УДК 517.929

© *В. П. Плаксина*

К ВОПРОСУ О ЗНАКОПОСТОЯНСТВЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Сформулированы условия знакопостоянства функции Грина двухточечной краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения второго порядка.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, краевые задачи, функция Грина.

Пусть W^2 — пространство функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, первая производная которых абсолютно непрерывна на отрезке $[a,b]$. Это пространство изоморфно прямому произведению $L \times \mathbb{R}^2$. Пусть, далее, $W^2S(s)$ — пространство функций $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, первая производная которых абсолютно непрерывна на отрезках $[0,s)$ и $[s,b]$, а в точке $s \in (a,b)$ может иметь конечный разрыв. Вторая производная функций из пространства $W^2S(s)$ суммируема на отрезке $[a,b]$. Пространство $W^2S(s)$ изоморфно прямому произведению пространств $L \times \mathbb{R}^3$.

Рассмотрим двухточечную краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} (\mathcal{L}x)(t) \equiv \ddot{x}(t) + (Tx)(t) = f(t), \quad t \in [a,b] \\ x(a) = 0, \quad x(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $T\colon W^2 \to L$ — вполне непрерывный оператор.

Пусть задача (1) однозначно разрешима. Тогда ее решение в пространстве W^2 имеет вид $x(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)\,ds$, где $G(t,s)$ — функция Грина задачи (1). Функция $G(t,s)$ при каждом фиксированном $s \in (a,b)$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases} (\tilde{\mathcal{L}}y)(t) = 0, \quad t \in [a,b] \\ y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \quad y(s) - y(s-0) = 1 \end{cases}$$

в пространстве $W^2S(s)$. Оператор $\tilde{\mathcal{L}}\colon W^2S(s) \to L$ является расширением оператора $\mathcal{L}$ на пространство $W^2S(s)$.

Н. В. Азбелев сформулировал следующий критерий знакопостоянства функции Грина задачи (1) [1, теорема 2.2, стр. 140]: функция Грина задачи (1) сохраняет свой знак при t, $s \in (a,b)$ тогда и только тогда, когда для всех $s \in (a,b)$ и всех $\tau \in (a,b)$ в пространстве $W^2S(s)$ однозначно разрешима краевая задача

$$\begin{cases} (\tilde{\mathcal{L}}y)(t) = 0, \quad t \in [a,b] \\ y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \quad y(\tau) = 0 \end{cases}$$

Следствием этого критерия являются следующие необходимые условия знакопостоянства функции Грина.

Т е о р е м а 1. *Если задача* (1) *однозначно разрешима и ее функция Грина сохраняет знак, то в пространстве* W^2 *однозначно разрешимы следующие краевые задачи:*

$$\begin{cases} (\mathcal{L}x)(t) = 0, \quad t \in [\alpha,\beta], \quad a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b, \\ x(\alpha) = 0, \quad x(\beta) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\mathcal{L}x)(t) = 0, \quad t \in [\alpha,\beta], \quad a < \alpha < b, \\ x(\alpha) = 0, \quad \dot{x}(\alpha) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} (\mathcal{L}x)(t) = 0, \quad t \in [\alpha,\beta], \quad a < \beta < b, \\ x(\beta) = 0, \quad \dot{x}(\beta) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Отметим, что в формулировке задач (2) и (3) равенства $\alpha = a$ и $\beta = b$ невозможны. Пример, подтверждающий этот факт, был найден среди обыкновенных дифференциальных уравнений. Действительно, рассмотрим краевую задачу $\ddot{x}(t) - \dfrac{2}{t}\dot{x}(t) = 0$, $x(0) = 0$, $x(1) = 0$. Эта задача является сингулярной, но критерий Н. В. Азбелева знакопостоянства функции Грина переносится на такие задачи практически дословно. Функция Грина рассматриваемой задачи имеет вид $G(t,s) = \dfrac{t^3 - s^3}{3s^2}\theta(t-s) - \dfrac{t^3(1-s^3)}{3s^2}$, где $\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$ Очевидно, что $G(t,s) < 0$ при $(t,s) \in (0,1) \times (0,1)$. Однако задача $\ddot{x}(t) - \dfrac{2}{t}\dot{x}(t) = 0$, $\dot{x}(\beta) = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ имеет нетривиальное решение $x(t) = ct^3$ с произвольной постоянной c. Отметим, что все задачи вида $\ddot{x}(t) - \dfrac{2}{t}\dot{x}(t) = 0$, $x(\alpha) = 0$, $\dot{x}(\alpha) = 0$ при $\alpha > 0$ однозначно разрешимы.

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.

Поступила в редакцию 15.02.2012

V. P. Plaksina

Conditions of fixed sign of Green function of two-point boundary value problem for functional differential equaiton

Conditions of fixed sign of Green function of two-point boundary value problem for functional differential equations of second order are obtained.

Keywords: functional-differential equation, boundary value problem, Green function.

Mathematical Subject Classifications: 34K06, 34K10

Плаксина Вера Павловна, к.ф.-м.н., доцент, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр., 29. E-mail: vpplaksina@list.ru

Plaksina Vera Pavlovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Perm National Research Polytechnic University, Komsomolskii pr., 29, Perm, 614990, Russia