УДК 517.518

© *Г. Г. Исламов, Ю. В. Коган*

К ВОПРОСУ О ЧЕБЫШЕВСКИХ СИСТЕМАХ

Рассматриваются достаточные условия того, что система линейно независимых непрерывных функций на отрезке является чебышевской системой.

Ключевые слова: линейно независимая система, чебышевская система

Свойства чебышевских систем хорошо изучены (см., например, [1–10] и приведённую в них литературу). Кроме свойства линейной независимости в заметке [11] подчеркнута важная роль чебышевских систем для задачи одномерного сглаживания методом наименьших квадратов.

Настоящая работа носит методический характер. Ее цель — выяснить, какие дополнительные условия достаточно обеспечить, чтобы заключить о наличии чебышевского свойства у заданной системы линейной независимых непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$.

Сначала приведём ряд простых утверждений, которые ограничивают поле наших исследований.

Утверждение 1. *Если $u_1(x)$, $u_2(x)$,…, $u_n(x)$ — линейно независимая система функций на отрезке $[a, b]$, то отсюда не следует, что эта система линейно независима на любом отрезке $[c, d] \subset [a, b]$.*

Утверждение 2. *Если $u_1(x)$, $u_2(x)$ — линейно независимая система непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, такая что $u_2(x) \neq 0$ на $[a, b]$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ [c, d] \subset [a, b] : d-c < \varepsilon$, а система $u_1(x)$, $u_2(x)$ линейно независима на отрезке $[c, d]$.*

Утверждение 3. *Если $u_1(x)$, $u_2(x)$ — линейно независимая система непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, такая что $u_2(x) \neq 0$ на $[a, b]$, то отсюда не следует, что существует отрезок $[c, d] \subset [a, b]$, на котором данная система является чебышевской.*

Утверждение 4. *Если $u_1(x)$, $u_2(x)$ — линейно независимая на отрезке $[a, b]$ система функций класса $C^1[a, b]$, такая что $u_2(x) \neq 0$ на $[a, b]$, тогда существует отрезок $[c, d] \subset [a, b]$, такой что данная система является чебышевской на $[c, d]$.*

Следующее утверждение сформулировано (но не доказано) в качестве задачи в монографии Бернштейна ([1, часть 1, стр. 13, задача 8]). Доказать его можно аналогично рассуждению, приведенному в книге [3].

Утверждение 5. *Если $u_1(x)$, $u_2(x)$,…, $u_n(x)$ — система функций класса $C^{(n-1)}[a, b]$ на отрезке $[a, b]$, причем существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что*

$$\begin{vmatrix} u_1(x_0) & u_2(x_0) & \dots & u_n(x_0) \\ u_1'(x_0) & u_2'(x_0) & \dots & u_n'(x_0) \\ u_1''(x_0) & u_2''(x_0) & \dots & u_n''(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x_0) & u_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & u_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

то существует отрезок $[c, d]$: $x_0 \in [c, d] \subset [a, b]$, на котором данная система функций является чебышевской.

Имеет место следующая лемма [2, с. 87]. Пусть J обозначает любой из интервалов $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b).

Л е м м а 1. *Пусть* $\{u_j(t)\}_{j=1}^n$ — *линейно независимая система скалярных функций, заданных на интервале* J. *Тогда существует* n *различных точек* $\{s_i\}_{i=1}^n \subset J$ *таких, что определитель матрицы Хаара* $\det H_n = \det\{u_j(s_i)\}_{i=1}^n{}_{j=1}^n$ *не равен нулю.*

Из леммы 1 непосредственно вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Функция* $u(t)$ *принадлежит подпространству, натянутому на линейно независимую систему* $\{u_j(t)\}_{j=1}^n$ *тогда и только тогда, когда* $u(t)$ *есть неподвижная точка проектора* $(Qu)(t) = \sum_{j=1}^n v_j(t)u(s_j)$, *где* $(v_1(t),\ldots,v_n(t)) = (u_1(t),\ldots,u_n(t))H_n^{-1}$, H_n^{-1} — *матрица, обратная к матрице Хаара.*

Л е м м а 2. *Функция* $u(t)$ *обращается в нуль в различных точках* $\{t_i\}_{i=1}^n \subset J$ *тогда и только тогда, когда она принадлежит нуль-пространству конечномерного линейного оператора* $(Pu)(t) = \sum_{i=1}^n \omega_i(t)u(t_i)$, *где* $\{\omega_i(t)\}_{i=1}^n$ *есть линейно независимая на интервале* J *система скалярных функций.*

Т е о р е м а 2. *Система скалярных функций* $\{u_j(t)\}_{j=1}^n$ *будет чебышевской на интервале* J, *если спектральный радиус конечномерного оператора* $K = (I - P)Q$ *меньше единицы при любом выборе различных точек* $\{t_i\}_{i=1}^n$ *интервала* J.

Список литературы

1. Бернштейн С.Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Ч. 1. Л.–М.: ОНТИ, 1937. 203 с.
2. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гостехиздат, 1954. 328 с.
3. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976. 568 с.
4. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М: Наука, 1965. 408 с.
5. Жидков Н.П. Линейные аппроксимации функционалов. М: Изд-во Моск. ун-та, 1977. 264 с.
6. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
7. Демидович В.Б., Магарил–Ильяев Г.Г., Тихомиров В.В. Экстремальные задачи для линейных функционалов на чебышевских пространствах // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 2. С. 87–100.
8. Женсыкбаев А.А. Проблемы восстановления операторов. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 412 с.
9. Дерр В.Я. Неосцилляция решений линейных дифференциальных уравнений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 1. С. 56–100.
10. Левин А.Ю. Избранные труды. Ярославль; Рыбинск: Рыбинский Дом печати, 2010. 320 с.
11. Исламов Г. Г., Исламов А.Г., Лукин О.Л. Об одном применении чебышевской системы функций // Телематика' 2008 : труды XV Всероссийской науч.-метод. конференции. СПбГУ ИТМО. СПб, 2008. С. 53–54.
12. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Наука, 1991. 554 с.

Поступила в редакцию 15.02.2012

G. G. Islamov, Yu. V. Kogan

On Chebyshev's systems

Some sufficient conditions for linearly independent system of continuous functions to be Chebyshov system are considered.

Keywords: linearly independent system, Chebyshev system.

Mathematical Subject Classifications: 41A50

Исламов Галимзян Газизович, д.ф.-м.н., профессор, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: ggislamov@gmail.com

Коган Юрий Вольфович, к.ф.-м.н., доцент, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: koganyv@gmail.com

Islamov Galimzyan Gazizovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia

Kogan Yurii Vol'fovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia