УДК 517.977

© *Д. В. Корнев*

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНФЛИКТНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

Для линейно-выпуклых позиционных дифференциальных игр с показателями качества, оценивающими отклонения траектории движения в заданные моменты времени от заданных целей, обсуждается метод вычисления цены и оптимальных законов управления, основанный на рекуррентном построении выпуклых сверху оболочек подходящих вспомогательных функций.

Ключевые слова: дифференциальные игры, цена игры, седловая точка, минимаксная-максиминная стратегии.

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается позиционная дифференциальная игра [1–3], описываемая уравнением движения

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t)x + f(t,u,v), \quad t_0 \leqslant t < \vartheta, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ u \in P \subset \mathbb{R}^r, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^s, \end{gathered} \tag{1}$$

и показателем качества

$$\gamma = \mu_1\Big(D_1\big(x(t_1) - c_1\big), \ldots, D_N\big(x(t_N) - c_N\big)\Big). \tag{2}$$

Здесь x — фазовый вектор; $\dot{x} = dx/dt$; u — управляющие воздействия первого игрока, v — второго; $A(t)$ и $f(t,u,v)$ — непрерывные по совокупности переменных матрица-функция и вектор-функция, соответственно; моменты времени t_0 и ϑ зафиксированы; P и Q компактны; $t_i \in [t_0, \vartheta]$: $t_i < t_{i+1}$, $i = 1, \ldots, N-1$, $t_N = \vartheta$, — заданные моменты времени оценки качества движения; $c_i \in \mathbb{R}^n$ — целевые векторы, D_i — постоянные $d_i \times n$-матрицы с линейно независимыми строками; $\mu_1(y_1, \ldots, y_N)$ — норма в пространстве $(d_1 + \ldots + d_N)$–мерных векторов-наборов $(y_1, \ldots, y_N)$, составленных из d_i–мерных векторов y_i, $i = 1, \ldots, N$. Первый игрок нацелен минимизировать показатель γ, второй — максимизировать.

Предполагается, что существуют нормы $\mu_i\big(y_i, \ldots, y_N\big)$ и $\sigma_i(y_i, \beta)$, для которых справедливы равенства

$$\mu_i(y_i, \ldots, y_N) = \sigma_i(y_i, \beta), \ \beta = \mu_{i+1}(y_{i+1}, \ldots, y_N), \ i = 1, \ldots, N-1.$$

Тогда [4] показатель качества γ является позиционным [3, с. 43].

Известно [3, с. 71], что, если для системы (1) выполнено условие седловой точки в маленькой игре, то есть для любых $m \in \mathbb{R}^n$ и $t \in [t_0, \vartheta]$ справедливо равенство

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle m, f(t,u,v)\rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle m, f(t,u,v)\rangle, \tag{3}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов, то рассматриваемая дифференциальная игра имеет цену и седловую точку в классе чистых позиционных стратегий $u(t,x,\varepsilon)$, $v(t,x,\varepsilon)$. Если же условие (3) не выполняется, то чистых позиционных стратегий недостаточно, и имеет смысл [1, 3] рассматривать формализации дифференциальной игры (1), (2) в следующих классах стратегий:

(a) стратегии $u(t,x,\varepsilon)$ первого игрока — контрстратегии $v(t,x,u,\varepsilon)$ второго,
(b) контрстратегии $u(t,x,v,\varepsilon)$ первого — стратегии $v(t,x,\varepsilon)$ второго,
(c) смешанные стратегии игроков S^u и S^v (см. подробности в [2], а также в [3, с. 248]).

Цель работы состоит в развитии и программной реализации метода для вычисления цены и построения соответствующих оптимальных законов управления в игре (1), (2) во всех перечисленных выше случаях. Базу развиваемого метода составляют процедуры из [3, 4], которые идейно связаны с конструкцией стохастического программного синтеза [1] и основаны на рекуррентном построении выпуклых сверху оболочек подходящих вспомогательных функций. Ниже приведем результаты численных экспериментов на модельном примере.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11–01–12088-офи-м–2011).

