УДК 517.966

© ***В. В. Крахотко, Г. П. Размыслович***

H-УПРАВЛЯЕМОСТЬ РЕГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ

Получены необходимые и достаточные условия управляемости на подпространство дифференциально-алгебраической системы с распределенным запаздыванием по управлению.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические системы, системы с распределенным запаздыванием, управляемость.

Рассмотрим систему управления вида

$$A_0\dot{x}(t) = Ax(t) + \int_0^h B(s)u(t-s)ds, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \quad u_0(\cdot) = \{u(t) = \varphi(t),\ t \in [-h;0)\}, \tag{2}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r$, A_0, A — постоянные $n \times n$-матрицы; $h > 0$ — число (запаздывание); x_0 — заданный n-вектор; $\varphi(t)$ — заданная кусочно-непрерывная r-вектор-функция на промежутке $[-h, 0)$; $B(s)$, $s \in [0, h]$ — достаточно гладкая $n \times r$-матричная функция ($B(s) \equiv 0$, $s \notin [0, h]$).

Систему (1) будем называть регулярной [1], если регулярен пучок матриц $(\lambda A_0 - A)$, то есть найдется число $\lambda_0 \in C$ такое, что $\det(\lambda_0 A_0 - A) \neq 0$.

Пусть H — некоторая постоянная $n \times n$-матрица.

О п р е д е л е н и е 1. Регулярную систему (1) назовем H-управляемой, если для любого допустимого начального состояния (2) найдутся момент времени t_1, $t_1 < +\infty$, и достаточно гладкое управление $u(t)$, $t \in [0; t_1 - h]$, $u(t) \equiv 0$, $t > t_1 - h$, такие, что решение $x(t)$, $t \geqslant 0$, системы (1), (2), обладает свойством $Hx(t_1) = 0$.

Согласно [2], положим

$$x(t) = p(t) + \int_0^h M(s)u(t-s)ds, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

где $p(t)$ — n-вектор функция, $M(s)$, $s \in [0, h]$, ($M(s) \equiv 0$, $s \notin [0, h]$) — $n \times r$-матричная функция.

Предположим, что $M(s)$, $s \in [0, h]$ удовлетворяет матричному уравнению

$$A_0\dot{M}(s) = AM(s) + B(s), \quad s \in [0; h] \tag{4}$$

с начальным условием

$$A_0 M(h) = 0. \tag{5}$$

С учетом (3)–(5) система управления (1), (2) преобразуется к некоторой системе вида

$$\hat{A}_0\dot{p}(t) = \hat{A}p(t) + \hat{B}u(t), \quad t \geqslant 0, \tag{6}$$

которая эквивалентна системе (1) в смысле H-управляемости.

Вместе с тем [3, 4] решение системы (6) является выходом системы

$$\dot{Y} = \bar{A}Y + \bar{B}v, \quad p = \bar{C}Y, \tag{7}$$

где $Y = (y, u_1, \ldots, u_k)$, $u_i = u^{(i-1)}, i = \overline{1,k}$; k — число-индекс матрицы $\hat{A}_0$; $v = u^{(k)}$;

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_0^d\hat{A} & \hat{A}_0^d\hat{B} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & E_r & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & E_r \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ E_r \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = [\hat{A}_0\hat{A}_0^d, (E_n - \hat{A}_0\hat{A}_0^d)\hat{A}^d\hat{B}, \ldots, (-1)^{k-1}(E_n - \hat{A}_0\hat{A}_0^d)(\hat{A}_0\hat{A}^d)^{k-1}\hat{A}^d\hat{B}];$$

$\hat{A}_0^d$, $\hat{A}^d$ — обратные матрицы Драйзина матрицам $\hat{A}_0$, $\hat{A}$ соответственно.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Для H-управляемости регулярной системы (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\operatorname{rank}(H\hat{A}_0\hat{A}_0^d; (-1)^j H(E_n - \hat{A}_0\hat{A}^d)(\hat{A}_0\hat{A}^d)^j\hat{A}^d\hat{B}, \quad j = \overline{0, k-1};$$
$$H(\hat{A}_0^d\hat{A})^i\hat{A}_0^d\hat{B}, \quad i = \overline{0, n-1}) = \operatorname{rank}\big((-1)^j H(E_n - \hat{A}_0\hat{A}_0^d)(\hat{A}_0\hat{A}^d)^j\hat{A}^d\hat{B}, \quad j = \overline{0, k-1};$$
$$H(\hat{A}_0^d\hat{A})^i\hat{A}_0^d\hat{B}, \ i = \overline{0, n-1}\big).$$

Список литературы

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
2. Крахотко В.В., Размыслович Г.П. Полная управлемость на подпространство линейных систем с запаздыванием по управлению // Вестник БГУ. Сер. 1. 2006. № 3. 2. С. 130–132.
3. Крахотко В.В., Размыслович Г.П. К проблеме полной управляемости динамических систем // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 9. С. 1707–1709.
4. Крахотко В.В., Размыслович Г.П. К проблеме управляемости дифференциально-алгебраических систем // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 9. С. 1291–1292.

Поступила в редакцию 20.02.2012

V. V. Krakhotko, G. P. Razmyslovich

H-controllability of regular differential-algebraic systems with a distributed delay in control

The necessary and sufficient conditions of controllability on the subspace for differential-algebraic systems with a distributed delay in the control are obtained.

Keywords: differential-algebraic systems, systems with a distributed delay, controllability of systems.

Mathematical Subject Classifications: 34A09, 34H05, 93B05

Крахотко Валерий Васильевич, к.ф.-м.н., доцент, кафедра оптимального управления, Белорусский государственный университет, 220050, Беларусь, г. Минск, пр. Независимости, 4. E-mail: krakhotko@bsu.by

Размыслович Георгий Прокофьевич, к.ф.-м.н., доцент, кафедра высшей математики, Белорусский государственный университет, 220050, Беларусь, г. Минск, пр. Независимости, 4. E-mail: razmysl@bsu.by

Krakhotko Valerii Vasil'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Optimal Control, Belarusian State University, pr. Nezavisimosti, 4, Minsk, 220050, Belarus

Razmyslovich Georgii Prokof'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of High Mathematics, Belarusian State University, pr. Nezavisimosti, 4, Minsk, 220050, Belarus