УДК 517.929

© ***М. В. Мулюков***

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Для некоторых классов автономных дифференциальных систем второго порядка с запаздывающим аргументом получено эффективное аналитическое описание областей устойчивости. Для каждой области найдена ее эквивалентная геометрическая интерпретация как множества в пространстве параметров исходной задачи.

Ключевые слова: системы линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, экспоненциальная устойчивость, эффективные признаки.

В свете проблем современной физики, биологии, экономики и ряда прикладных задач актуализируются вопросы устойчивости систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Изучение стационарных положений равновесия приводит к исследованию устойчивости по первому приближению нелинейных систем, описываемых, в свою очередь, системами линейных автономных уравнений вида:

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + Bx(t-h) = f(t), \quad h > 0, \quad t \in (0, \infty), \tag{1}$$

где A, B — постоянные вещественные матрицы, $f(t)$ — локально суммируемая вектор-функция. Не нарушая общности можно считать, что $h = 1$.

Известно [1], что функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа асимптотически устойчиво (по начальной точке или по начальной функции) в том и только том случае, если функция Коши имеет оценку: $|C(t,s)| \leqslant Ne^{-\alpha(t-s)}$, что согласно теореме Боля–Перрона эквивалентно устойчивости уравнения (1) по правой части из пространства $L_p\,(p > 1)$. Для автономных систем данное условие совпадает с оценкой фундаментальной матрицы: $|X(t)| \leqslant Ne^{-\alpha t}$.

Для частных случаев (например, если матрицы A и B одновременно приводимы к треугольному виду [2]) систему удаётся свести к скалярным уравнениям, для которых задача отыскания областей асимптотической устойчивости решена [3]. Однако в общем случае вопрос остаётся открытым.

Отметим, что уже для матриц размерностью 2×2, задача является содержательной и нетривиальной. Данная работа посвящена изучению таких систем.

Поставим в соответствие системе (1) характеристический квазиполином:

$$F(p) = \alpha + \beta e^{-p} + \gamma e^{-2p} - \mu p - \nu p e^{-p} + p^2 \tag{2}$$

Квазиполином $F(p)$ имеет пять независимых параметров, инвариантных относительно невырожденных преобразований: след и детерминант матриц A и B и определитель суммы этих матриц. Каждый набор пяти параметров определяет класс систем типа (1). Внутри каждого класса различные системы имеют одинаковые области устойчивости.

Т е о р е м а 1. *Следующие утверждения равносильны:*

a) *Квазиполином* (2) *представим в виде произведения двух независимых квазиполиномов:* $f_1(p) = \lambda_1^A + \lambda_1^B e^{-p} - p$ *и* $f_2(p) = \lambda_2^A + \lambda_2^B e^{-p} - p$;

b) $\mathrm{Sp}(AB) = \lambda_1^A\lambda_1^B + \lambda_2^A\lambda_2^B$, *где* λ_1^A, λ_2^A, λ_1^B, λ_2^B *— собственные числа матриц* A *и* B;

c) $\det(A+B) = (\lambda_1^A + \lambda_1^B)(\lambda_2^A + \lambda_2^B)$;

d) $(2\beta - \mu\nu)^2 = (\mu^2 - 4\alpha)(\nu^2 - 4\gamma)$;

e) $\det(AB - BA) = 0$.

Если система (1) попадает в класс, описываемый теоремой 1, то задача сводится к исследованию квазиполинома вида $f(p) = a + be^{-p} + p$, необходимые и достаточные условия устойчивости которого приведены в [3].

В противном случае, вид функции $F(p)$ не допускает существенных упрощений. Тогда естественным шагом в изучении характеристического квазиполинома (2) является изучение тех случаев, для которых есть возможность построить области устойчивости в пространстве параметров. Простейшими содержательными ситуациями являются такие, когда три параметра квазиполинома принимаются равными нулю. Существует всего десять двупараметрических квазиполиномов, получаемых таким образом из исходного.

Как известно [4], система, описываемая квазиполиномом (2), является экспоненциально устойчивой тогда и только тогда, когда все корни соответствующего характеристического квазиполинома лежат левее мнимой оси.

Для отыскания границ искомых областей использованы методы, описанные в [4] и [5]. Часть полученных признаков соответствует известным результатам [4], полученным для уравнений второго порядка, а две области, по-видимому, являются новыми.

Один случай неустойчив. Среди девяти непустых множеств в пространстве двух параметров, для которых соответствующие квазиполиномы устойчивы: три — ограничены и связны, три — связны и неограничены, три — неограничены и несвязны.

Приведём в качестве примера один любопытный случай. Рассмотрим систему:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} b & 0 \\ -c & -b \end{pmatrix} x(t-1), \quad t \in (0, \infty). \tag{3}$$

Очевидно, обе матрицы по отдельности образуют неустойчивые системы, однако существует непустой набор параметров, при котором данная система асимптотически устойчива.

Т е о р е м а 2. *Для асимптотически устойчивости системы* (3) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось двойное неравенство:* $1 < c/b^2 < 2/\cos b$.

Полученные результаты служат фундаментом для построения более сложных областей устойчивости в многомерных пространствах параметров исходной задачи.

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: изд-во Пермск. ун-та, 2001. 230 с.
2. Альпин Ю.А., Корешков Н.А. Об одновременной триангулизуемости матриц // Математические заметки. 2000. Т. 68. Вып. 5. С. 648–652.
3. Khokhlova T., Kipnis M., Malygina V. The stability cone for a delay differential matrix equation // Applied Mathematics. 2011. Letters 24. P. 742–745
4. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М: Наука, 1971. 296 с.
5. Постников М.М. Устойчивые многочлены. 2-е изд, стереотипное. М.: Едиториал УРСС, 2004. 176 с.

Поступила в редакцию 15.02.2012

M. V. Mulyukov

On stability of some differential systems with delay

An effective analytical description of stability regions is received for some classes of autonomous differential systems of second order with delay. For each region its equivalent geometrical interpretation as a set in the space of parameters of the input problem is obtained.

Keywords: systems of linear differential equations with delay, exponential stability, effective signs.

Mathematical Subject Classifications: 34K06, 34K20

Мулюков Михаил Вадимович, аспирант, кафедра вычислительной математики и механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614000, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29. E-mail: Mulykoff@gmail.com

Mulyukov Mikhail Vadimovich, post-graduate student, Department of Computational Mathematics and Mechanics, Perm National Research Polytechnic University, Komsomolskii pr., 29, Perm, 614000, Russia