§ 2. Пример

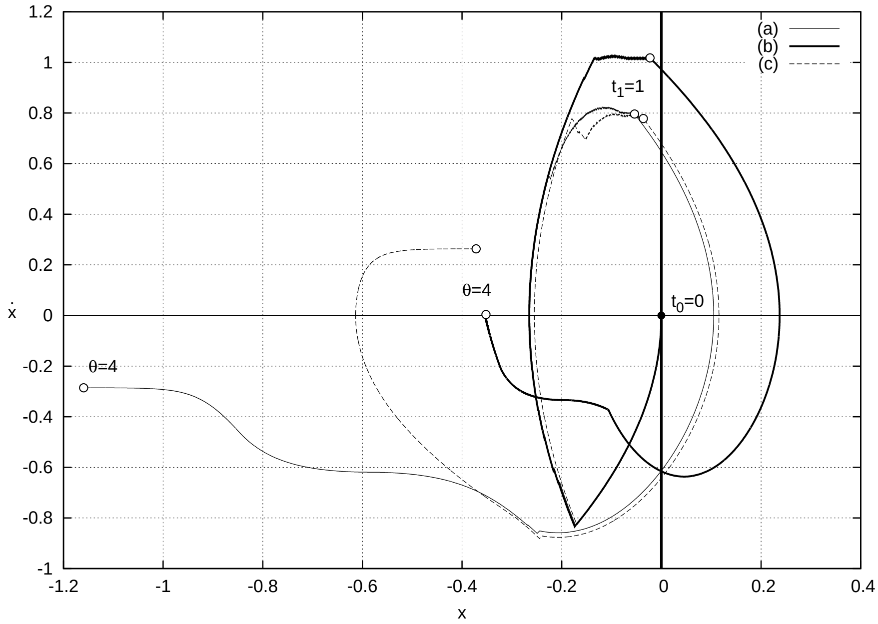
Рассмотрим дифференциальную игру, описываемую уравнением движения

$$\ddot{x} = \frac{4\,u}{1+e^{\,8(t-2)}} + \frac{(u+v)^2}{2} + \frac{2\,v}{1+e^{\,8(3-t)}}, \quad t_0 = 0 \leqslant t < \vartheta = 4, \quad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0,$$
$$u \in P = \{-1, 1\}, \quad v \in Q = \{-1, 1\}, \tag{4}$$

и показателем качества

$$\gamma = \sqrt{x^2(1) + x^2(4)}. \tag{5}$$

В данной игре условие седловой точки в маленькой игре не выполнено. Априорно вычисленная цена игры (4),(5) для случаев (a), (b) и (c) соответственно равна $\rho_a = 1.13$, $\rho_b = 0.34$ и $\rho_c = 0.36$. На рисунке изображены траектории движения, смоделированные при совместном действии оптимальных законов управления игроков. Реализовавшиеся значения показателя качества составили, соответственно: $\gamma_a = \sqrt{(-0.053)^2 + (-1.159)^2} \approx 1.16$, $\gamma_b = \sqrt{(-0.022)^2 + (-0.351)^2} \approx 0.35$, $\gamma_c = \sqrt{(-0.036)^2 + (-0.371)^2} \approx 0.37$.



Список литературы

1. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М: Наука, 1985. 520 с.
2. Красовский А.Н. Построение смешанных стратегий на основе стохастических программ // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 186–192.
3. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under Lack of Information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p.
4. Лукоянов Н.Ю. К вопросу вычисления цены дифференциальной игры для позиционного функционала // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 188–198.

Поступила в редакцию 15.02.2012

D. V. Kornev

On a numerical method of solving conflict control problems

Linear-convex positional differential games with quality indices that evaluate deviations of the motion trajectory at the given instants from the given targets are considered. A numerical method of computing the game value and optimal control laws is discussed. The method is based on a recurrent construction of upper convex hulls of appropriate auxiliary functions.

Keywords: differential games, game value, saddle point, minmax-maxmin strategies.

Mathematical Subject Classifications: 49N70

Корнев Дмитрий Васильевич, ассистент, кафедра вычислительной математики, Уральский федеральный университет, 620083, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51. E-mail: d.v.kornev@gmail.com

Kornev Dmitrii Vasil'evich, Assistant Lecturer, Department of Computational Mathematics, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620083, Russia