УДК 517.9 (51–76)

© *С. В. Русаков*

# СИСТЕМА ХИЩНИК–ЖЕРТВА С УПРАВЛЕНИЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Получены особые точки (в зависимости от значения параметра управления) и с помощью метода Ляпунова определен их вид.

*Ключевые слова:* система типа хищник–жертва, управление с обратной связью, устойчивость по Ляпунову.

Рассмотрим частный случай хорошо известных уравнений Вольтерра для системы хищник-жертва, которые в безразмерном виде выглядят так:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \alpha \cdot x(t) - \beta \cdot x(t) \cdot y(t), \\ &\dot{y}(t) = -y(t) + \beta \cdot x(t) \cdot y(t) + u \cdot h(y), \quad h(y) = 1 \text{ при } y \leqslant 1, \quad h(y) = 0 \text{ при } y > 1, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t)$ — жертва, $y(t)$ — хищник, $u = \mathrm{const}$ — управляющий параметр. Функция $h(y)$ описывает обеспечение пополнения популяции хищника в случае, если его численность становится ниже заданного уровня. Причем, значение этого уровня принято за характерный масштаб численности хищника. Такого рода управление можно считать управлением с обратной связью характерное для синергетических систем [1, 2].

Результаты исследования устойчивости особых (равновесных) точек системы (1) стандартным методом Ляпунова, приведены в следующей таблице:

| № | Условие | Особые точки | Вид особой точки | Ограничения на управление |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ | $x^* = \frac{1}{\beta}, \quad y^* = \frac{\alpha}{\beta}$ | «Центр» | $u = 0$ |
| 2 | $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ | $x^* = \frac{1}{\beta} - \frac{u}{\alpha}, \quad y^* = \frac{\alpha}{\beta}$ | Устойчивый «фокус» | $0 < u \leqslant C(\alpha)\frac{\alpha}{\beta}$ |
| 3 | $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ | $x^* = \frac{1}{\beta} - \frac{u}{\alpha}, \quad y^* = \frac{\alpha}{\beta}$ | Устойчивый «узел» | $C(\alpha)\frac{\alpha}{\beta} < u \leqslant \frac{\alpha}{\beta}$ |
| 4 | $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ | $x^* = 0, \quad y^* = u$ | Устойчивый «узел» | $\frac{\alpha}{\beta} < u \leqslant 1$ |
| 5 | $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ | $x^* \to 0, \quad y^* \to 1$ | | $u > 1$ |
| 6 | $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ | $x^* = \frac{1}{\beta}, \quad y^* = \frac{\alpha}{\beta}$ | «Центр» | $u \geqslant 0$ |

где $C(\alpha) = -2 \cdot \alpha + \sqrt{4 \cdot \alpha^2 + \alpha}, \quad 0 < C(\alpha) < \frac{1}{4}$.

Из таблицы 1 видно, что равновесная точка $x^* = \frac{1}{\beta}$, $y^* = \frac{\alpha}{\beta}$, которая в случае отсутствия управления $u = 0$ (вариант 1) является «центром», сохраняет это свойство только при $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ (вариант 6). Для ситуации $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ имеем устойчивый «фокус» (вариант 2) или устойчивый «узел» (вариант 3). Причем достаточно большое значение управляющего параметра $u$ приводит к полной деградации (исчезновению) жертвы (варианты 4–5). Хотелось бы отметить, что для варианта 5 метод Ляпунова не работает.

## Список литературы

1. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 272 с.
2. Русаков Л.С., Русаков С.В., Талибуллин Р.Р. Стационарные решения задач диффузии реакционной смеси // Вестник Пермского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 1 (1). С. 88–91.

Поступила в редакцию 14.02.2012

***S. V. Rusakov***

**Predator–prey system with feedback control**

We obtain the singular points (depending on the value of control) and define their type with the help of the Lyapunov method.

*Keywords:* system such as predator–prey system, feedback control, Lyapunov stability.

Mathematical Subject Classifications: 46N20, 47N20

Русаков Сергей Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15. E-mail: rusakov@psu.ru

Rusakov Sergei Vladimirovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Perm State National Research University, ul. Bukireva, 15, Perm, 614990, Russia