УДК 517.5 + 517.9

© *В. И. Родионов*

ОБ АППРОКСИМИРУЕМЫХ РЕШЕНИЯХ ИМПУЛЬСНЫХ УРАВНЕНИЙ

Доказана теорема существования аппроксимирующего дефекта квазиинтеграла, порождающего аппроксимируемые решения автономного импульсного уравнения.

Ключевые слова: импульсное уравнение, аппроксимируемое решение, квазиинтеграл.

1. Следуя [1, с. 143], *импульсным* называется уравнение $\dot{x}(t) = f(t, x(t))\,\dot{Q}(t)$, заданное в терминах обобщенных функций. Через x и Q обозначены соответственно n-мерная и m-мерная векторные функции, а матричнозначная функция $f : \Omega \to \mathbb{C}^{n\times m}$ задана в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{C}^n$.

2. В основе проблематики импульсных систем лежит известный вопрос о стыковке различных интегральных кривых одного и того же уравнения, последовательно решаемого на разных временны́х участках. Поясним сказанное на примере. Пусть функция $Q = Q(t)$, $t \in \mathbb{R}$, дифференцируемая при $t < \tau$ и при $t > \tau$, терпит разрыв в точке τ. Для достаточно гладкой функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ графики двух семейств решений уравнения $\dot{x}(t) = f(t, x(t))\,\dot{Q}(t)$ (решаемого отдельно при $t < \tau$ и при $t > \tau$) заполняют всю плоскость $\mathbb{R}^2$, за исключением прямой $t = \tau$. Если же мы изучаем процесс при всех $t \in \mathbb{R}$, то возникает вопрос обоснования «разумной стыковки» графиков этих двух семейств решений. Существующие в настоящее время подходы к решению проблемы приводят к противоречащим друг другу результатам.

Проиллюстрируем сказанное на уравнении $\dot{x} = \frac{1}{2}\,\delta(t)\,x$, $x(-1) = \omega$ (см. [1, с. 145]). Здесь $f(t,x) = \frac{1}{2}\,x$, $Q = \theta(t)$ — функция Хевисайда, то есть $\theta(t) = 0$ при $t \leqslant 0$ и $\theta(t) = 1$ при $t > 0$.

Уже в работах авторов, развивающих технику умножения разрывных функций на обобщенные, нет единообразия. Так, решением в смысле [2] является функция $x(t) = \omega\,(\,1 + \frac{2}{3}\,\theta(t)\,)$, а в смысле [1, глава 1] — функция $x(t) = \omega\,\exp\,(\,\frac{1}{2}\,\theta(t)\,)$. В работах авторов, развивающих технику перевода исходной задачи в интегральную форму (в смысле Лебега–Стилтьеса, Перрона–Стилтьеса, Душника–Стилтьеса и др.), также нет единообразия. Если, например, использовать интеграл Перрона–Стилтьеса, то получим решение $x(t) = \omega\,(\,1 + \frac{1}{2}\,\theta(t)\,)$, а если интеграл Душника–Стилтьеса, то $x(t) = \omega\,(\,1+\theta(t)\,)$. Применяя квазиинтегралы [3] (варьируя дефекты), можно получить вообще любую функцию из семейства $\{\,x(t) = \omega\,(\,1 + c\,\theta(t)\,),\ c \in \mathbb{R}\,\}$.

Мы видим разнообразие подходов предшественников к представлению импульсных систем. Как следствие, имеет место разнообразие семейств решений таких задач. Мы, однако, исследуем квазиинтегральные уравнения как единое семейство и полагаем, что отступать от этого принципа следует лишь в исключительных случаях, тогда, когда специфика той или иной конкретной задачи не позволяет работать со всем классом. Например, мы допускаем, что математические модели различных прикладных задач, записанные в квазиинтегральной форме, допускают восстановление конкретного, специфического именно для этой задачи, дефекта по результатам эксперимента, проведенного в рамках данной предметной области. (Подобным образом в статистике восстанавливается так называемая эмпирическая функция распределения.)

3. Исходя из этого принципа мы восстанавливаем так называемый аппроксимирующий дефект, — дефект, порождающий аппроксимируемые решения импульсной системы. Пусть $K \doteq (a, b)$ — интервал; $Q \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}(K)$ — функция локально ограниченной вариации; последовательность $\{Q_n\}$, $Q_n \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(K)$, состоящая из непрерывных функций локально ограниченной вариации, поточечно сходится к функции Q. Точка $(\alpha, \omega) \in K \times \mathbb{R}$, непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и дефект $\Delta \doteq (\varphi, \psi)$ порождают последовательность квазиинтегральных уравнений

$$\Big\{\,x_n(t) - \int_\alpha^t f(x_n(s))\,\Delta Q_n(s) = \omega\,\Big\}_{n=1}^{\infty} \tag{1}$$

и предельное уравнение

$$x(t) - \int_\alpha^t f(x(s))\,\Delta Q(s) = \omega. \tag{2}$$

При каких дефектах Δ решения уравнений (1) и (2) связаны тождеством $\lim\limits_{n} x_n(t) = x(t)$?

Т е о р е м а 1. *Пусть функция f задана, непрерывна, строго монотонна и не обращается в нуль на интервале $X \doteq (A,B)$. Зафиксируем интервал $K \doteq (a,b)$ такой, что $0 \in K$, точку $(\alpha,\omega) \in K \times X$, $\alpha < 0$, и предположим, что последовательность $\{Q_n\}$, $Q_n \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(K)$, поточечно сходится к разрывной функции $Q(t) \doteq q(t)+r(t)$ такой, что $q \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(K)$, $r(t)=0$ при $t<0$, $r(0)=-g$, $r(t)=h-g$ при $t>0$, $g \neq 0$, $h \neq 0$. Тогда*

(1) *функция $F(x) \doteq \displaystyle\int_{\omega}^{x} \frac{d\zeta}{f(\zeta)}$ определена и строго монотонна на X;*

(2) *для любого n существует максимальный интервал $K_{x_n} \subseteq K$, содержащий точку α, в котором определено непрерывное решение уравнения* (1): *$x_n(t) \doteq F^{-1}(\,Q_n(t) - Q_n(\alpha)\,)$;*

(3) *существует максимальный промежуток $K_x \subseteq K$, содержащий точку α, в котором определена функция $x(t) \doteq F^{-1}(\,Q(t) - Q(\alpha)\,)$;*

(4) *пересечение $\widehat{K} \doteq (\,\bigcap\limits_n K_{x_n}) \cap K_x$ не пусто и $x_n(t) \to x(t)$ для любого $t \in \widehat{K}$;*

(5а) *если $\widehat{K} \cap [\,0,b) = \varnothing$, то функция $x(t)$, $t \in \widehat{K}$, удовлетворяет уравнению* (2) *при всех Δ;*

(5б) *если $\widehat{K} \cap [\,0,b) = \{0\}$, то существует максимальный интервал, содержащий точки 0 и $-g$, в котором определена функция $\vartheta(\zeta) \doteq F^{-1}(\,\zeta + q(0) - q(\alpha)\,)$; функция $x(t)$, $t \in \widehat{K}$, удовлетворяет уравнению* (2) *тогда и только тогда, когда ψ — произвольная функция из Ω,*

$$\varphi^*(g) = -\frac{\vartheta(-g) - \vartheta(0) + g\, f(\vartheta(0))}{f(\vartheta(-g)) - f(\vartheta(0))}; \tag{3}$$

(5в) *если $\widehat{K} \cap (0,b) \neq \varnothing$, то существует максимальный интервал, содержащий точки 0, $-g$ и $h-g$, в котором определена функция $\vartheta(\zeta) \doteq F^{-1}(\,\zeta + q(0) - q(\alpha)\,)$; функция $x(t)$, $t \in \widehat{K}$, удовлетворяет уравнению* (2) *тогда и только тогда, когда функция φ^* задана формулой* (3),

$$\psi(h) = \frac{\vartheta(h-g) - \vartheta(-g) - h\, f(\vartheta(-g))}{f(\vartheta(h-g)) - f(\vartheta(-g))}. \tag{4}$$

Таким образом, существует дефект $\Delta = \Delta_{(f,Q)}$ (зависящий от f и Q) такой, что какова бы ни была последовательность $\{Q_n\}$, $Q_n \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(K)$, поточечно сходящаяся к функции Q, последовательность непродолжаемых непрерывных решений $\{x_n\}$ уравнений (1) поточечно сходится к непродолжаемому прерывистому решению x уравнения (2) в общем (непустом) промежутке существования этих решений.

4. Два примера. (1) Если $X \doteq (0,\infty)$, $f(x)=x$, $K=\mathbb{R}$, то аппроксимируемыми решениями являются функции $x(t) = \omega\, e^{Q(t)-Q(\alpha)}$, $t \in \mathbb{R}$, а функции $\varphi^*(g) = \dfrac{g}{1-e^{-g}} - 1$, $\psi(h) = 1 - \dfrac{h}{e^h - 1}$ составляют аппроксимирующий дефект $\Delta_{(f,Q)} \doteq (\varphi,\psi)$.

(2) Если $X \doteq (0,\infty)$, $f(x)=x^2$, $K=\mathbb{R}$, то аппроксимируемыми решениями являются функции $x(t) = \bigl(\,\omega^{-1} - Q(t) + Q(\alpha)\,\bigr)^{-1}$, $t \in K_x$, а аппроксимирующий дефект составляют функции $\varphi^*(g) = g\,\dfrac{1+z}{2+z}$, $\psi(h) = h\,\dfrac{1-w}{2-w}$, где $z \doteq \dfrac{g}{\omega^{-1}-q(0)+q(\alpha)}$, $w \doteq \dfrac{h}{\omega^{-1}-q(0)+q(\alpha)+g}$.

Список литературы

1. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы: Модели и приложения. М.: Наука, 1991. 256 с.
2. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. М.: Мир, 1976. 312 с.
3. Родионов В.И. Об одном семействе аналогов интеграла Перрона–Стилтьеса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 3. С. 95–106.

Поступила в редакцию 01.02.2012

V. I. Rodionov

On approximated solutions of impulse equations

We prove the theorem of existence of approximating defect of quasi-integral generating approximated solutions of autonomous impulse equation.

Keywords: impulse equation, approximated solution, quasi-integral.

Mathematical Subject Classifications: 26A39, 34A37

Родионов Виталий Иванович, декан, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: rodionov@uni.udm.ru

Rodionov Vitalii Ivanovich, Dean, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia