,349 | 0,299 | 1,349 | 0,299 | 0,3 | 1,864 | 1,466 | 1,349 | 0,299 | 1,349 | 0,299 |
| 0,4 | 1,491 | 0,420 | 1,491 | 0,400 | 1,491 | 0,399 | 0,4 | 1,871 | 1,430 | 1,491 | 0,400 | 1,491 | 0,399 |
| 0,5 | 1,648 | 0,500 | 1,648 | 0,500 | 1,648 | 0,499 | 0,5 | 1,881 | 1,343 | 1,648 | 0,500 | 1,648 | 0,499 |
| 0,6 | 1,822 | 0,599 | 1,822 | 0,599 | 1,822 | 0,599 | 0,6 | 1,934 | 1,219 | 1,822 | 0,599 | 1,822 | 0,599 |
| 0,7 | 2,013 | 0,700 | 2,013 | 0,700 | 2,013 | 0,700 | 0,7 | 2,050 | 1,077 | 2,013 | 0,700 | 2,013 | 0,700 |
| 0,8 | 2,225 | 0,799 | 2,225 | 0,799 | 2,225 | 0,799 | 0,8 | 2,231 | 0,954 | 2,225 | 0,799 | 2,225 | 0,799 |
| 0,9 | 2,459 | 0,900 | 2,459 | 0,900 | 2,459 | 0,900 | 0,9 | 2,459 | 0,916 | 2,459 | 0,900 | 2,459 | 0,900 |

**Список литературы**


1. Colombeau J.F. Elementary introduction to new generalized functions. Amsterdam: North Holland Math. St. 1985. 113. 300 p.
2. Дерр В.Я., Дизендорф К.И. О дифференциальных уравнениях в $C$-обобщенных функциях // Изв. вузов. Математика. 1996. № 11. С. 39–48.



Поступила в редакцию 20.02.2012



***V. Ya. Derr, I. G. Kim***


**On a numerical realization of a solution of a differential equation in the space of $C$-generalized functions**


The Cauchy problem for a matrix system of differential equations «plunges» into a space of matrix generalized functions of Colombeau. We solve numerically the correspondent problem for representatives under fixed values of parametres.



*Keywords:* Cauchy problem, generalized function, $C$-generalized function, problem of the representatives.

Mathematical Subject Classifications: 34K06



Дерр Василий Яковлевич, д.ф.-м.н., профессор, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: derr@uni.udm.ru

Ким Инна Геральдовна, магистрант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: derr@uni.udm.ru

Derr Vasilii Yakovlevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia

Kim Inna Geral'dovna, master, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia