УДК 517.983.5:517.927.2

© **А. Г. Терентьев**

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ С КОНЕЧНОМЕРНЫМИ ЯДРАМИ

Найден общий вид всех линейных отображений с конечномерными ядрами. Для произвольных линейных отображений, область определения которых погружена в пространство непрерывных функций, приведена формула обратного отображения.

Ключевые слова: линейное отображение, ядро, размерность ядра.

Обозначения: E и F — векторные пространства (сокращённо: ВП) над одним и тем же полем K^1 (K^1 — это поле R^1 вещественных или C^1 комплексных чисел), $L(E,F)$ — ВП над K^1 линейных отображений $L : E \to F$ (определённых на E со значениями в F), $\ker L := \{x \in E | Lx = 0\}$ — ядро L, $\operatorname{dimker} L$ — его размерность, E^* — алгебраическое сопряжённое к E, $\{l_i\} \subset E^{*1}$ — линейно независимая система линейных форм, $D := \{x \in E | l_i(x) = 0\}$, $T := L|D$ — сужение L на D.

На основе утверждения (IV, 1.1) и фактов, изложенных в [1], доказывается

Т е о р е м а 1. *Пусть* $L(E) = F$. *Тогда* $(\operatorname{dimker} L = n) \Leftrightarrow \exists(\{l_i\} \subset E^*) \wedge \exists T^{-1}$, *где* T^{-1} — *обратное к* T *отображение. При этом если* $l_i(v_k) = \delta_{ik}$,[2] *то векторы*

$$u_k = v_k - T^{-1}(Lv_k) \tag{1}$$

образуют биортогональный данным линейным формам базис $\ker L$.

Основной результат, вытекающий из теоремы 1, — это следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $L_0 \in L(E,F), L_0(E) = F$, — *линейное отображение с конечномерным ядром* $\ker L_0$. *Пусть, далее,* $l_i(v_k) = \delta_{ik}$. *Положим*

$$L(x) := L_0(x) - \sum_{i=1}^{n} L_0(v_i) \cdot l_i(x) \tag{2}$$

Тогда если $\ker L_0 \cap D = \emptyset$, *то векторы* v_k *образуют базис ядра* $\ker L$.

Это следует из того, что отображение $T : D \subset E \to F$, построенное по используемым в (2) линейным формам, обратимо.

Вывод: отображениями, порождаемыми выражениями вида (2), можно исчерпать все конечномерные подпространства ВП E, то есть выражение (2) задаёт общий вид всех линейных отображений $L \in L(E,F)$, $L(E) = F$, с конечномерными ядрами.

П р и м е р 1. Пусть $v_1(t) = \begin{cases} t^2, & t \in [-1,0), \\ 0, & t \in [0,1], \end{cases}$ $v_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1,0), \\ t^2, & t \in [0,1], \end{cases}$ $l_1(x) = x(-1)$, $l_2(x) = x(1)$ и $(L_0x)(t) = x'(t)$. Очевидно, $l_i(v_k) = \delta_{ik}$. Используя (2), построим выражение

$$(Lx)(t) = x'(t) - v_1'(t) \cdot x(-1) - v_2'(t) \cdot x(1). \tag{3}$$

Тогда заданные функции принадлежат ядру порождаемого выражением (3) линейного отображения L и образуют его базис.

[1] Здесь и дальше $i, k = 1, 2, \ldots, n$; δ_{ik} — символ Кронекера.

[2] Биортогональность.

П р и м е р 2. Пусть $v_1(t) = \cos t$, $v_2(t) = te^{-t}$, $l_1(x) = x(0)$, $l_2(x) = x'(0)$ и $(L_0x)(t) = x'''(t) - x(t)$. Очевидно, $l_i(v_k) = \delta_{ik}$. Используя (2), построим выражение

$$(Lx)(t) = x'''(t) - (\sin t - \cos t) \cdot x(0) + (2t - 3)e^{-t} \cdot x'(0). \tag{4}$$

Тогда заданные функции принадлежат ядру порождаемого выражением (4) линейного отображения L и образуют его базис.

П р и м е р 3. Пусть $v_1(t) = \cos t$, $v_2(t) = \sin t$, $l_1(x) = x(0)$, $l_2(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin s\, x(s)\, ds$ и $(L_0x)(t) = x'(t)$. Очевидно, $l_i(v_k) = \delta_{ik}$. Используя (2), построим выражение

$$(Lx)(t) = x'(t) + \sin t \cdot x(0) - \cos t \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin s\, x(s)\, ds. \tag{5}$$

Тогда заданные функции принадлежат ядру порождаемого выражением (5) линейного отображения L и образуют его базис.

З а м е ч а н и е 1. Приведённые примеры показывают, что в отличие от теории дифференциальных уравнений (а) размерность ядра соответствующих отображений не совпадает с его порядком и (б) задача Коши для (3) здесь не имеет решений.

В заключение рассмотрим вопрос о представлении обратного отображения к произвольному линейному отображению $T : D \subset E \to F$ (безотносительно от размерности ядра) в локально выпуклых топологических пространствах E и F в случае, когда элементами D являются непрерывные (или более высокой гладкости) функции $x : \Omega \subset R^n \to K^1$.

Т е о р е м а 3. *Пусть для линейного отображения $T : D \subset E \to F$ существуют топологическое сопряженное $T^* : F^* \to D^*$ и обратное $T^{-1} : F \to D$ отображения. Пусть, далее, g_t — однопараметрическое семейство решений уравнения $T^* z_t = \delta_t$, где δ_t — мера Дирака. Тогда обратное отображение представимо в виде $(T^{-1}y)(t) = \langle y, g_t \rangle$.*

Действительно:

$$(T^{-1}y)(t) = x(t) = \langle x, \delta_t \rangle = \langle x, T^* g_t \rangle = \langle Tx, g_t \rangle = \langle y, g_t \rangle \tag{6}$$

По-видимому, этот факт нигде в литературе в явном виде не отражён.

Список литературы

1. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. 360 с.

A. G. Terent'ev

Linear operators with finite-dimensional kernels

The general view of all linear operators with finite-dimensional kernels is found. A formula for inverse operator for arbitrary linear map is derived, for which its range is immersed into the space of continuous function.

Keywords: linear operators, kernel, dimension.

Mathematical Subject Classifications:

Терентьев Александр Гурьевич, к.ф.-м.н., доцент, Магнитогорский государственный технический университет, 455000, Россия, г. Магнитогорск, пр. Ленина, 38. E-mail: terentyevag@mail.ru

Terent'ev Aleksandr Gur'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Magnitogorsk State Technical University, pr. Lenina, 38, Magnitogorsk, 455000, Russia