УДК 517.911, 517.968

© *Е. В. Малютина*

ОБ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЕ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Рассматриваются некоторые свойства управляемой системы с фазовыми ограничениями по управлению, многозначными импульсными воздействиями и запаздыванием.

Ключевые слова: управляемая система, многозначные импульсные воздействия.

Пусть $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ $(\mathrm{conv}[\mathbb{R}^n])$ — множество всех непустых (выпуклых) компактов n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ с нормой $|\cdot|$; $L^n_\infty[a,b]$ — пространство измеримых по Лебегу ограниченных в существенном функций $x\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L_\infty[a,b]}=\mathrm{vraisup}\{|x(t)| : t\in[a,b]\}$.

Пусть $t_k\in[a,b]$ $(a<t_1<\ldots<t_m<b)$ — конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{C}^n[a,b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, …, $(t_m,b]$ ограниченных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k=1,2,\ldots,m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{C}^n[a,b]}=\sup\{|x(t)| : t\in[a,b]\}$.

Пусть заданы непрерывная функция $f\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ и непрерывное по Хаусдорфу (см. [1]) многозначное отображение $U\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{conv}[\mathbb{R}^m]$. Рассмотрим управляемую систему с запаздыванием и многозначными импульсными воздействиями

$$
\begin{aligned}
&\dot x=f(t,x[p(t)],u(t)),\quad x(t)=\varphi(t),\quad \text{если}\quad p(t)<a,\quad t\in[a,b],\\
&u(t)\in U(t,x[g(t)]),\quad x(t)=\psi(t),\quad \text{если}\qquad g(t)<a,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\Delta(x(t_k))\in I_k(x(t_k)),\ k=1,\ldots,m, \tag{2}
$$

$$
x(a)=x_0, \tag{3}
$$

где $x_0\in\mathbb{R}^n$, функции $p:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ для любого $t\in[a,b]$ непрерывны и удовлетворяют неравенствам $p(t)\leqslant t$, $g(t)\leqslant t$, функции $\varphi:(-\infty,a)\to\mathbb{R}^n$, $\psi:(-\infty,a)\to\mathbb{R}^n$ непрерывны и ограничены. Отображения $I_k:\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $k=1,2,\ldots,m$, непрерывны по Хаусдорфу, $\Delta x(t_k)=x(t_k+0)-x(t_k)$, $k=1,2,\ldots,m$.

Пусть $\tau\in[a,b]$. Определим непрерывные операторы $\mathcal{P}_\tau\colon \widetilde{C}^n[a,\tau]\to L^n_\infty[a,\tau]$, $\mathcal{G}_\tau\colon \widetilde{C}^n[a,\tau]\to L^n_\infty[a,\tau]$ равенствами

$$
(\mathcal{P}_\tau x)(t)=\begin{cases} x[p(t)], & \text{если}\quad p(t)\in[a,\tau],\\ \varphi[p(t)], & \text{если}\quad p(t)<a,\end{cases} \tag{4}
$$

$$
(\mathcal{G}_\tau x)(t)=\begin{cases} x[g(t)], & \text{если}\quad g(t)\in[a,\tau],\\ \psi[g(t)], & \text{если}\quad g(t)<a.\end{cases} \tag{5}
$$

Допустимым управлением на отрезке $[a,\tau]$ $(\tau\in(a,b])$ системы (1)–(2) будем называть измеримую по Лебегу функцию $u:[a,\tau]\to\mathbb{R}^m$, для которой существует кусочно-непрерывная (см. [2]) функция $x:[a,\tau]\to\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая при всех $t\in[a,\tau]$ представлению

$$
x(t)=x_0+\int_a^t f(s,(\mathcal{P}_\tau x)(s),u(s))\,ds+\sum_{k:t_k\in(a,\tau)}\chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)),
$$

где $\Delta(x(t_k))$, $t_k\in(a,\tau)$, удовлетворяют равенствам (2), $\chi_{(c,d]}(\cdot)$ — характеристическая функция полуинтервала $(c,d]$, что при почти всех $t\in[a,\tau]$ выполняется включение

$$
u(t)\in U(t,(\mathcal{G}_\tau x)(t)).
$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 1.1877.2011, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы», ГК № 14.740.11.0349) и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 11–01–00–645).

Пару (u, x) будем называть *допустимой* на отрезке $[a, \tau]$, а систему (1)–(2) — *управляемой системой с фазовыми ограничениями по управлению и многозначными импульсными воздействиями.*

Допустимую пару (u_0, x_0) на отрезке $[a, \tau_0]$ $(\tau_0 \in (a, b))$ будем называть *продолжаемой* (см. [3–5]), если найдется такая допустимая пара (u_1, x_1) на отрезке $[a, \tau_1]$ $(\tau_1 \in (\tau_0, b])$, что $u_1 = u_0$ и $x_1 = x_0$ на $[a, \tau_0]$.

Допустимую пару (u, x) на полуинтервале $[a, c)$ $(c \in (a, b))$ назовем *непродолжаемой*, если не существует такой допустимой пары (u_1, x_1) на полуинтервале $[a, c_1)$ $(c_1 \in (c, b])$, что $u_1 = u$ и $x_1 = x$ на $[a, c)$.

Справедливы следующие утверждения (см. [3]).

Т е о р е м а 1. *Найдется такое $\tau \in (a, b]$, что существует допустимая пара на отрезке $[a, \tau]$.*

Т е о р е м а 2. *Пусть (u, x) допустимая пара на полуинтервале $[a, c)$ $(c \in (a, b))$. Эта пара непродолжаема в том и только в том случае, когда $\overline{\lim\limits_{t \to c-0}} |x(t)| = \infty$.*

Т е о р е м а 3. *Любую допустимую пару на отрезке $[a, \tau]$ можно продолжить до непродолжаемой.*

Управляемая система (1)–(2) с начальным состоянием (3) эквивалентна (см. [6–8]) задаче Коши для дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in F(t, (P_\tau x)(t),\ U(t, (G_\tau x)(t))),\ \ t \in [a, \tau], \tag{6}$$

с многозначными импульсными воздействиями (2) и начальным условием (3), где $U\colon [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{conv}[\mathbb{R}^m]$ — непрерывное по Хаусдорфу многозначное отображение, отображение $F\colon [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ определено равенством $F(t, x, y) = f(t, x, U(t, x))$, непрерывные операторы $\mathcal{P}_\tau\colon \widetilde{C}^n[a, \tau] \to L^n_\infty[a, \tau]$, $\mathcal{G}_\tau\colon \widetilde{C}^n[a, \tau] \to L^n_\infty[a, \tau]$ определены равенствами (4) и (5) соответственно.

Задача (6), (2), (3) описывает все множество фазовых траекторий управляемой системы (1)–(2).

Список литературы

1. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Многозначный анализ и операторные включения // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. 1986. Т. 29. С. 151–211.
2. Финогенко И.А. О дифференциальных уравнениях с разрывной правой частью // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2000. Т. 3. № 2. С. 88–102.
3. Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В. Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Части I–VI // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2009. Т. 14. Вып. 6. С. 1275–1313.
4. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.
5. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
6. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
7. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 1959. № 2. С. 25–32.
8. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры. II. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2010. 389 с.

Поступила в редакцию 15.02.2012

E. V. Malyutina

On control system with multivalued impulses and delay

Some properties of control system with control phase restrictions, multivalued impulse disturbances and delay are under discussion.

Keywords: control system, multivalued impulses.

Mathematical Subject Classifications: 34H05, 34K35

Малютина Елена Валерьевна, ассистент, кафедра алгебры и геометрии, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33. E-mail: aib@tsu.tmb.ru

Malyutina Elena Valer'evna, Assistant Lecturer, Department of Algebra and Geometry, Tambov State University, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000, Russia