УДК УДК 517.929.4+519.21

© *Р. И. Кадиев, А. В. Поносов*

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ «W-МЕТОДОМ» Н. В. АЗБЕЛЕВА

Кратко изложены идеи Н. В. Азбелева, получившие развитие в связи с исследованием задач устойчивости решений линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: устойчивость решений, метод вспомогательных уравнений.

Вопросам устойчивости решений стохастических функционально–дифференциальных уравнений посвящены многие исследования отечественных и зарубежных математиков (см., например, монографии [14, 15] и имеющиеся в них ссылки). В основном, в этих работах анализ устойчивости проводился на основе классического метода Ляпунова–Красовского–Разумихина. Этот метод предполагает существование подходящей функции Ляпунова или функционала Ляпунова–Красовского, которые обеспечивают желаемое свойство устойчивости (или более общего асимптотического поведения) решений исследуемых уравнений.

Результаты, основанные на методе Ляпунова–Красовского–Разумихина, безусловно, охватывают многие важные случаи. Однако, не во всех ситуациях этот метод бывает одинаково эффективным. В частности, для уравнений с запаздыванием и их обобщений не все классические концепции Ляпунова являются естественными и не всегда приводят к желаемым результатам. Скорее всего, этот эффект может быть объяснён отсутствием у уравнений с последействием некоторых специфических свойств обыкновенных дифференциальных уравнений [1].

С другой стороны, в теории устойчивости решений детерминированных функционально–дифференциальных уравнений широкое применение и высокую эффективность показал метод вспомогательных или «модельных» уравнений — так называемый «W-метод» Н. В. Азбелева [3]. Этот метод, восходящий к классическим идеям Е. А. Барбашина [2], может быть схематически описан следующим образом. Прежде всего, мы устанавливаем эквивалентность асимптотических свойств решений исследуемого линейного уравнения с принадлежностью этих решений специальным функциональным пространствам на полуоси или — для получения более полной информации — доказываем наличие связи между асимптотическим поведением решений уравнения и допустимостью определенных пар функциональных пространств на полуоси. Для проверки свойств принадлежности или допустимости, мы выбираем более простое уравнение (называемое вспомогательным или модельным уравнением), решения которого уже обладают требуемым асимптотическим свойством. С помощью такого вспомогательного уравнения исходное уравнение преобразовывается к интегральному или, в более общем случае, операторному уравнению. Если последнее разрешимо в соответствующем функциональном пространстве, то допустимость, а значит, и устойчивость (или другое асимптотическое свойство) доказаны. Разрешимость полученного уравнения проверяется методами функционального анализа. Отметим, что этот метод во многих случаях оказывается более конструктивным, чем другие методы [3], а для некоторых стохастических функционально-дифференциальных уравнений даже является единственным известным методом изучения устойчивости [6].

Главной целью доклада является описание вышеизложенных идей Н. В. Азбелева, которые авторы в течение вот уже почти четверти века использовали в своих исследованиях проблем устойчивости решений линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений [4–13].

Главным объектом исследования авторов было линейное функционально-дифференциальное уравнение по семимартингалу. Частными случаями такого уравнения являются, например, функционально-дифференциальные уравнения Ито и их гибриды, функционально-дифференциальные уравнения в мерах, а также другие стохастические дифференциальные уравнения с последействием.

Уместно отметить, что такой объект исследования является стохастическим аналогом общего детерминированного линейного функционально-дифференциального уравнения в форме, которая систематически использовалась в работах Н. В. Азбелева, его коллег и учеников [1]. Общность объекта не была самоцелью: с одной стороны, она позволяла охватить большинство известных типов уравнений с последействием, а с другой стороны, границы общности определялись так, чтобы для разных классов уравнений один и тот же вопрос можно было изучать в рамках единого подхода. При этом методы анализа исследуемых стохастических функционально–дифференциальных уравнений выбирались таким образом, чтобы с их помощью можно было, в частности, доказывать результаты, полученные другими методами.

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
2. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.
3. Березанский Л.М. Развитие W-метода Н.В. Азбелева в задачах устойчивости решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22. № 5. С. 739–750.
4. Кадиев Р.И., Поносов А.В. Устойчивость стохастических функционально-дифференциальных уравнений при постоянно действующих возмущениях // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 2. С. 198–207.
5. Кадиев Р.И. Достаточные условия устойчивости стохастических систем с последействием // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 2. С. 555–564.
6. Кадиев Р.И. Устойчивость решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений: дис. ... д-ра физ.-матем. наук / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2000. 231 с.
7. Kadiev R.I., Ponosov A. Relations between stability and admissibility for stochastic linear functional differential equations // J. Func. Diff. Equations. 2004. P. 1–28.
8. Kadiev R.I., Ponosov A. Stability of stochastic functional differential equations and the W-transform // El. J. Diff. Equations. 2004. Vol. 92. P. 1–36.
9. Kadiev R.I., Ponosov A. Linear stochastic functional differential equations: stability, admissible pairs of spaces and N. V. Azbelev's W-method // Problems of Nonlin. An. in Engineering Syst. 2006. Vol. 25. № 1. P. 57–89.
10. Kadiev R.I., Ponosov A. Stability of solutions of linear impulsive systems of Ito differential equations with aftereffect // Differential Equtions. 2007. Vol. 43. № 7. P. 898–904.
11. Kadiev R.I., Ponosov A. Stability of solutions of linear impulsive systems of stochastic differential equations with bounded delays // Differential Equations. 2010. Vol. 46. № 3. P. 486–498.
12. Kadiev R.I., Ponosov A. The W-transform in stability analysis for stochastic linear functional difference equations // J. Math. Analysis and Appl. 2012. Vol. 389. № 2. P. 1239–1250.
13. Kadiev R.I., Ponosov A. Stability of Impulsive Stochastic Differential Equations with Linear Delays // J. of Abstract Diff. Equations and Appl. 2012. Vol. 2. № 2. P. 7–25.
14. Kolmanovskii V.B., Nosov V.R. Stability of Functional Differential Equations. New York: Academic Press, 1986. 217 p.
15. Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications. Chichester: Horwood Publishing ltd., 1997. 360 p.

Поступила в редакцию 15.02.2012

R. I. Kadiev, A. V. Ponosov

Studies of stability problems for linear stochastic functional-differential equations by N. V. Azbelev's «W-method».

N. V. Azbelev's ideas, which have been developed in connections with the studies of stability of solutions to linear stochastic functional differential equations, are briefly summarized.

Keywords: stability of solutions, method of the auxiliary equations.

Mathematical Subject Classifications: 34H15, 34G15

Кадиев Рамазан Исмаилович, д.ф.-м.н., профессор, Дагестанский государственный университет, 367025, Россия, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43 a. E-mail: kadiev_r@mail.ru

Поносов Аркадий Владимирович, профессор, Норвежский университет естественных наук, 1432, Норвегия, г. Ос, ул. Дрёбаквайен, 31. E-mail: arkadi@umb.no

Kadiev Ramazan Ismailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Dagestan State University, ul. M. Gadzhieva, 43 a, Makhachkala, 367025, Russia

Ponosov Arkadii Vladimirovich, Professor, Norwegian University of Life Sciences, Drøbakveien, 31, Ås, 1432, Norway