УДК 517.929

© ***Г. Г. Исламов***

К ВОПРОСУ ОБ ОБОБЩЁННОЙ ВЫПУКЛОСТИ ОПЕРАТОРА ГРИНА

Доказана теорема о наследовании свойства обобщённой выпуклости оператора Грина при линейных возмущениях.

Ключевые слова: оператор Грина, обобщённая выпуклость.

Введение

В линейной теории функционально-дифференциальных уравнений особую роль занимают краевые задачи. Поиск эффективных условий однозначной разрешимости краевой задачи и конструктивная проверка выполнения этих условий представляет собой одно из направлений исследований [1]. Оператор Грина G краевой задачи $Lx = f$, $l_i(x) = 0$, $i = 1,\ldots,n$ даёт зависимость $x = Gf$ решения этой задачи от правой части уравнения. Изучение свойств этого оператора составляет другое направление исследований [2–5]. Отметим свойства, представляющие практический интерес: скорость аппроксимации оператора Грина конечномерными операторами; полнота системы корневых векторов оператора Грина; положительность оператора Грина относительно выбранной пары конусов полуупорядоченных пространств. Исходная краевая задача может быть записана в виде одного операторного уравнения $Ax = g$. Многие свойства оператора Грина наследуются при специальных видах возмущений оператора A. В основе исследования этой проблемы, как правило, лежит левая, либо правая регуляризация. Форма левой регуляризации $A \to B^{-1}A$ приводит к новому уравнению относительно исходной переменной x, тогда как правая регуляризация $A \to AB^{-1}$ даёт уравнение относительно новой переменной z $(x = Wz = B^{-1}z)$. В ряде работ, где изучаются вопросы устойчивости решений и положительности оператора Грина, правая регуляризация называется «W–методом» Н. В. Азбелева. Следующий результат работы [6] является примером применения левой регуляризации. В терминах монографии [7] имеет место

Т е о р е м а 1. *Пусть A и B — линейные операторы, переводящие KB-линеал X в себя и удовлетворяющие условиям $B \geqslant A$, B обратим и $\|(I - B^{-1}A)^k\| < 1$ при некотором k. Тогда из положительности оператора B^{-1} следует положительность оператора A^{-1}.*

Этот факт содержится в следующем утверждении работы [8], которое получается в результате применения правой регуляризации.

Т е о р е м а 2. *Пусть аддитивный и однородный оператор A, заданный на линейном подмножестве E KB-линеала X, отображает E в X. Пусть, далее, существует аддитивный и однородный оператор B, отображающий E на X, такой, что оператор $I - AB^{-1}$ ограничен и положителен и $\|(I - AB^{-1})^k\| < 1$ при некотором k. Тогда из положительности оператора B^{-1} следует положительность оператора A^{-1}.*

Такие свойства оператора Грина $W : L[a,b] \to W^n[a,b]$, как положительность относительно конуса неотрицательных функций, монотонность, выпуклость и др., могут быть описаны в терминах произведения $Q = D_{m-2} \cdot \ldots \cdot D_0$, $2 \leqslant m \leqslant n$ операторов $(D_j x)(t) = \dfrac{d}{dt}\dfrac{x(t)}{w_j(t)}$, $j = 0,1,\ldots,m-2$. Здесь $w_j(t)$, $j = 0,1,\ldots,m-2$ есть положительные функции класса $C^{m-2-j}[a,b]$. Известно, что семейство $u_j(t)$, $j = 0,1,\ldots,m-2$ решений начальных задач Коши $u_0 = \omega_0$, $D_{j-1} \cdot \ldots \cdot D_0 u_j = w_j$, $u_j^{(k)}(a) = 0$, $k = 0,1,\ldots,j-1$ образует ECT–систему [9]. Мы изучаем наследование следующего свойства оператора Грина при линейных возмущениях: для некоторого линейного гомеоморфизма P лебегова пространства $L[a,b]$ расширенное семейство u_0, u_1,…, u_{m-2}, GPf образует WT–систему на открытом интервале (a,b) [9] при любой неотрицательной функции $f \in L[a,b]$. Это свойство эквивалентно положительности оператора $QGP : L[a,b] \to C[a,b]$ относительно конуса неотрицательных функций (свойству обобщённой выпуклости [9]). Приводимая ниже теорема 3 доказывается по схеме работы [10] в предположении, что $Q : W^n[a,b] \to C[a,b]$ есть линейный слабо компактный инъективный на пересечении ядер функционалов исходной краевой задачи оператор и для любой конечной системы различных точек t_i, $i = 1,\ldots,\nu$ интерполяционная задача $(Qx)(t_i) = \alpha_i$, $i = 1,\ldots,\nu$ разрешима в $W^n[a,b]$ при любых скалярах α_i, $i = 1,\ldots,\nu$. В нашем случае инъективность эквивалентна тому, что ранг матрицы $l_i(u_j)$, $i = 1,\ldots,n$, $j = 0,1,\ldots,m-2$, равен $m-1$. При выполнении этого предположения имеет место

