УДК 517.95

© *В. И. Сумин*

ОСОБЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЁННЫХ ЗАДАЧ И ВОЛЬТЕРРОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ [1]

Показывается, что для широкого класса задач оптимизации эволюционных (вольтерровых) распределённых систем характерно сильное вырождение особых управлений, когда вместе с необходимыми условиями первого порядка (например, принципом максимума) вырождаются и необходимые условия второго порядка. Излагается способ получения условий оптимальности сильно вырожденных особых управлений.

Ключевые слова: распределённые задачи оптимизации, необходимые условия оптимальности, особые управления, сильное вырождение, вольтерровы функционально-операторные уравнения.

Особые управления (ОУ) *принципа максимума* (ПМ), на которых он вырождается, играют важную роль в теории оптимизации и её приложениях [1]. Однако, для распределённых систем вопросы получения *необходимых условий оптимальности* (НУО) ОУ изучены ещё относительно слабо: в основном рассматривались управляемые системы Гурса–Дарбу и близкие им (см. библиографию в $[2, 3]$). В докладе обсуждается предложенная в $[2, 3]$ достаточно общая схема изучения ОУ, опирающаяся на возможность представления управляемой начально-краевой задачи в форме вольтеррова функционально-операторного уравнения вида (1) и использующая теорию тензорных произведений лебеговых пространств для вычисления старших вариаций функционалов [схема обслуживает широкий класс распределённых управляемых систем (разнообразные примеры начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными, приводимых к форме (1), можно найти, например, в [4]), а также обширный аксиоматически описанный в [2] класс способов варьирования, включающий большинство способов, традиционно использующихся в теории НУО (классическое варьирование, игольчатое, импульсное на полосах, варьирование пакетами, сдвигом и др.)]. Показывается, что, если вольтеррова управляемая система «устроена не слишком сложно», то для неё характерно сильное вырождение ОУ, когда вместе с НУО первого порядка (например, ПМ) вырождаются и НУО второго порядка. Излагается способ получения НУО сильно вырожденных ОУ.

Для примера сформулируем общие условия сильного вырождения ОУ поточечного ПМ (НУО первого порядка при игольчатом варьировании). Обозначения: $\langle\cdot,\cdot\rangle_n$ — скалярное произведение в R^n; $\mathfrak{L}(X,Y)$ — класс линейных ограниченных операторов из X в Y; * — знак сопряжения; $\Pi \subset R^n$ — заданное ограниченное, измеримое по Лебегу множество; $L_p^m \equiv (L_p(\Pi))^m$.

Рассмотрим управляемое функционально-операторное уравнение

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \quad t \equiv \{t^1, \ldots, t^n\} \in \Pi \subset R^n, \tag{1}$$

где $f(t,p,v) : \Pi \times R^l \times R^s \to R^m$ — функция, дважды дифференцируемая по p для всех v при почти всех t и вместе с f'_p, f''_{pp} измеримая по t для всех $\{p,v\}$ и непрерывная по $\{p,v\}$ для почти всех t; $A \in \mathfrak{L}\left(L_1^m, L_1^l\right)$; $v(t) : \Pi \to R^s$ — управление. Считаем: функции f, $f'_{\mathbf{p}}$, $f''_{\mathbf{pp}}$ ограничены на любом ограниченном множестве; A имеет квазинильпотентную мажоранту $B \in \mathfrak{L}(L_1, L_1)$; $B[L_\infty] \subset L_\infty$; $\mathcal{D} \equiv \{v \in L_\infty^s : v(t) \in U, t \in \Pi\}$ — класс допустимых $v(\cdot)$, $U \subset \mathbf{R}^s$ ограничено. При указанных условиях формула $B_\infty[z] \equiv B[z]$, $z \in L_\infty$ определяет оператор $B_\infty \in \mathfrak{L}(L_\infty, L_\infty)$ и поэтому далее говорим о решениях (1) класса L_∞^m.

Назовём оператор $\mathcal{F}$, действующий из L_p^n в пространство измеримых на Π вектор-функций, вольтерровым на некоторой системе T измеримых подмножеств Π, если для любого $H \in T$ сужение $\mathcal{F}[z]\Big|_H$ не зависит от значений $z(t)$ при $t \in \Pi \setminus H$ [4]. Пусть: $\delta > 0$ — некоторое число; $T_* \equiv \{H_0, H_1, \ldots, H_k\}$, где $\varnothing = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = \Pi$; $h_i \equiv H_i \setminus H_{i-1}$, $i = 1, \ldots, k$; P_h —

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

оператор умножения на функцию $\chi_h \equiv \{1,\, t \in h; 0,\, t \in (\Pi \setminus h)\}$. Назовём T_* вольтерровой δ-цепочкой оператора $\mathcal{F} \in \mathfrak{L}(L_p, L_p)$, если он вольтерров на T_* и $\|P_{h_i}\mathcal{F}P_{h_i}\|_{L_p \to L_p} \leqslant \delta$ при $i = 1, \ldots, k$ [4]. Считаем: B_∞ имеет вольтеррову δ-цепочку для любого $\delta > 0$. В этом случае каждому $v \in \mathcal{D}$ отвечает не более одного L_∞^m-решения (1). Пусть Ω — класс тех v, каждому из которых отвечает такое решение z_v, а $F : L_1^m \to R$ — дважды непрерывно дифференцируемый по Фреше функционал.

Рассмотрим задачу нахождения L_1^s-локального максимума: $J[v] \equiv F[z_v] \to \max, \quad v \in \Omega$. Пусть v_0 — решение этой задачи, $z_0 \equiv z_{v_0}$, а $\omega \in L_\infty^m$ — функция Рисса функционала $F'(z_0) \in (L_1^m)^*$. Формула $S[z] \equiv z - f_p' A[z]$, где $f_p' \equiv f_p'(t, A[z_0], v_0)$, определяет оператор $S \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_1^m)$. Положим $\pi(t, w) \equiv \langle \psi(t), \Delta_w f(t) \rangle_m$, $t \in \Pi$, $\quad w \in U$, где $\psi \in L_\infty^m$ — решение уравнения $S^*[\psi] = \omega$, $\Delta_w f(t) \equiv f(t, A[z_0], w) - f(t, A[z_0], v_0)$. Пусть: Σ — совокупность всех наборов $\sigma \equiv \{\tau, w\}$, в каждом из которых w — элемент U, $\tau \in \Pi$ — некоторая правильная точка Лебега для $\pi(\cdot, w)$; $\mathcal{H}$ — семейство всех пар $h \equiv \{\sigma, \varepsilon\}$, в каждой из которых $\sigma \equiv \{\tau, w\} \in \Sigma$, а $\varepsilon > 0$ таково, что $\Pi_\varepsilon(\tau) \equiv \tau - \varepsilon[0,1]^n \subset \Pi$. Каждому $h \equiv \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}$ отвечает допустимое управление $v_h(t) \equiv \{w,\ t \in \Pi_\varepsilon(\tau);\ v_0(t),\ t \in \Pi \setminus \Pi_\varepsilon(\tau)\}$, а каждому набору параметров варьирования $\sigma \equiv \{\tau, w\} \in \Sigma$ — семейство функций $\{v_h\}_{h \equiv \{\sigma,\varepsilon\} \in \mathcal{H}}$, *простейшая одноточечная игольчатая варианта* (ПОИВ) управления v_0. Положим $\Delta_v J \equiv J[v] - J[v_0]$, $v \in \Omega$. Предел $\delta^{\gamma-n+1} J(\sigma) \equiv \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-\gamma} \Delta_{v_h} J$, если он существует при некотором $\gamma \geqslant n$, назовём *вариацией порядка* $\gamma - n + 1$ *функционала* J *на* ПОИВ; соответственно НУО вида $\delta^{\gamma-n+1} J(\sigma) \leqslant 0$ $(\sigma \in \Sigma)$ назовём НУО порядка $\gamma - n + 1$ при данном варьировании. Справедлив поточечный ПМ (НУО первого порядка): *для каждого* $w \in U$ *при почти всех* $\tau \in \Pi$ *имеем* $\delta^1 J(\sigma) = \pi(\tau, w) \leqslant 0$.

Для краткости рассмотрим случай *полного вырождения* поточечного ПМ: управление v_0 назовём ОУ ПМ, если $\pi(\tau, w) = 0$ для каждого $w \in U$ при почти всех $\tau \in \Pi$. Типична ситуация, когда для ОУ v_0 вместе с $\delta^1 J(\sigma) \equiv 0$, $\sigma \in \Sigma$ имеем $\delta^{\gamma-n+1} J(\sigma) \equiv 0$, $\sigma \in \Sigma$, $n < \gamma < n + 1$ и содержательными могут быть лишь НУО, начиная с порядка 2. Поэтому назовём ОУ v_0 *сильно вырожденным*, если $\delta^2 J(\sigma) \equiv 0$, $\sigma \in \Sigma$. Укажем *простые для проверки, но важные для приложений случаи, когда при* $n > 1$ *заведомо происходит сильное вырождение* ОУ ПМ v_0: 1) $\psi(t) \equiv 0$, $t \in \Pi$; 2) $A[L_1^m] \subset L_\infty^l$; 3) $f(t, p, v) = f_1(t, p_1)p_2 + f_2(t, p_1, v)$, $p = \{p_1, p_2\}$, $p_i \in R^{l_i}$ $(i = 1, 2)$, $l_1 + l_2 = l$, $\ f_1$ — $(m \times l_2)$-матрица, $A[\cdot] = \{A^{(1)}[\cdot], A^{(2)}[\cdot]\}$, $A^{(i)} : L_1^m \to L_1^{l_i}$ $(i = 1, 2)$, причём $A^{(1)}[L_1^m] \subset L_\infty^{l_1}$. В каждом из этих случаев для ОУ v_0 *вырождаются все* НУО *до порядка* n *включительно, а схема* [2, 3] *даёт конструктивные* НУО v_0 *порядка* $n + 1$.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.
2. Сумин В.И. Сильное вырождение особых управлений в распределённых задачах оптимизации // ДАН СССР. 1991. Т. 320. № 2. С. 295–299.
3. Сумин В.И. Об особых управлениях поточечного принципа максимума в распределённых задачах оптимизации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 70–80.
4. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. 110 с.

Поступила в редакцию 15.02.2012

V. I. Sumin

Singular optimal controls in the distributed problems and Volterra functional-operator equations

It is showed that for a broad class of distributed optimization problems a sufficiently typical condition is strong degeneration of the singular controls, when together with a first-order necessary optimality conditions (for example, maximum principle) a second-order necessary optimality conditions also degenerates. It is described a general conclusion scheme of necessary optimality conditions for strong degenerated singular controls.

Keywords: distributed optimization problems, necessary optimality conditions, singular controls, strong degeneration, Volterra functional-operator equations.

Mathematical Subject Classifications: 49K20

Сумин Владимир Иосифович, заведующий кафедрой математической физики, Нижегородский государственный университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23. E-mail: v_sumin@mail.ru

Sumin Vladimir Iosifovich, Head of the Department of Mathematical Physics, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia