УДК 517.911+517.935

© *Л. И. Родина*

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ [1]

Изучаются инвариантные и статистически инвариантные множества относительно управляемых систем. Для определения статистически инвариантного множества введены и исследованы такие характеристики, как относительная частота, верхняя и нижние относительные частоты поглощения множества достижимости управляемой системы заданным множеством.

Ключевые слова: управляемые системы, динамические системы, дифференциальные включения, инвариантные и статистически инвариантные множества.

§ 1. Определение статистических характеристик множества достижимости

Эта статья является продолжением работ [1, 2], которые посвящены вопросам существования инвариантных и статистически инвариантных множеств относительно управляемых систем и дифференциальных включений.

Основным объектом исследования в данной работе является управляемая система

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

правая часть которой параметризована с помощью топологической динамической системы (Σ, h^t). Здесь Σ — полное метрическое пространство, h^t — поток на Σ. В качестве вспомогательного объекта рассматривается соответствующее системе (1) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma, x) = \operatorname{co} H(\sigma, x), \tag{2}$$

где через $H(\sigma, x)$ обозначено множество всех предельных значений функции $f\big(\sigma, x, U(\sigma, x)\big)$ при $(\sigma_i, x_i) \to (\sigma, x)$, $\operatorname{co} H(\sigma, x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $H(\sigma, x)$. Предполагаем, что правая часть включения (2) принимает значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ непустых выпуклых замкнутых (не обязательно ограниченных) подмножеств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа–Бебутова. Свойства пространства $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ описаны в работах [3, 4].

Предполагаем также, что выполнены следующие условия:
1) для каждой точки (t, σ) функция $(x, u) \to f(h^t\sigma, x, u)$ непрерывна;
2) для каждой точки (σ, x, u) функция $t \to f(h^t\sigma, x, u)$ кусочно-непрерывна;
3) функция $(\sigma, x) \to U(\sigma, x)$ принимает значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^m)$ и полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа–Бебутова.

Пусть задано подмножество $M = \{(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in M(\sigma)\}$ пространства $\Omega \doteq \Sigma \times \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, обозначим через $A(t, \omega)$, где $\omega = (\sigma, X)$, множество достижимости системы (1) в момент времени t из начального множества X. Рассмотрим множество

$$\alpha(\vartheta_0, \vartheta, \omega) \doteq \big\{t \in [\vartheta_0, \vartheta] : A(t, \omega) \subseteq M(h^t\sigma)\big\}.$$

Введем следующие *статистические характеристики множества достижимости* управляемой системы (1). В предположении, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ множество достижимости $A(t, \sigma, X)$ существует при всех $t \geqslant 0$, *относительной частотой поглощения* множества достижимости системы (1) множеством M назовем следующий предел

$$\operatorname{freq}(\omega) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes} \alpha(0, \vartheta, \omega)}{\vartheta} = \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : A(t, \sigma, X) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}. \tag{3}$$

[1] Работа поддержана РФФИ (грант № 12–01–00195).

Далее, если предел (3) не существует, то характеристики

$$\operatorname{freq}^*(\omega) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta}, \quad \operatorname{freq}_*(\omega) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta}$$

будем называть, соответственно, *верхней* и *нижней относительной частотой поглощения* множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (1) множеством M.

§ 2. Условия статистической инвариантности множества M

О п р е д е л е н и е 1. Множество M будем называть *статистически инвариантным* относительно управляемой системы (1), если для всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство

$$\operatorname{freq}(\sigma) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,\vartheta] : A\bigl(t,\sigma,M(\sigma)\bigr) \subseteq M(h^t\sigma)\bigr\}}{\vartheta} = 1.$$

Обозначим через $M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0)$ замкнутую окрестность множества $M(\sigma)$ в $\mathbb{R}^n$, через $N^r_+(\sigma) = M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$ — внешнюю r-окрестность границы множества $M(\sigma)$, также введем в рассмотрение множество $N^r_+ = \{(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n : x\in N^r_+(\sigma)\}$.

Для формулировки основного результата приведем следующие определения.

О п р е д е л е н и е 2. Скалярную функцию $V(\sigma,x)$ переменных $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ будем называть *функцией Ляпунова* (относительно заданного множества $M \subseteq \Omega$), если она удовлетворяет локальному условию Липшица и выполнены следующие условия:

1) $V(\sigma,x) \leqslant 0$ при всех $(\sigma,x)\in M$; 2) $V(\sigma,x) > 0$ для всех $(\sigma,x)\in N^r_+$.

О п р е д е л е н и е 3. Для локально липшицевой функции $V(\sigma,x)$ *обобщенной производной* в точке $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q\in\mathbb{R}^n$ называется следующий предел

$$V^o(\sigma,x;q) \doteq \limsup_{(\vartheta,y,\varepsilon)\to(\sigma,x,+0)} \frac{V(h^\varepsilon\vartheta, y+\varepsilon q) - V(\vartheta,y)}{\varepsilon},$$

а выражения $V^o_{\min}(\sigma,x) \doteq \inf\limits_{q\in F(\sigma,x)} V^o(\sigma,x;q)$, $V^o_{\max}(\sigma,x) \doteq \sup\limits_{q\in F(\sigma,x)} V^o(\sigma,x;q)$ называются *нижней и верхней производной* функции V в силу дифференциального включения (2).

Рассмотрим скалярную задачу Коши

$$\dot z = w(h^t\sigma, z), \quad z(t_0) = z_0, \quad t \geqslant t_0$$

в предположении, что функция $w(h^t\sigma,z)$ удовлетворяет следующему условию.

У с л о в и е 1. Имеют место следующие свойства:

1) для каждой точки (t,σ) функция $z \to w(h^t\sigma,z)$ непрерывна и выполнено неравенство

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|w(h^t\sigma,z)|}{|z|} < \infty\,;$$

2) для каждой точки (σ,z) функция $t \to w(h^t\sigma,z)$ кусочно-непрерывна.

В работе [5] показано, что при выполнении условия 1 для каждого $\sigma\in\Sigma$ верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши существует для всех $t \geqslant 0$.

Введем характеристику

$$\varkappa(\sigma) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] :\ z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}, \tag{4}$$

которую назовем *относительной частотой пребывания верхнего решения* $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши в множестве $(-\infty,0]$. Если предел (4) не существует, рассматриваем характеристики

$$\varkappa^*(\sigma) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}, \quad \varkappa_*(\sigma) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}\,.$$

Следующая теорема доказана в работе [2] для случая, когда функции $f(\sigma,x,u)$ и $w(\sigma,z)$ непрерывны.

Т е о р е м а 1. *Предположим, что для всех* $\sigma \in \Sigma$ *для каждой точки* $x \in M(\sigma)$ *все решения включения* (2), *удовлетворяющие начальному условию* $\varphi(0, \sigma, x) = x$, *продолжаемы на полуось* $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. *Пусть для каждого* $\sigma \in \Sigma$ *существуют функция* $V(\sigma, x)$ *переменных* $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ *и функция* $w(\sigma, z)$ *переменных* $(\sigma, z) \in \Sigma \times \mathbb{R}$ *такие, что:*

1) *функция* $w(h^t\sigma, z)$ *удовлетворяет условию* 1;

2) *функция* $V(\sigma, x)$ *является функцией Ляпунова относительно множества* M *и при всех* $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(\sigma, x) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma, x)\big).$$

Тогда для каждого $\sigma \in \Sigma$ *для любого множества* $X \subseteq M(\sigma)$ *верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости* $A(t, \sigma, X)$ *множеством* M *удовлетворяют неравенствам*

$$\operatorname{freq}^*(\omega) \geqslant \varkappa^*(\sigma), \quad \operatorname{freq}_*(\omega) \geqslant \varkappa_*(\sigma).$$

Далее, если $\varkappa(\sigma) = 1$ *для всех* $\sigma \in \Sigma$, *то множество* M *статистически инвариантно относительно системы* (1).

Для эффективного применения теоремы 1 необходимо получить условия существования предела $\varkappa(\sigma)$ и равенства $\varkappa(\sigma) = 1$, а также научиться вычислять характеристики $\varkappa^*(\sigma)$ и $\varkappa_*(\sigma)$. Такие условия получены для линейной задачи Коши

$$\dot{z} = a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma), \quad z(0, \sigma) = 0, \quad t \geqslant 0$$

в предположении, что σ является периодической точкой потока $h^t : \Sigma \to \Sigma$. Условия равенства $\varkappa(\sigma) = 1$ приведены в работе [2].

Список литературы

1. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288.
2. Родина Л.И. Тонков Е.Л. Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 67–86.
3. Панасенко Е.А., Родина Л.И., Тонков Е.Л. Асимптотически устойчивые статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 135–142.
4. Панасенко Е.А., Родина Л.И., Тонков Е.Л. Пространство $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа–Бебутова и дифференциальные включения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 162–177.
5. Родина Л.И. Статистически инвариантные множества управляемых систем со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 68–87.

Поступила в редакцию 15.02.2012

L. I. Rodina

Statistical characteristics of attainable set of controllable systems

We research the invariant and statistically invariant sets of the controllable systems. For definition of statistically invariant set, we introduce and research such characteristics as the relative frequency, the upper and lower relative frequences of occurence of the attainable set of a controllable system in some given set.

Keywords: controllable systems, dynamical systems, differential inclusions, invariant and statistically invariant sets.

Mathematical Subject Classifications: 34A60, 37N35, 49J15, 93B03

Родина Людмила Ивановна, к.ф.-м.н., доцент, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: rdl@uni.udm.ru

Rodina Lyudmila Ivanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia