УДК 517.929.2

© *Д. Н. Спичкин*

О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ m-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОРЯДКА m [1]

Получена структура решения линейных m-разностных уравнений m-го порядка.

Ключевые слова: m-разностные уравнения, функции Виленкина–Крестенсона.

Обозначим через $[a,\, b] = \{a,\, a+1, \ldots, b\}$ упорядоченное множество неотрицательных целых чисел. Пусть $x = (x_1 \ldots x_n)_m$, $p = (p_1 \ldots p_n)_m$ — n-разрядные m-ичные представления этих чисел.

О п р е д е л е н и е 1. Операцией *m-сдвига* двух чисел $x,\, p \in [a,\, b]$, обозначаемой $x \underset{m}{\ominus} p$, назовём их поразрядную разность по модулю m.

О п р е д е л е н и е 2. Линейное разностное уравнение, где в качестве сдвига аргумента берется m-сдвиг, называется *разностным уравнением с модулярной арифметикой* или *линейным m-разностным уравнением.*

Линейное m–разностное уравнение порядка q имеет вид

$$y(x \underset{m}{\ominus} q) + k_1 y(x \underset{m}{\ominus} (q-1)) + \ldots + k_{q-1} y(x \underset{m}{\ominus} 1) + k_q y(x) = 0, \tag{1}$$

где $k_j \in \mathbb{C}, j = \overline{1, q}$.

Решениями уравнений (1) являются функции Виленкина–Крестенсона (ВКФ) [1], записываемые в форме Пэли

$$\mathrm{Pal}(p,\ x) = \exp\left(i \frac{2\pi}{m} \sum_{j=1}^{n} p_{n+1-j} x_j \right), \tag{2}$$

где i — мнимая единица, x — аргумент, p — параметр, причем $x,\, p \in [0,\ m^n - 1]$. Известно [1], что при решении линейных m-разностных уравнений часть разрядов параметра p фиксируется, а часть остается произвольной.

Введём обозначение $W = e^{i\frac{2\pi}{m}}$. Подставим выражение (2) в уравнение (1):

$$W^{\sum\limits_{j=1}^{n} p_{n+1-j}((x_j - q_j))_m} + \sum_{t=1}^{q} k_t W^{\sum\limits_{j=1}^{n} p_{n+1-j}\left(\left(x_j - (q-t)_j\right)\right)_m} = 0, \tag{3}$$

где $((a-b))_m = (a-b) \mod m$, а выражения вида α_s означают s-й разряд соответствующих чисел в их m-ичном n-разрядном представлении, в частности, число $q-t$ имеет представление $q - t = \big((q-t)_1\, (q-t)_2 \ldots (q-t)_n\big)_m$.

Остановимся на случае $q = m$. Тогда $q = (0\,0\ \ldots\ 1\,0)_m$, поэтому, из выражения (3) получаем

$$W^{\sum\limits_{j=1}^{n-2} p_{n+1-j} x_j} W^{p_2((x_{n-1}-1))_m} W^{p_1 x_n} + \sum_{t=1}^{m} k_t W^{\sum\limits_{j=1}^{n-2} p_{n+1-j} x_j} W^{p_2 x_{n-1}} W^{p_1\left(\left(x_n - (m-t)_n\right)\right)_m} = 0.$$

[1]Работа частично выполнена в рамках научных исследований 2010—2011 гг., поддержанных Министерством образования и науки РФ по тематическому плану научно-исследовательской работы 1.2.10 «Развитие теоретических основ и методов математического моделирования дискретных сигналов на конечных интервалах» (Ижевск, ИжГТУ).

Поскольку $W^{\sum\limits_{j=1}^{n-2} p_{n+1-j}x_j} \neq 0$, то

$$W^{p_2((x_{n-1}-1))_m} W^{p_1 x_n} + \sum_{t=1}^{m} k_t W^{p_2 x_{n-1}} W^{p_1\left(\left(x_n-(m-t)_n\right)\right)_m} = 0. \tag{4}$$

Если $a \geqslant b$, то $((a-b))_m = a-b$ и $W^{((a-b))_m} = W^{a-b}$. Если $a < b$, то $((a-b))_m = a+mk-b$, где $k \in \mathbb{N}$ и $W^{a+mk-b} = W^{a-b}W^{mk} = W^{a-b}$.

Поэтому $W^{p_2((x_{n-1}-1))_m} = W^{p_2(x_{n-1}-1)}$ и $W^{p_1\left(\left(x_n-(m-t)_n\right)\right)_m} = W^{p_1\left(x_n-(m-t)_n\right)}$.

Далее, сократив обе части уравнения (4) на $W^{p_2 x_{n-1}} W^{p_1 x_n}$, получим

$$W^{-p_2} + \sum_{t=1}^{m} k_t W^{-p_1 m} W^{p_1 t_n} = 0,$$

а так как $W^{-p_1 m} = 1$, то

$$W^{-p_2} + \sum_{t=1}^{m} k_t W^{p_1 t_n} = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) есть характеристическое уравнение. Оно позволяет зафиксировать 2 разряда параметра p: p_1 и p_2.

Следовательно, доказана следующая теорема о структуре решения m–разностного уравнения m-го порядка.

Т е о р е м а 1. *Решениями линейного m–разностного уравнения* (1) *при $q = m$ являются ВКФ* (2) *с двумя фиксированными разрядами p_1 и p_2 параметра $p = (p_1 \dots p_n)_m$, являющихся решениями соответствующего характеристического уравнения.*

Список литературы

1. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975. 239 с.

Поступила в редакцию 13.02.2012

D. N. Spichkin

About structure of the solution of linear m-differences equations by order m

The structure of solution of the m-th order linear m-differences equations is received.

Keywords: m-differences equations, Vilenkin–Chrestenson functions.

Mathematical Subject Classifications: 39A06

Спичкин Дмитрий Николаевич, старший преподаватель, кафедра прикладной математики и информатики, Ижевский государственный технический университет, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7. E-mail: dspich@mail.ru

Spichkin Dmitrii Nikolaevich, Lecturer, Department of Applied Mathematics and Informatics, Izhevsk State Technical University, ul. Studencheskaya, 7, Izhevsk, 426069, Russia