УДК 519.6

© *С. В. Лутманов*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОМПРОМИССНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ

Вводится понятие компромиссного набора стратегий для дифференциальной игры нескольких лиц. Обосновывается способ его построения в классе позиционных стратегий. Рассмотрен модельный пример.

Ключевые слова: компромиссный набор стратегий, равновесие по Нэшу, дифференциальная игра, стабильный мост, экстремальное прицеливание.

Из определения равновесного по Нэшу набора стратегий следует:

1. Сообщество игроков не позволяет любому своему члену получить плату меньше (лучше), чем некоторая величина

$$S_i = \min_{U_i \in \{U_i\}} I_i \left(U_1^0, \ldots, U_{i-1}^0, U_i, U_{i+1}^0, \ldots, U_k^0\right), \quad i \in K = \{1, \ldots, k\}$$

2. Имеет место совпадение этих величин, с соответствующими значениями плат, которые получают игроки при применении равновесного набора стратегий

$$S_i = I_i \left(U_1^0, \ldots, U_{i-1}^0, U_i^0, U_{i+1}^0, \ldots, U_k^0\right)$$

Отказ от выполнения условия 2 приводит к следующему определению. Пусть

$$S_* = (S_{1*}, \ldots, S_{k*}), \quad S^* = (S_1^*, \ldots, S_k^*), \quad S_*,\ S^* \in R^k, \quad S_* \leqslant S^*$$

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что ситуация $W \in \{W\}$ является *компромиссной* по отношению к *векторам* S_*, S^*, если для всех $i \in K$ справедливы неравенства

$$\min_{U_i \in \{U_i\}} I_i \left(U_1, \ldots, U_{i-1}, U_i, U_{i+1}, \ldots, U_k\right) \leqslant I_i \left(U_1, \ldots, U_{i-1}, U_i, U_{i+1}, \ldots, U_k\right) \leqslant S_i^* \quad \forall i \in K.$$

Принцип компромисса обобщает равновесие по Нэшу в том смысле, что при $S_* = S^*$ набор компромиссных стратегий становится равновесным. Компромиссный набор стратегий сохраняет свойство устойчивости по отношению к игроку уклонисту (в ослабленном варианте). Фактором, обеспечивающим устойчивость компромиссного набора стратегий, является потребность игроков не допустить значительный выигрыш какого-либо одного игрока.

Рассмотрим дифференциальную игру k лиц, динамика которой описывается обыкновенным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u_1, \ldots, u_k), \quad t \in [t_0, T], \quad x \in R^n, \quad u_i \in P_i \subset R^{r_i}$$

с функциями платы $\sigma_i = \sigma_i(x(T))$, $i = 1, \ldots, k$.

Пусть $W_{K(i)} \subset [t_0, T] \times R^n$ — максимальный стабильный мост первого игрока см. [1] в игре, в которой множество игроков $K(i)$ решает задачу наведения на множество M_i^c против игрока с номером i в момент времени T. Для всех $i \in K$ полагаем $W_i = \left(W_{K(i)}\right)^c$. Пусть $M \subset \{x \in R^n \mid \sigma_i(x) \leqslant S_i^*,\ i \in K\}$ и существует множество $W \subset [t_0, T] \times R^n$, для которого

1) $W(t) \neq \emptyset$, $t \in [t_0, T]$ — замкнутое множество;

2) $W(t) \cap W_i(t) = \emptyset$, $t \in [t_0, T]$, $i \in K$;

3) $W(T) = M$;

4) для любой позиции $\{t_*, x_*\} \in W$ и момента времени $t^* \in [t_*, T]$ существует набор программных управлений $u_{1*}(\cdot)$,…, $u_{k*}(\cdot)$, $u_{i*}(t) \in P_i$, $t \in [t_*, t^*]$, $i \in K$ всех игроков, такой, что для решения $x(\cdot)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x, u_{1*}(t), \ldots, u_{i*}(t), \ldots, u_{k*}(t)), \quad x(t_*) = x_*$$

выполняется включение $x(t^*) \in W(t^*)$

Набор компромиссных стратегий $U_1, \ldots, U_k$ определим соотношениями

$$U_i[\cdot] = \begin{cases} u_i^{eK}(t,x), \quad x \notin \bigcup\limits_{j \in K} W_j(t), \quad W(t) \neq \emptyset, \\ u_i^{eK(j)}(t,x), \quad x \in W_j(t), \quad j \in K(i), \\ P_i, \end{cases} \quad t \in [t_0, T], \; x \in R^n, \; i \in K.$$

Здесь набор векторов $u_i^{eK}(t,x)$, $i \in K$ удовлетворяет условию

$$s(t,x) \cdot f\left(t, x, u_1^{eK}(t,x), \ldots, u_i^{eK}(t,x), \ldots, u_k^{eK}(t,x)\right) =$$

$$= \min_{(u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_k) \in \prod\limits_{j \in K} P_j} s(t,x) \cdot f(t, x, u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_k),$$

$$s(t,x) = x - x_*, \quad \|x - x_*\| = \min_{\tilde{x} \in W(t)} \|x - \tilde{x}\|,$$

а набор векторов $u_i^{eK(j)}(t,x)$, $i \in K(j)$, $j \in K$ — условию

$$\max_{u_j \in P_j} s^{(j)}(t,x) \cdot f\left(t, x, u_1^{K(j)e}(t,x), \ldots, u_j, \ldots, u_{j+1}^{K(j)e}(t,x), \ldots, u_k^{K(j)e}(t,x)\right) =$$

$$= \min_{(u_1,\ldots,u_{j-1},u_{j+1},\ldots,u_k) \in \prod\limits_{j \in K(j)} P_j} \max_{u_j \in P_j} s(t,x) \cdot f(t, x, u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_k),$$

$$s^{(j)}(t,x) = x - x_*^{(j)}, \quad \left\| x - x_*^{(j)} \right\| = \min_{\tilde{x} \in (W_j(t))^c} \|x - \tilde{x}\|.$$

Имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Набор стратегий всех игроков* $U_1, \ldots, U_k$ *является компромиссным относительно векторов* S_*, S^*.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.

Поступила в редакцию 15.02.2012

S. V. Lutmanov

Mathematical model of compromise management in differential game of several persons

The concept of a compromise set of strategy for differential game of several persons is entered. The way of its construction in a class of item strategy is proved. The modeling example is considered.

Keywords: a compromise set of strategy, Nash equilibrium, differential game, the stable bridge, an extreme aiming.

Mathematical Subject Classifications: 91A23

Лутманов Сергей Викторович, доцент, кафедра процессов управления и информационной безопасности, Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15. E-mail: mpu@psu.ru

Lutmanov Sergei Viktorovich, Associate Professor, Department of Control Processes and Information Security, Perm State National Research University, ul. Bukireva, 15, Perm, 614990, Russia