УДК 517.929

© *В. В. Малыгина*

МЕТОД TEST-УРАВНЕНИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предлагается метод исследования устойчивости решений линейных скалярных функциионально-дифференциальных уравнений. Семейству уравнений исследуемого класса ставится в соответствие test-уравнение, изучение свойств которого позволяет получить эффективное описание области устойчивости всех уравнений семейства.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с последействием, экспоненциальная устойчивость, равномерная устойчивость.

Выбор метода при исследовании задачи устойчивости функционально-дифференциального уравнения (ФДУ) — это всегда выбор между общностью и точностью. Нет методов, которые обладали бы и тем, и другим качеством. Если метод дает точные и проверяемые условия устойчивости, то он применим к довольно узкому классу объектов: так, полное исследование нулей квазиполиномов дает критерий устойчивости — но только для автономных уравнений; описание спектра оператора монодромии — точный метод, но только для периодических уравнений. Можно привести еще ряд примеров конкретных классов уравнений, но таких классов весьма немного. Если же метод приложим к широкому классу объектов (таковы, например, метод функционалов Ляпунова–Красовского, теоремы Разумихина, W-метод Азбелева), то, применяя его, практически невозможно гарантировать точность получаемых признаков.

Рассмотрим следующий класс уравнений

$$\dot{x}(t) + a_0 x(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k x(t - r_k(t)) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $a_k \geqslant 0$, $0 \leqslant r_k(t) \leqslant \omega_k$ для всех $k = \overline{1,n}$.

Если в указанных границах функции запаздывания могут меняться произвольно, то поиск необходимых и достаточных признаков устойчивости следует признать делом безнадежным и сосредоточиться на достаточных признаках устойчивости. Но такие признаки бывают разной силы. Предпочтение, естественно, следует отдать тем, для которых удается показать существенность входящих в теоремы условий и неулучшаемость границ областей устойчивости.

То, что эта задача в принципе разрешима, показывает известный результат, полученный в 1951 г. в работе [1] А.Д. Мышкиса.

Пусть параметры уравнения $\dot{x}(t) = -ax(t - r(t))$ удовлетворяют условиям $0 \leqslant r(t) \leqslant \omega$. Тогда, если $0 < a\omega < 3/2$, то решение уравнения асимптотически устойчиво; если $0 \leqslant a\omega \leqslant 3/2$, то решение уравнения устойчиво по Ляпунову.

В той же работе приведены примеры, показывающие точность ключевой постоянной $3/2$: если $a\omega = 3/2$, то можно построить запаздывание, при котором решение уравнения не будет асимптотически устойчивым, а если $a\omega = 3/2 + \varepsilon$ (при любом сколь угодно малом ε), то существует запаздывание, при котором решение уравнения неограниченно растет.

Класс уравнений, на котором была показана точность постоянной $3/2$, имеет простую структуру, а поведение их решений было в некотором смысле «предельным»: возникала гипотеза, что устойчивость всех уравнений, удовлетворяющих условиям теоремы 1, можно гарантировать, изучив лишь одно из них.

Близкие идеи обнаружились в работе [2] японского математика T. Amemiya, который изучал устойчивость уравнений $\dot{x}(t) = ax(t) - bx(t - r(t))$, в предположении ограниченности запаздывания: $0 \leqslant r(t) \leqslant \omega$. По заданным a, b, ω он строил вспомогательное уравнение, устойчивость которого обеспечивала устойчивость рассматриваемого уравнения при любом запаздывании. Исследование вспомогательного уравнения в работе T. Amemiya проводилось компьютерными методами.

Развитие этих идей привело нас [3, 4] к методу *test-уравнений*, суть которого состоит в следующем.

Пусть в уравнении (1) фиксирован набор коэффициентов a_0, $a_1, \ldots$, a_n и границ запаздываний ω_1, $\omega_2, \ldots$, ω_n. Назовем *семейством* (1) множество уравнений вида (1) при любых измеримых функциях r_k, удовлетворяющих заданным оценкам. Семейство уравнений называется устойчивым, если устойчивы все входящие в него уравнения. Поставим в соответствие семейству (1) автономное уравнение

$$\dot{y}(t) + a_0 y(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k y(t - \omega_k) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

дополненное начальными условиями $y(\xi) = 1$ при $\xi \leqslant 0$. Уравнение (2) будем называть *test-уравнением.*

Обозначим $l = \inf\{t \geqslant 0 : \dot{y}(t) > 0\}$ первую точку минимума решения уравнения (2). Случай $l = \infty$ не исключается; он соответствует ситуации, когда y монотонно убывает на полуоси.

Следующие теоремы сводят исследование устойчивости семейства (1) к исследованию конкретного свойства решения test-уравнения.

Т е о р е м а 1. *Для экспоненциальной устойчивости уравнения* (1) *необходимо и достаточно выполнения одного из условий:*

- $l = \infty, \quad a_0 < \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k \omega_k < 1;$
- $l < \infty, \quad y(l) > -1.$

Т е о р е м а 2. *Для равномерной устойчивости уравнения* (1) *необходимо и достаточно выполнения одного из условий:*

- $l = \infty, \quad a_0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k \omega_k < 1;$
- $l < \infty, \quad y(l) \geqslant -1.$

Дальнейшее исследование свойств test-уравнений показало, что число l можно эффективно вычислить (или доказать, что $l = \infty$), а равенство $y(l) = -1$ переформулировать в терминах параметров исходной задачи, определив тем самым точную границу области устойчивости. При небольшом количестве параметров эту область можно интерпретировать как множество на плоскости или в пространстве.

Список литературы

1. Мышкис А.Д. О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Математический сборник. 1951. Т. 28. № 3. С. 641–658.
2. Amemiya T. On the delay-independent stability of a delayed differential equation of 1^{st} order // J. Math. Anal. Appl. 1989. Vol. 142. № 1. P. 13–25.
3. Малыгина В.В. Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с последействием // Известия вузов. Математика. 1993. № 5. С. 72–85.
4. Малыгина В.В., Чудинов К.М. Об устойчивости знакоопределенных решений скалярных уравнений с несколькими запаздываниями // Вестник ПГТУ. Механика. Пермь, 2009. № 1. С. 28–45.

Поступила в редакцию 15.02.2012

V. V. Malygina

The test-equation method in investigation of stability of functional differential equations

A method is proposed for investigation of stability of solutions to linear scalar functional differential equations. A test equation is put into correspondence to a family of equations of a class being investigated. The study of properties of the test equation makes it possible to obtain an effective description of the stability regions of all equations of the family.

Keywords: differential equation with aftereffect, exponential stability, uniform stability.

Mathematical Subject Classifications: 34K20

Малыгина Вера Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр., 29. E-mail: mavera@list.ru

Malygina Vera Vladimirovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Perm National Research Polytechnic University, Komsomolskii pr., 29, Perm, 614990, Russia