УДК 517.95

© *И. В. Лисаченко, В. И. Сумин*

ОБ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЯХ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ДЛЯ ТЕРМИНАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ГУРСА–ДАРБУ[1]

Рассматриваются свойства особых управлений принципа максимума для терминальной задачи оптимизации нелинейной системы Гурса–Дарбу.

Ключевые слова: нелинейная система Гурса–Дарбу, решения с суммируемыми смешанными производными, терминальная задача оптимизации, принцип максимума, особые управления.

В теории оптимизации распределенных систем *особые управления* (ОУ) *принципа максимума* (ПМ) изучались прежде всего для являющейся «пробным камнем» этой теории системы Гурса–Дарбу и близких к ней (см. библиографию в [1, 2]). При этом, как правило, рассматривались абсолютно-непрерывные решения системы с ограниченной смешанной производной. В последнее время наблюдается устойчивый интерес к задачам оптимизации систем типа Гурса–Дарбу в классах абсолютно непрерывных функций с суммируемой смешанной производной (см. библиографию в [3, 4]). В этом случае, видимо, ОУ ПМ систематически никем не изучались.

В докладе рассматривается терминальная задача оптимизации нелинейной управляемой системы Гурса–Дарбу с каратеодориевской правой частью уравнения при условиях, позволяющих искать решения системы в классе функций с суммируемой в степени $p>1$ смешанной производной. Показывается, что, если правая часть аффинно зависит от первых производных, то характерно сильное вырождение ОУ поточечного ПМ (*необходимого условия оптимальности* (НУО) первого порядка при игольчатом варьировании управления), когда вместе с ПМ на ОУ вырождаются и условия второго порядка. Приводятся содержательные НУО сильно вырожденных ОУ. Указанные результаты опираются на работы [3, 4] и получены с помощью общей схемы [1, 2] изучения ОУ, использующей возможность представления управляемой системы в форме вольтеррова функционально-операторного уравнения в лебеговом пространстве и теорию тензорных произведений лебеговых пространств для вычисления старших вариаций функционалов. Приведём пример условий сильного вырождения ОУ.

Примем соглашения: векторы, если не оговорено противное, считаются столбцами; если X — функциональное пространство, то X^n — пространство n-вектор-функций, а $X^{n\times m}$ — $(n\times m)$-матриц-функций, составленных из элементов X; $p\in(1,\ \infty)$ — заданное число, $q\equiv p/(p-1)$; $\Pi\equiv[0,1]^2$; $L_k\equiv L_k(\Pi)$; AC_p — класс абсолютно непрерывных на Π функций с суммируемыми в степени p смешанной и первыми производными. Рассмотрим задачу Гурса–Дарбу

$$x''_{t^1t^2}(t)=g(t,x(t),x'_{t^1}(t),x'_{t^2}(t),u(t)),\quad t\equiv\{t^1,t^2\}\in\Pi\equiv[0,1]^2, \tag{1}$$

$$x(t^1,0)=\varphi_1(t^1),\quad x(0,t^2)=\varphi_2(t^2),\quad t^1\in[0,1],\quad t^2\in[0,1], \tag{2}$$

где $g(t,l_0,l_1,l_2,v)\equiv g(t,l,v)\colon \Pi\times R^{3n}\times R^m\to R^n$ и $\varphi_i(t^i)\colon[0,1]\to R^n$, $i=1,2$, заданы, $u(t)\colon\Pi\to R^m$ — управление. Считаем: g аффинна по l_1, l_2, дважды дифференцируема по l при каждом v для почти всех t и вместе с производными g'_l, g''_{ll} измерима по t при любых $\{l,v\}$ и непрерывна по $\{l,v\}$ для почти каждого t; $\varphi'_i\in L^n_p([0,1])$, $\varphi_i(0)=0$, $i\in\{1,2\}$; допустимы $u(\cdot)$ со значениями из ограниченного $V\subset R^m$, D — класс таких $u(\cdot)$. Пусть: $f(t,l,v)\equiv g(t,l_0+\varphi_1(t^1)+\varphi_2(t^2),l_1+\varphi'_1(t^1),l_2+\varphi'_2(t^2),v)$; $\mathfrak{M}\equiv L^n_\infty\times L^n_p\times L^n_p$, $\mathfrak{N}_0\equiv L^{n\times n}_p$, $\mathfrak{N}_1\equiv L^{n\times n}_\infty$, $\mathfrak{N}\equiv\mathfrak{N}_0\times\mathfrak{N}_1\times\mathfrak{N}_1$. Пусть g такова, что формулы $\mathfrak{F}[y,u](t)\equiv f(t,y(t),u(t))$, $\Phi[y,u](t)\equiv f'_l(t,y(t),u(t))$, $\Phi^k_{ij}[y,u](t)\equiv f^{k\prime\prime}_{l_il_j}(t,y(t),u(t))$ $(k=1,\dots,n,\ 0\leqslant i,j\leqslant 2)$ задают ограниченные операторы $\mathfrak{F}[\cdot,\cdot]\colon\mathfrak{M}\times D\to L^n_p$, $\Phi[\cdot,\cdot]\colon\mathfrak{M}\times D\to\mathfrak{N}$, $\Phi^k_{00}[\cdot,\cdot]\colon\mathfrak{M}\times D\to\mathfrak{N}_0$, $\Phi^k_{ij}[\cdot,\cdot]\colon\mathfrak{M}\times D\to\mathfrak{N}_1$ $(\{ij\}\neq\{00\})$, причём при любом $u\in D$ оператор $\Phi[\cdot,u]\colon\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$ непрерывен, а любой оператор $\Phi^k_{ij}[\cdot,\cdot]$ непрерывен в норме

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

$\mathfrak{M}\times L_1^m$. Множество тех $u\in D$, каждому из которых отвечает единственное глобальное решение x_u задачи (1)–(2) из класса AC_p^n, обозначим Ω. Рассмотрим *простейшую терминальную задачу* (ПТЗ): $J[u]\equiv G(x_u(1,1))\to\max$, $u\in\Omega$, где $G(\cdot)\colon R^n\to R$ — функция класса C_2.

Пусть u_0 — решение ПТЗ, x_0 — решение (1)–(2), отвечающее u_0. Введём обозначения: $A_1[z](t)\equiv\int_0^{t^2}z(t^1,\xi)\,d\xi$, $A_2[z](t)\equiv\int_0^{t^1}z(\xi,t^2)\,d\xi$, $A_0\equiv A_1A_2\equiv A_2A_1$, $A[z]\equiv\{A_0[z],A_1[z],A_2[z]\}$. Рассматривая A как оператор из L_p^n в $\mathfrak{M}$, заметим, что сопряжённый оператор $A^*:\mathfrak{M}^*\to L_q^n$ на $L_1^n\times L_q^n\times L_q^n$ имеет вид $A^*[z]\equiv A_0^*[z^0]+A_1^*[z^1]+A_2^*[z^2]$, $z=\left\{z^0,z^1,z^2\right\}\in L_1^n\times L_q^n\times L_q^n$. Положим $\pi(t,v)\equiv\langle\Psi(t),\Delta_v g(t)\rangle$, $t\in\Pi$, $v\in V$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в R^n, $\Psi\in L_\infty^n$ — решение уравнения $\Psi-A^*\left[\left\{g_l'(\cdot,x_0,x_{0t^1}',x_{0t^2}',u_0)\right\}^*\Psi\right]=(G'(x_0(1,1)))^*$, $\Delta_v g(\cdot)\equiv g(\cdot,x_0,x_{0t^1}',x_{0t^2}',v)-g(\cdot,x_0,x_{0t^1}',x_{0t^2}',u_0)$.

Пусть: Σ — совокупность всех наборов $\sigma\equiv\{\tau,v\}$, в каждом из которых v — какой-то элемент V, $\tau\in\Pi$ — некоторая правильная точка Лебега функции $\pi(\cdot,v)$; $\mathcal{H}$ — семейство всех пар $h\equiv\{\sigma,\varepsilon\}$, в каждой из которых $\sigma\equiv\{\tau,v\}\in\Sigma$, а ε — такое положительное число, что множество $\Pi_\varepsilon(\tau)\equiv\tau-\varepsilon[0,1]^2$ принадлежит Π. Каждому $h\equiv\{\sigma,\varepsilon\}\in\mathcal{H}$ отвечает допустимое управление $u_h(t)\equiv\{v,\ t\in\Pi_\varepsilon(\tau);\ u_0(t),\ t\in\Pi\setminus\Pi_\varepsilon(\tau)\}$, а каждому набору *параметров варьирования* $\sigma\equiv\{\tau,v\}\in\Sigma$ — семейство функций $\{u_h(\cdot)\}_{h\in\mathcal{H}}$, *простейшая одноточечная игольчатая варианта* (ПОИВ) управления u_0.

Положим $\Delta_uJ\equiv J[u]-J[u_0]$, $u\in\Omega$. Предел $\delta^{\gamma-1}J(\sigma)\equiv\lim\limits_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{-\gamma}\Delta_{u_h}J$, если он существует при некотором $\gamma\geqslant2$, назовем *вариацией порядка* $\gamma-1$ *функционала* J *на* ПОИВ; соответственно НУО вида $\delta^{\gamma-1}J(\sigma)\leqslant0$ $(\sigma\in\Sigma)$ назовем НУО порядка $\gamma-1$ управления u_0 относительно ПОИВ. Так как для каждого $v\in V$ при почти всех $\tau\in\Pi$ имеем $\delta^1J(\sigma)=\pi(\tau,v)$, то для ПТЗ справедлив поточечный ПМ (НУО первого порядка относительно ПОИВ): *для каждого* $v\in V$ *при почти всех* $\tau\in\Pi$ *выполняется неравенство* $\pi(\tau,v)\leqslant0$.

Управление u_0 назовём ОУ ПМ, если $\pi(\tau,v)=0$ для каждого $v\in V$ при почти всех $\tau\in\Pi$. Назовём такое ОУ u_0 *сильно вырожденным относительно* ПОИВ, если тождественно зануляется вариация 2-го порядка: $\delta^2J(\sigma)\equiv0$, $\sigma\in\Sigma$.

При указанных выше условиях всякое ОУ *поточечного* ПМ *сильно вырождено.*

Список литературы

1. Сумин В.И. Сильное вырождение особых управлений в распределенных задачах оптимизации // ДАН СССР. 1991. Т. 320. № 2. С. 295–299.
2. Сумин В.И. Об особых управлениях поточечного принципа максимума в распределенных задачах оптимизации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 70–80.
3. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Нелинейная управляемая задача Гурса–Дарбу: условия сохранения глобальной разрешимости // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 858–870.
4. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Принцип максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу в классе функций с суммируемой смешанной производной // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 52–67.

Поступила в редакцию 15.02.2012

I. V. Lisachenko, V. I. Sumin

On singular controls in the sense of the maximum principle for terminal optimization problem connected with Goursat–Darboux system

The terminal optimization problem for nonlinear Goursat–Darboux system is considered. The characteristics of singular controls in the sense of the maximum principle are discassed.

Keywords: nonlinear Goursat–Darboux system, solutions having summable mixed derivatives, terminal optimization problem, maximum principle, singular controls.

Mathematical Subject Classifications: 93C23

Лисаченко Ирина Владимировна, старший преподаватель, Нижегородский государственный технический университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. К. Минина, 24. E-mail: i_lisach@mail.ru

Сумин Владимир Иосифович, заведующий кафедрой математической физики, Нижегородский государственный университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23. E-mail: v_sumin@mail.ru

Lisachenko Irina Vladimirovna, Lecturer, Nizhni Novgorod State Technical University, ul. Minina, 24, Nizhni Novgorod, 603600, Russia

Sumin Vladimir Iosifovich, Head of the Department of Mathematical Physics, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia