УДК 517.929.21

© ***И. С. Загребина, С. Н. Попова***

О ПОКАЗАТЕЛЯХ ЛЯПУНОВА ПРОСТЕЙШЕГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Получены некоторые результаты о показателях Ляпунова простейшего уравнения с запаздыванием.

Ключевые слова: уравнение с запаздыванием, показатели Ляпунова.

Рассмотрим линейное уравнение

$$\dot{x}(t) = ax(t-1), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с постоянным положительным коэффициентом a.

Решением уравнения (1) называем непрерывную на $[-1,+\infty)$ функцию $x(\cdot)$, обращающую это уравнение в тождество на $(0,+\infty)$ и удовлетворяющую начальному условию

$$x(t) = h(t), \quad t \in [-1,0],$$

где $h(\cdot)$ — произвольная непрерывная на $[-1,0]$ функция. Функцию $h(\cdot)$ называем *начальной функцией* решения $x(\cdot)$.

Напомним, что *показателем Ляпунова* произвольной не равной финально нулю функции $x : [t_0,+\infty) \to \mathbb{R}$ называется величина

$$\lambda[x] = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} \ln |x(t)|. \tag{2}$$

Если в (2) верхний предел в действительности является точным, то говорят, что функция $x(\cdot)$ обладает *точным показателем Ляпунова.*

Обозначим через $\widehat{\alpha}$ вещественный корень характеристического уравнения $\alpha e^{\alpha} = a$. Так как по условию $a > 0$, то $\widehat{\alpha}$ единственен и $\widehat{\alpha} > 0$.

Т е о р е м а 1. *Если непрерывная функция $h : [-1,0] \to \mathbb{R}$ такова, что $0 < h_1 \leqslant h(t)$, где h_1 — константа, то решение $x(\cdot)$ уравнения (1), отвечающее начальной функции $h(\cdot)$, обладает точным показателем Ляпунова, равным $\widehat{\alpha}$.*

Л е м м а 1. *Пусть $x(\cdot)$ — решение уравнения (1) с начальной функцией $h(t) = e^{\beta t}$, где $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$; $\gamma_n(\beta) \doteq x(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\gamma_n(\beta) = \sum_{k=0}^{n-1} a^k \sum_{i=0}^{k} \frac{(n-k)^{k-i}}{\beta^i (k-i)!} \left(1 - \frac{a}{\beta e^{\beta}}\right) + \frac{a^n}{\beta^n}.$$

С л е д с т в и е 1. *Для каждого $\beta \neq 0$ существует точный предел*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \gamma_n(\beta) = \widehat{\alpha}.$$

Поступила в редакцию 15.02.2012

I. S. Zagrebina, S. N. Popova

On Lyapunov exponents of the simplest time-lag equation

Some properties of Lyapunov exponents for simplest time-lag equation are obtained.

Keywords: time-lag equation, Lyapunov exponents.

Mathematical Subject Classifications: 34K06, 34D08

Загребина Ирина Сергеевна, младший научный сотрудник, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: ziswork@mail.ru

Попова Светлана Николаевна, д.ф.-м.н., профессор, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: ps@uni.udm.ru

Zagrebina Irina Sergeevna, Junior Researcher, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia

Popova Svetlana Nikolaevna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia

[1]Работа поддержана РФФИ (грант № 12–01–00195).