Т е о р е м а 3. *Пусть $V : C[a,b] \to L[a,b]$ есть линейный положительный оператор относительно конуса неотрицательных функций и найдётся такая функция $u \in W^n[a,b]$, что $l_i(u) = 0$, $i = 1,\ldots,n$, образ Qu неотрицателен на $[a,b]$, а невязка $\psi = P^{-1}Lu - VQu$ положительна почти всюду на $[a,b]$. Тогда возмущённая краевая задача $Lx = PVQx + f$, $l_i(x) = 0$, $i = 1,\ldots,n$ также однозначно разрешима в соболевском пространстве $W^n[a,b]$ при любом $f \in L[a,b]$ и её оператор Грина $\tilde{G}$ наследует свойство G, а именно: $Q\tilde{G}P > 0$.*

Для линейного положительного относительно конуса неотрицательных функций оператора $T : C[a,b] \to L[a,b]$ и такой функции $\phi \in L_\infty[a,b]$, что $\phi(s) \geqslant \dfrac{b-s}{b-a}$ почти всюду на $[a,b]$, имеем

С л е д с т в и е 1. *Линейная краевая задача $x''(t) + (Tx)(t) = f(t)$, $t \in [a,b]$, $x(a) = 0$, $x'(a) + \int_a^b \phi(s)x''(s)\,ds = 0$ однозначно разрешима в $W^2[a,b]$ при любом $f \in L[a,b]$ и функция Грина $G(t,s)$ этой задачи неположительна в квадрате $[a,b]\times[a,b]$ в том и только том случае, когда найдётся удовлетворяющая краевым условиям неотрицательная функция $v \in W^2[a,b]$ с неположительной почти всюду на $[a,b]$ невязкой $\psi(t) = v''(t) + (Tv)(t)$.*

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф., Максимов В.П. Методы современной теории линейных функционально-диффренециальных уравнений. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 300 с.
2. Исламов Г.Г. Оценки минимального ранга конечномерных возмущений операторов Грина // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 9. С. 1496–1503.
3. Исламов Г.Г. О некоторых приложениях теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения. I // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 11. С. 1872–1881.
4. Исламов Г.Г. О некоторых приложениях теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения. II // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 2. С. 224–232.
5. Исламов Г.Г. Критерий разрешимости уравнений с краевыми неравенствами // Известия института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 1994. Вып. 2. С. 3–24.
6. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф., Цалюк З.Б. Заметка о положительности обратных операторов // Учёные записки Удмуртского госпединститута. 1958. Вып. 12. С. 47–49.
7. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961. 408 с.
8. Исламов Г.Г. О существовании положительных решений уравнений с запаздывающим аргументом // Материалы третьей Всесоюз. межвуз. конф. по теории и приложениям диффер. уравн. с отклоняющимся аргументом. Черновцы, 1972. С. 95–97.
9. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976. 568 с.
10. Исламов Г.Г. К вопросу об оценке сверху спектрального радиуса // Вестник Удмуртского университета. 1992. Вып. 1. С. 82–86.

Поступила в редакцию 01.02.2012

G. G. Islamov

On the question of extended convexity of Green operator

We prove a theorem on inheritance of extended convexity by Green operator under linear perturbations.

Keywords: Green operator, extended convexity.

Mathematical Subject Classifications: 34K10, 34K06

Исламов Галимзян Газизович, д.ф.–м.н., профессор, кафедра высокопроизводительных вычислений и параллельного программирования, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: ggislamov@gmail.com

Islamov Galimzyan Gazizovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia