УДК 517.977

© ***В. И. Ухоботов, Д. В. Гущин***

ОДНОТИПНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА С ВЫПУКЛОЙ ПЛАТОЙ И ТЕРМИНАЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ В ФОРМЕ КОЛЬЦА

Рассматривается дифференциальная игра, в которой вектограммы управлений игроков гомотетичны выпуклому компакту. Терминальное множество является кольцом, которое задается этим компактом.

Ключевые слова: дифференциальная игра, альтернированный интеграл, управление.

Введение

Линейная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания с помощью замены переменных может быть сведена к игре, когда в правой части уравнений движения стоит сумма управлений игроков. После такой замены переменных в ряде дифференциальных игр («мальчик и крокодил», контрольный пример Л.С. Понтрягина [1] и другие) вектограммы управлений гомотетичны одному и тому же выпуклому компакту. Для таких игр с произвольным выпуклым замкнутым терминальным множеством в работе [2] построен альтернированный интеграл Л.С. Понтрягина [1]. В работе [3] альтернированный интеграл найден для случая, когда терминальное множество имеет форму кольца, построенного с помощью выпуклого компакта, которому гомотетичны вектограммы игроков.

В настоящей статье первый игрок, выводя фазовую точку в заданный момент времени на кольцо, минимизирует интегральную плату.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается дифференциальная игра

$$\dot z = -a(t)\varphi(t)u + b(t)v, \quad t \leqslant p. \tag{1}$$

Здесь функции $a(t) \geqslant 0$, $b(t) \geqslant 0$ являются интегрируемыми на любом отрезке из полуоси $(-\infty, p]$. Задана функция $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям

$$\lambda(z) \geqslant 0, \quad \lambda(0) = 0;$$

$$\lambda(az) = a\lambda(z) \text{ при } a \geqslant 0;$$

$$\lambda(z_1 + z_2) \leqslant \lambda(z_1) + \lambda(z_2).$$

Управлением первого игрока являются произвольная функция $u(t, z) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая равенству $\lambda(u(t, z)) = 1$, и измеримая функция $\varphi : [t_0, p] \to [0, 1]$. Управлением второго игрока является произвольная функция $v(t, z) \in \mathbb{R}^n$, для которой $\lambda(v(t, z)) \leqslant 1$. Движение $z(t)$ системы (1) с начальным условием $z(t_0)$ строится с помощью предельного перехода ломаных Эйлера. Заданы числа $0 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$ и функция $g(t, \varphi) \geqslant 0$ при $t \leqslant p$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. Первый игрок стремится осуществить неравенство $\varepsilon_1 \leqslant \lambda(z(p)) \leqslant \varepsilon_2$ и минимизировать интеграл $\displaystyle\int_{t_0}^{p} g(r, \varphi(r))\, dr$.

Цель второго игрока противоположна.

Зафиксируем измеримую функцию $\varphi : [t_0, p] \to [0, 1]$ и рассмотрим игру (1) с условием окончания $\varepsilon_1 \leqslant \lambda(z(p)) \leqslant \varepsilon_2$. Для этой игры альтернированный интеграл Л. С. Понтрягина равен [3]

$$W(t; \varphi(\cdot)) = \begin{cases} \varnothing, & \text{при } \min\limits_{t \leqslant s \leqslant p} \Big(f_2(s; \varphi(\cdot)) - f_1(s; \varphi(\cdot)) \Big) < 0, \\ Z\Big(f_1(t; \varphi(\cdot)), f_2(t; \varphi(\cdot)) \Big), & \text{при } \min\limits_{t \leqslant s \leqslant p} \Big(f_2(s; \varphi(\cdot)) - f_1(s; \varphi(\cdot)) \Big) \geqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь

$$Z(a;b) = \{z \in \mathbb{R}^n : a \leqslant \lambda(z) \leqslant b\},$$

$$f_2(t;\varphi(\cdot)) = \varepsilon_2 + \int_t^p \Big(a(r)\varphi(r) - b(r)\Big)\, dr,$$

$$f_1(t;\varphi(\cdot)) = \begin{cases} \varepsilon_1 - \displaystyle\int_t^p \Big(a(r)\varphi(r) - b(r)\Big)\, dr, & \text{при } t(\varepsilon_1;\varphi(\cdot)) \leqslant t \leqslant p, \\ 0, \quad \text{при } t < t(\varepsilon_1;\varphi(\cdot)), \end{cases}$$

$$t(\varepsilon_1;\varphi(\cdot)) = \begin{cases} -\infty, \text{ если } \varepsilon_1 > \displaystyle\int_t^p \Big(a(r)\varphi(r) - b(r)\Big)\, dr \quad \forall t < p, \\ \min\Big(\tau : \tau < p, \quad \varepsilon_1 > \displaystyle\int_t^p \Big(a(r)\varphi(r) - b(r)\Big)\, dr \quad \tau < t < p\Big). \end{cases}$$

В [3] показано, что, если $z(t_0) \notin W(t_0;\varphi(\cdot))$, то существует управление $\lambda(v(t,z)) \leqslant 1$ второго игрока такое, что для любого управления $\lambda(u(t,z)) = 1$ и для любого движения $z(t)$ будет выполнено $z(p) \notin Z(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$. Если $z(t_0) \in W(t_0;\varphi(\cdot))$, то существует управление $u(t,z)$ первого игрока, которое обеспечивает включение $z(p) \in Z(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ для любого управления второго игрока и для любого движения. Это управление можно построить в виде экстремальной стратегии [4] к стабильному мосту (2).

§ 2. Построение оптимального управления $\varphi(\cdot)$

Рассмотрим оптимизационную задачу

$$\int_{t_0}^p g(r,\varphi(r))\, dr \to \min, \quad \varphi : [t_0,p] \to [0,1], \quad z(t_0) \in W(t_0;\varphi(\cdot)). \tag{3}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть функция $g(t,\varphi) \geqslant 0$ при каждом $t \leqslant p$ выпукла и непрерывна по $\varphi \in [0,1]$, а при любом $\varphi \in [0,1]$ она измерима и ограничена сверху суммируемой на каждом отрезке из полуоси $(-\infty,p]$ функцией. Тогда, если включение в (3) выполнено для некоторой измеримой функции $\varphi : [t_0,p] \to [0,1]$, то решение $\varphi_0 : [t_0,p] \to [0,1]$ в задаче (3) существует.*

Список литературы

1. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. Новая серия. 1980. Т. 112. № 3. С. 307–330.
2. Ухоботов В.И. Однотипная дифференциальная игра с выпуклой целью // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 196–204
3. Ухоботов В.И. Однотипная дифференциальная игра с терминальным множеством в форме кольца // Некоторые задачи динамики и управления. Сб. научных трудов. Челяб. гос. ун-т, ИММ УрО РАН. Челябинск, 2005. С. 108–123
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1968. 475 с.

Поступила в редакцию 26.01.2012

V. I. Ukhobotov, D. V. Gushchin

One-type differential game with convex integral price and terminal set in a ring form

We consider one-type differential game where players vectograms are homothetic to a convex set. Terminal set is a ring.

Keywords: differential game, stable bridge, permitted control.

Mathematical Subject Classifications: 49N70

Ухоботов Виктор Иванович, д.ф.-м.н., профессор, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129. E-mail: ukh@csu.ru

Гущин Денис Васильевич, программист, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129. E-mail: off_side@mail.ru

Ukhobotov Viktor Ivanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Control Theory and Optimization, Chelyabinsk State University, ul. Brat'ev Kashirinyh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia

Gushchin Denis Vasil'evich, Programmer, Department of Control Theory and Optimization, Chelyabinsk State University, ul. Brat'ev Kashirinyh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia