УДК 519.63

© *В. Г. Пименов*

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Конструируются сеточные методы для гиперболических уравнений с эффектом наследственности. Получены условия устойчивости и определены порядки сходимости.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, запаздывание, сеточные методы, устойчивость, порядок сходимости.

Во многих математических моделях эволюционные уравнения (параболического и гиперболического типа) могут содержать эффекты запаздывания различных видов [1]. Аналитическое исследование такого рода объектов весьма затруднено, поэтому интерес представляют численные методы их решения.

В данной работе предлагается использовать конструкции дискретизации сразу по пространственным и временной независимым переменным. По настоящей части (текущему состоянию искомой функции) конструируются полные аналоги алгоритмов, известные [2] для объектов без запаздывания. Для учета прошлой части используется интерполяция с заданными свойствами. Эти конструкции приводят к системам разностных уравнений с эффектом наследственности. Основные проблемы, связанные с нелинейной зависимостью разностных уравнений от предыстории дискретной модели, преодолеваются ранее предложенным подходом [3, 4] к построению общей схемы численного решения функционально-дифференциальных уравнений, который позволяет исследовать локальную погрешность, устойчивость и сходимость систем с наследственностью. В работе [5] с этих позиций построены и исследованы аналоги схем с весами для одномерного уравнения теплопроводности с запаздыванием общего вида, в работе [6] рассмотрен метод переменных направлений для уравнения параболического типа с двумя пространственными координатами и с эффектом запаздывания. В настоящей работе приведены конструкции и анонсирован результат исследования устойчивости и порядка сходимости для аналога схемы с весами для уравнения гиперболического типа с запаздыванием.

Рассмотрим волновое уравнение с эффектом последействия вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u(x,t), u_t(x,\cdot)),$$

Здесь $u(x,t)$ — искомая функция, $x \in [0, X]$, $t \in [0, T]$, $u_t(x,\cdot) = \{u(x, t+s), -\tau \leqslant s < 0\}$ — функция–предыстория искомой функции к моменту t, τ — величина запаздывания. Функционал $f(x,t,u,v(\cdot))$ определен на $[0,X] \times [0,T] \times R \times Q$. $Q = Q[-\tau, 0)$ — множество функций $u(s)$, кусочно-непрерывных на $[-\tau, 0]$ с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа, $\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{s\in[-\tau,0)} |u(s)|$.

Заданы начальные условия: $u(x,t) = \varphi(x,t),\ x \in [0, X],\ t \in [-\tau, 0]$, и граничные условия: $u(0,t) = g_0(t),\ u(X,t) = g_1(t),\ t \in [0,T]$.

Будем предполагать, что функционал f, функции g_1, g_2, φ таковы, что задача имеет единственное решение $u(x,t)$ [1].

Проведем дискретизацию задачи. Пусть $h = X/N$, введем $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$, пусть $\Delta = T/M$, $t_j = j\Delta$, $j = 0, \ldots, M$; $\tau/\Delta = K$ — целое. Приближения функции $u(x_i, t_j)$ в узлах разбиений будем обозначать u_j^i. Для каждого фиксированного $i = 0, \ldots, N$ введем дискретную предысторию по временным узлам t_j, $j = 0, \ldots, M : \{u_k^i\}_j = \{u_k^i, j - m \leqslant k \leqslant j\}$. Отображение $I : \{u_k^i\}_j \to v^i(\cdot) \in Q[-\tau, \Delta]$ назовем оператором интерполяции–экстраполяции дискретной предыстории. Способы построения операторов интерполяции–экстраполяции рассмотрены в [3].

[1]Работа поддержана РФФИ (грант № 10–01–00377).

Для $0 \leqslant s \leqslant 1$ рассмотрим семейство методов

$$\frac{u^i_{j+1} - 2u^i_j + u^i_{j-1}}{\Delta^2} = sa^2\frac{u^{i-1}_{j+1} - 2u^i_{j+1} + u^{i+1}_{j+1}}{h^2} + sa^2\frac{u^{i-1}_{j-1} - 2u^i_{j-1} + u^{i+1}_{j-1}}{h^2} +$$

$$+(1-2s)a^2\frac{u^{i-1}_j - 2u^i_j + u^{i+1}_j}{h^2} + F^i_j(v^i(\cdot)),\ i = 1, \ldots, N-1,\ j = 0, \ldots, M-1,$$

с начальными условиями $u^i_0 = \varphi(x_i, 0)$, $i = 0, \ldots, N$, $v^i(t) = \varphi(x_i, t)$, $t < 0$, $i = 0, \ldots, N$, и граничными условиями $u^0_j = g_0(t_j)$, $u^N_j = g_1(t_j)$, $j = 0, \ldots, M$. Здесь $F^i_j(v^i(\cdot))$ — некоторый функционал, определенный на $Q[-\tau, \Delta]$, и связанный с функционалом $f(x_i, t_j, u^j_i, v_i(\cdot))$, $v^i(\cdot)$ — результат действия оператора интерполяции–экстраполяции.

При $s = 0$ получается явная схема, при других s, $0 < s \leqslant 1$, при каждом фиксированном j система является линейной трехдиагональной относительно u^i_{j+1} с диагональным преобладанием, которая эффективно решается методом прогонки.

Обозначим $\varepsilon^i_j = u(x_i, t_j) - u^i_j$, $i = 0, \ldots, N$, $j = 0, \ldots, M$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что метод *сходится с порядком* $h^p + \Delta^q$, если существует константа C, что выполняется неравенство: $|\varepsilon^i_j| \leqslant C(h^p + \Delta^q)$ для всех $i = 0, \ldots, N$ и $j = 0, \ldots, M$.

О п р е д е л е н и е 2. Назовем *невязкой* разницу левой и правой части метода, где вместо приближенного решения подставлено точное.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнено условие устойчивости*

$$s > \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right),\ \sigma = a^2\Delta^2/h^2,$$

невязка имеет порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, функции F^j_i липшицевы, оператор интерполяции–экстраполяции I липшицев и имеет порядок погрешности Δ^{p_0} на точном решении, стартовые значения имеют порядок $\Delta^{p_3} + h^{p_4}$, σ зафиксировано. Тогда метод сходится с порядком $\Delta^{\min\{\min\{p_0,p_1,p_2\}+1,p_3\}} + h^{\min\{\min\{p_0,p_1,p_2\}+1,p_4\}}$.

Список литературы

1. Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer–Verlag, 1996. 432 p.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
3. Ким А.В., Пименов В.Г. i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: РХД, 2004. 256 с.
4. Пименов В.Г. Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 1. С. 105–114.
5. Пименов В.Г., Ложников А.Б. Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 178–189.
6. Пименов В.Г., Лекомцев А.В. Сходимость метода переменных направлений численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 102–118.

Поступила в редакцию 15.02.2012

V. G. Pimenov

Numerical methods for solving the evolutionary equations with delay

The grid-based numerical algorithms for solving the hyperbolic equations with the effect of heredity are considered. The stability conditions are received and convergence orders are defined.

Keywords: equations in partial derivatives, delay, grid methods, stability, convergence order.

Mathematical Subject Classifications: 65M12, 65P40, 34K28

Пименов Владимир Германович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51. E-mail: Vladimir.Pimenov@usu.ru

Pimenov Vladimir Germanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Numerical Mathematics, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia