УДК 517.977.5

© *Д. В. Хлопин*

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ[1]

В работах А.В. Кряжимского, С.М. Асеева, В.М. Вилева было предложено краевое условие, сопоставляющее каждой оптимальной паре единственное решение соотношений принципа максимума. В данной работе анонсируется подобное краевое условие, но уже без каких-либо условий на дисконтирующий множитель.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача на бесконечном промежутке, условие трансверсальности на бесконечности, необходимые условия оптимальности, множители Лагранжа.

Хотя необходимые условия оптимальности в виде соотношений принципа максимума Понтрягина (ПМП) для задач на бесконечном промежутке были получены уже в [1] (максимально общий случай — в [2]), найти какое-либо универсальное условие трансверсальности хотя бы для задачи со свободным правым концом пока не удается: большинство известных условий зачастую или выделяют слишком много решений ПМП, или несовместны с ними (см. [4, § 6 и § 16]). Лишь в цикле работ [3–5] для задач с экспоненциально убывающим дисконтирующим множителем удалось выразить начальное значение сопряженной переменной в виде несобственного интеграла от пары (управление, траектория) так, что это краевое условие имеет для каждой оптимальной пары в точности одно решение. Данная работа анонсирует некоторые результаты об успешности переноса такого условия трансверсальности на более общие задачи.

Определим $\mathbf{T} \triangleq \{t \in \mathbf{R} \,|\, t \geqslant 0\}$, $\mathbf{X} \triangleq \mathbf{R}^m$, $\mathbf{U} \triangleq \mathbf{R}^r$. Пусть $\mathfrak{U}$ — семейство всех измеримых селекторов многозначного отображения $U : \mathbf{T} \multimap \mathbf{U}$. Поставим задачу

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad x(0) = 0, \quad t \in \mathbf{T}, \quad x \in \mathbf{X}, \quad u \in U(t), \tag{1a}$$

$$J_T[u] \triangleq \int_0^T g\big(t, x(t), u(t)\big)\, dt \overset{T\to\infty}{\rightsquigarrow} \max. \tag{1b}$$

Далее будем для простоты считать, что: U σ-компактнозначно, локально ограничено с измеримым графиком; f, g и их производные по x — локально липшицевые по x отображения Каратеодори, локально ограниченные на компактах; f имеет подлинейный рост.

Для каждой последовательности $\tau \triangleq (\tau_n)_{n\in\mathbf{N}} \uparrow \infty$ моментов времени будем говорить, что управление $u^0 \in \mathfrak{U}$ *равномерно τ-оптимально*, если $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ $\exists N \in \mathbf{N}$ $\forall u \in \mathfrak{U}$ $\forall n \in \overrightarrow{N,\infty}$ $J_{\tau_n}[u] \leqslant J_{\tau_n}[u^0] + \varepsilon$.

Пусть для некоторой последовательности $\tau \uparrow \infty$ такое управление u^0 существует. Введём для всякого $\xi \in \mathbf{X}$ x_ξ — решение (1a) при $x_\xi(0) = \xi$, $u \equiv u^0$; A_ξ — решение задачи Коши

$$\frac{dA_\xi(t)}{dt} = \frac{\partial f(t, x_\xi(t), u^0(t))}{\partial x} A_\xi(t), \quad A_\xi(0) = 1_{\mathbf{L}},$$

и вектор $I_\xi(T) \triangleq \displaystyle\int_0^T \frac{\partial g(t, x_\xi(t), u^0(t))}{\partial x} A_\xi(t)\, dt$ для всех $T \in \mathbf{T}$.

Воспользовавшись полунепрерывностью соотношений ПМП, а также соображениями типа устойчивости, можно показать что сколь угодно тонкая (при $t = 0$) трубка решений системы, содержащей систему ПМП, при $u \equiv u^0$ для сколь угодно больших τ_n пересекается с гиперплоскостью $\psi = 0_{\mathbf{X}}$. В частности, решение $(x^0, u^0, \lambda^0, \psi^0)$ ПМП назовем $A_*(\tau)$-нулевым, если существуют такие подпоследовательность $(t_n)_{n\in\mathbf{N}} \sqsubset (\tau_n)_{n\in\mathbf{N}}$ и сходящаяся к $(\psi^0 A_0, A_0, x^0, \lambda^0)$ на всяком компакте последовательность решений $(I^n, A^n, x^n, \lambda^n)$, что $I^n(t_n) = 0$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

Т е о р е м а 1. *Для любого равномерно τ-оптимального решения (u^0, x^0) задачи* (1a)-(1b) *найдется (λ^0, ψ^0), для которой $(x^0, u^0, \lambda^0, \psi^0)$ — $A_0(\tau)$-нулевое решение ПМП.*

[1]Работа поддержана РФФИ (грант № 11–01–90432 укр-ф-а).

С л е д с т в и е 1. *Если при этом выполнено одно из двух условий:*

$$\exists I_* \stackrel{\triangle}{=} \lim_{n\to\infty,\xi\to 0} I_\xi(\tau_n) \in \mathbf{X}; \tag{2a}$$

$$\exists \varpi_* \stackrel{\triangle}{=} \lim_{n\to\infty,\xi\to 0} \frac{I_\xi(\tau_n)}{||I_\xi(\tau_n)||_{\mathbf{X}}} \in \mathbf{X}, \quad \lim_{n\to\infty,\xi\to 0} ||I_\xi(\tau_n)||_{\mathbf{X}} = \infty, \tag{2b}$$

то, с точностью до положительного множителя, $A_0(\tau)$-нулевое решение единственно, и для всех $T \in \mathbf{T}$

$$\lambda^0 = 1, \quad \psi^0(T) \stackrel{\triangle}{=} \Big(I_* - \int_0^T \frac{\partial g(t, x^0(t), u^0(t))}{\partial x} A_0(t)\, dt\Big) A_0^{-1}(T); \tag{3a}$$

$$\lambda^0 = 0 \quad , \psi^0(T) \stackrel{\triangle}{=} \varpi_* A_0^{-1}(T). \tag{3b}$$

Если же выполнено лишь $\limsup_{n\to\infty,\xi\to 0} ||I_\xi(\tau_n)|| < +\infty$, то задача невырождена, а $\lambda^0 > 0$.

Связка условий (2)–(3) в ряде задач (например для линейных по x) полностью сводит поиск оптимального решения к решению краевой задачи. Применим следствие 1 для модели:

$$\dot{x} = -\nu x + u, \quad u \geqslant 0, \quad x(0) = K_0, \quad J_T[u] = \int_0^T \Big[g(t)x^\sigma - e^{-\nu t}\frac{bu^2}{2}\Big] dt \stackrel{T\to\infty}{\rightsquigarrow} \max, \tag{4}$$

где $u \geqslant 0$ — инвестиции, $\nu \geqslant 0$ — амортизация, K_0 — начальный капитал, $g(t) > 0$ — дисконтирующий множитель, а коэффициент $\sigma \in (0, 1]$ задает производственную функцию.

Вычисляя, получаем, что всякое равномерно τ-оптимальное решение (u^0, x^0) задачи (4), если существует, обязано удовлетворять с $I(t) \stackrel{\triangle}{=} \frac{d}{dt}\Big(g(t)e^{-\nu t}u^0(t)\Big)$ краевой задаче:

$$b\dot{I} = \sigma g(t)e^{-\nu t}(x^0)^{\sigma-1}, \qquad \liminf_{n\to\infty} I(\tau_n) = -0,$$
$$g(t)e^{-\nu t}\big(\dot{x}^0 + \nu x^0\big) + I = 0, \qquad x^0(0) = K_0.$$

Например, для $g(t) = \frac{1}{(1+t)^{4/3}}$, $\sigma = 1/2$, $b = \frac{8}{3}$, $\nu = 0$, $K_0 = 1$, отсюда имеем $I(t) = \frac{1}{2(1+t)}$, $x^0(t) = (1+t)^{4/3}$, $u^0(t) = \frac{8}{3}(1+t)^{1/3}$. Отметим, что в работе [5] для $g(t)$ вида e^{pt} поиск оптимальных решений (с более слабым локальным критерием: locally weakly overtaking) сведен к подобной краевой задаче при $p < \nu$, и показано, что при $p > \nu$ решений нет.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961
2. Halkin H. Necessary Conditions for Optimal Control Problems with Infinite Horizons // Econometrica. 1974. Vol. 42. P. 267–272.
3. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 43. P. 1094–1119.
4. Асеев С.М., Кряжимский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды Математического Института им. В.А. Стеклова. 2007. Т. 257. С. 1–271.
5. Aseev S.M., Veliov V.M. Maximum Principle for infinite-horizon optimal control; problems with dominating discount // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B. 2012. Vol. 19. № 1–2. P. 43–63.

Поступила в редакцию 15.02.2012

D. V. Khlopin

On necessary conditions of optimality for infinite horizon problems

In the works of S.M. Aseev, A.V. Kryazhimskii, V.M. Veliov, the boundary value problem for equations of the Pontryagin Maximum Principle was suggested. Each of the optimal pair (control, trajectory) corresponds to a unique solution of this boundary value problem. This work is devoted to the study of similar transversality conditions without any assumptions on the discount rate.

Keywords: optimal control, infinite horizon problem, transversality condition for infinity, necessary conditions of optimality, Lagrange multipliers.

Mathematical Subject Classifications: 37N40, 91B62, 49K15

Хлопин Дмитрий Валерьевич, с.н.с., Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: khlopin@imm.uran.ru

Khlopin Dmitrii Valer'evich, Senior Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia