УДК 517.977

© **А.Г. Иванов**
imi@uni.udm.ru

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ЗАДАЧ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ. II[1]

Ключевые слова: функция поточечного максимума, ляпуновские почти периодические задачи, линейные почти периодические по Степанову системы управления.

Abstract. The main definitions and statements on the measurevalued functions almost periodic in the sense of Stepanov, which are used while studing the problems of almost periodic motions optimal control, are prezented.

Содержание

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 99–01–00454) и конкурсным центром фундаментального естествознания (грант Е02–1.0–100).

Введение

В данной работе продолжены исследования, начатые в [1], посвященные свойствам мерозначных почти периодических (п. п.) по Степанову функций, которые используются в задачах, связанных с оптимальным управлением п. п. движений.

В первом разделе работы рассмотрены вопросы, связанные с поточечным максимумом в п. п. случае, а также элементарными ляпуновскими задачами в классе управлений из пространства $S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$, $\mathfrak{U}\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ и APM_1.

Во втором разделе на примере ляпуновской п. п., представляющей и самостоятельный интерес, проиллюстрированы практически все основные утверждения и определения работы [1] и первого раздела настоящей статьи. Отметим, что схема доказательства теоремы 2.1 может быть использована и при получении необходимых условий оптимальности в задачах управления п. п. движениями нелинейной системы управления и в которой в качестве управлений рассматриваются пары $(v(\cdot),u(\cdot))\in\mathfrak{S}\times S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$, где $\mathfrak{S}$ — заданное множество функций из $B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$.

Далее, при получении необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина допустимого процесса $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$ в задаче оптимального управления п. п. движениями одну из основных нагрузок несет вопрос о существовании п.п. по Бору решения нелинейной системы управления

$$\dot{x}=\langle\mu(t,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),f(t,x,u)\rangle\doteq\int_{\mathfrak{U}}f(t,x,u)\mu(t,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})(du),$$

отвечающего игольчатой вариации $\mu(\cdot,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\in APM_1$ управления $\widehat{\mu}(\cdot)$ (см. [1. С. 56]) и его зависимость от параметров $(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})$, входящих в определение $\mu(\cdot,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$. Свойства $\mu(\cdot,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$ позволяют включить указанные вопросы в более общую постановку задачи о существовании п.п. по Бору решения системы управления $\dot{x}=\langle\mu(t,\alpha,\omega),f(t,x,u)\rangle$, где $(t,\alpha,\omega)\mapsto\mu(t,\alpha,\omega)$ — заданное мерозначное отображение п.п. по $t\in\mathbb{R}$ в смысле Степанова равномерно по $(\alpha,\omega)\in\mathbb{A}\times\Omega$ и его поведения в зависимости от

$(\alpha, \omega) \in \mathbb{A} \times \Omega$. Этим вопросам посвящен пятый раздел работы. В свою очередь исследование этих вопросов опирается на ряд достаточно громоздко доказываемых свойств линейных по фазовой переменной систем управления. Доказательству этих свойств посвящен третий раздел работы. Далее, для обоснования корректности расширения (овыпуклениия) задач оптимального управления п.п. движениями, а также при получении утверждений о необходимых условиях оптимальности в этих задачах, важную роль играет вопрос о существовании п.п. по Бору решения системы $\dot{x} = f(t, x, u_j(t, \omega))$ и его зависимость от параметра ω при $j \to \infty$, где $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность из пространства $S(\mathbb{R} \times \Omega, \mathfrak{U})$ — функций, которые п.п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Степанова равномерно по $\omega \in \Omega$, аппроксимирующая мерозначное управление $\mu \in S(\mathbb{R} \times \Omega, \mathfrak{U})$. В свою очередь, опять же для исследования этих вопросов необходим ряд утверждения линейных систем, которым посвящен четвертый раздел данной работы.

Выражаю искреннюю признательность Е. Л. Тонкову за постановку задачи оптимального управления п. п. движениями, неустанный интерес и обсуждение результатов, связанных с этими задачами. Благодарю А. Г. Ченцова за неоднократное и плодотворное обсуждение результатов работы [1] и данной статьи.

1. О поточечном максимуме в п. п. случае

1. С функцией g, принадлежащей пространству $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$ (или $B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$), свяжем два измеримых отображения

$$t \mapsto \varphi(t) \doteq \max_{u \in \mathfrak{U}} g(t, u) \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

$$t \mapsto F(t) \doteq \{u \in \mathfrak{U} \colon \ g(t, u) = \varphi(t)\} \in \operatorname{comp}(\mathfrak{U}), \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Так как $|\varphi_\tau(t) - \varphi(t)| \leqslant \max_{u \in \mathfrak{U}} |g(t + \tau, u) - g(t, u)|, \ \ t \in \mathbb{R}$, то $\varphi \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (и $\varphi \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, если $g \in B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$) и для каждого $\varepsilon > 0$ множество $\bigcap_{u \in \mathfrak{U}} E_S(g(\cdot, u), \varepsilon) \subset E_S(\varphi, \varepsilon)$ (следовательно, $\operatorname{Mod}(\varphi)$ содержится в $\operatorname{Mod}(g)$).

В этом пункте исследуется вопрос о наличии у отображения F п. п. по Степанову сечений, т. е. таких функций $u(\cdot)$ из $S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$, что $u(t)\in F(t)$ при п. в. $t\in\mathbb{R}$.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие возможные ситуации в этой задаче.

Приведем пример отображения $F\notin S(\mathbb{R},\mathrm{comp}(\mathfrak{U}))$, но имеющего п. п. сечения.

Пример 1.1. Пусть $g(t,u)=f(t)u$, $(t,u)\in\mathbb{R}\times[-1,1]$, где $f(t)=\sum\limits_{m=2}^{\infty}2^{-m}f_m(t)$, $f_m(t)\doteq\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}\psi(t-m-2mj)$ и где, в свою очередь, ψ — такая непрерывная функция, что $\psi(t)>0$ при $|t|<1$ и $\psi(t)=0$, если $|t|\geqslant 1$. Поскольку f является суммой равномерно сходящегося на $\mathbb{R}$ ряда, состоящего из $2m$-периодических функций, то $f\in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$, и следовательно, функция $g\in B(\mathbb{R}\times[-1,1],\mathbb{R})$. Так как в этом случае $F(t)=[-1,1]$, если $|t|<1$ и $F(t)=\{1\}$ при $|t|\geqslant 1$, то $F\notin S(\mathbb{R},\mathrm{comp}([-1,1]))$, но имеет п. п. по Бору сечение $u(t)=1$, $t\in\mathbb{R}$.

Пример 1.2. Пусть $g(t,u)=\mathfrak{f}(t)u$, $(t,u)\in\mathbb{R}\times[-1,1]$, где п. п. по Бору функция $\mathfrak{f}$, определена в [1] равенством (5.3). В этом случае $F(t)=\{\mathrm{sign}\,\mathfrak{f}(t)\}$ для всех $t\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Поэтому отображение $F\notin S(\mathbb{R},\mathrm{comp}([-1,1]))$, и всякое его измеримое сечение, совпадающее почти всюду с $\mathrm{sign}\,\mathfrak{f}$, не принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Сейчас приведем достаточные условия существования п. п. по Степанову сечений у F. С этой целью введем для каждого фиксированного $\alpha>0$ отображение

$$t\mapsto W(t,\alpha)\doteq\{u\in\mathfrak{U}\colon\ g(t,u)\geqslant\varphi(t)-\alpha\}\in\mathrm{comp}(\mathfrak{U}),\ t\in\mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Теорема 1.1. *Пусть функция* $g\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$ *и для отвечающих ей отображений* $F(\cdot)$ *и* $W(\cdot,\alpha)$, *определенных равенствами* (1.2) *и* (1.3) *соответственно, выполнено равенство* $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}d_{\mathrm{dist}}(W(\cdot,\alpha),F(\cdot))=0$. *Тогда* $F\in S(\mathbb{R},\mathrm{comp}(\mathfrak{U}))$, *существует такая функция* $u\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$, *что* $u(t)\in F(t)$, $t\in\mathbb{R}$ *и* $\mathrm{Mod}(u)\subset\mathrm{Mod}(F)\subset\mathrm{Mod}(g)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для функции

$$(t,u) \mapsto \mathfrak{g}(t,u) \doteq -\varphi(t) + g(t,u), \ (t,u) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{U},$$

которая принадлежит $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$, применяем следствие 5.2, приведенное в работе [1].

Рассмотрим сейчас вопрос о поточечном максимуме в компактном метрическом пространстве $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}), \rho_w)$.

Для функции $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$, по аналогии с отображением φ, определим отображение

$$t \mapsto \psi(t) \doteq \max_{\nu \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})} \langle \nu, g(t,u)\rangle, \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Поскольку $g(t,\cdot) \in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ и [2] $\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}) = \mathrm{cl}_w(\mathrm{coDIR}(\mathfrak{U}))$, где cl_w — замыкание в метрике ρ_w множества $\mathrm{coDIR}(\mathfrak{U})$, то

$$\psi(t) = \varphi(t), \ t \in \mathbb{R}$$

и, следовательно, отображением в пространстве мер, аналогичным (1.2), будет следующее отображение:

$$t \mapsto \mathfrak{F}(t) \doteq \{\nu \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}) \colon \langle \nu, g(t,u)\rangle = \varphi(t)\} \in \mathrm{comp}(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})), \tag{1.5}$$

содержащее при каждом $t \in \mathbb{R}$ множество $\{\delta_u, \ u \in F(t)\}$. В отличие от рассмотренных в [1] (см. замечание 5.2) отображений $\mathcal{N}(\cdot; \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ и $N(\cdot;\mathfrak{U})$ у отображений $F(\cdot)$ и $\mathfrak{F}(\cdot)$ при исследовании их почти периодичности существует тесная связь. Чтобы показать это, приведем ряд вспомогательных утверждений.

Рассмотрим систему множеств

$$\mathbb{H} \doteq \{\mathrm{rpm}(K), \ K \in \mathrm{comp}(\mathfrak{U})\} \tag{1.6}$$

метрического пространства $(\mathrm{comp}(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})), \mathrm{dist}_w)$.

Л е м м а 1.1. *Отображение*

$$\mathfrak{G} \colon (\mathrm{comp}(\mathfrak{U}), \mathrm{dist}) \to (\mathbb{H}, \mathrm{dist}_w),$$

определенное равенством

$$\mathfrak{G}(K) \doteq \operatorname{rpm}(K), \ \ K \in \operatorname{comp}(\mathfrak{U}), \tag{1.7}$$

является гомеоморфизмом.

Доказательство. При каждом $K \in \operatorname{comp}(\mathfrak{U})$ $\operatorname{rpm}(K) = \operatorname{cl}_w(\operatorname{coDIR}(\mathrm{K}))$. Поэтому (см. п. 1 из второго раздела работы [1]) биективность и непрерывность отображения $\mathfrak{G}$ вытекают из неравенств

$$\operatorname{dist}_w(\mathfrak{G}(K_1), \mathfrak{G}(K_2)) \leqslant \operatorname{dist}_w(\operatorname{DIR}(\mathrm{K}_1), \operatorname{DIR}(\mathrm{K}_2) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j}}{1 + \|c_j\|_{C(\mathfrak{U},\mathbb{R})}} \cdot \omega_{\operatorname{dist}(K_1,K_2)}(c_j, \mathfrak{U}), \ \ K_1, K_2 \in \operatorname{comp}(\mathfrak{U}).$$

Откуда [3], в силу компактности пространства $(\operatorname{comp}(\mathfrak{U}), \operatorname{dist})$, получаем утверждение леммы 1.1.

Следствие 1.1. *Метрическое пространство* $(\mathbb{H}, \operatorname{dist}_w)$ *компактно.*

Следствие 1.2. *Отображение* $\mathcal{K} : \mathbb{R} \to \operatorname{comp}(\mathfrak{U})$ *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R}, \operatorname{comp}(\mathfrak{U}))$ *в том и только том случае, если* $\mathfrak{G} \circ \mathcal{K} \in S(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, *и при этом выполнено равенство* $\operatorname{Mod}(\mathcal{K}) = \operatorname{Mod}(\mathfrak{G} \circ \mathcal{K})$.

Лемма 1.2. *Пусть отображения* F, $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{G}$ *заданы равенствами* (1.2), (1.5) *и* (1.7) *соответственно. Тогда при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *выполнено равенство* $\mathfrak{F}(t) = (\mathfrak{G} \circ F)(t)$.

Доказательство. Если

$$\nu \in (\mathfrak{G} \circ F)(t) \overset{(1.7)}{=} \operatorname{rpm}(F(t)),$$

то (см. (1.6)) $\operatorname{supp} \nu \subset F(t)$. Откуда получаем равенство

$$\langle \nu, g(t,u) \rangle = \int_{\operatorname{supp} \nu} g(t,u) \nu(du) = \varphi(t),$$

которое (см. (1.5)) означает, что $\nu \in \mathfrak{F}(t)$. Пусть теперь $\nu \in \mathfrak{F}(t)$. Предположим, что $\operatorname{supp}\nu$ не содержится в $F(t)$. Тогда найдется точка $v \in (\operatorname{supp}\nu) \setminus \mathrm{F(t)}$. Так как $\varphi(t) - g(t,v) > 0$ и отображение $u \mapsto (\varphi(t) - g(t,u))$ непрерывно, то имеют место следующие соотношения

$$0 = \int_{\mathfrak{U}} (\varphi(t) - g(t,u))\nu(du) = \int_{(\operatorname{supp}\nu)\setminus \mathrm{F(t)}} (\varphi(t) - g(t,u))\nu(du) > 0.$$

Полученное противоречие означает, что действительно $\operatorname{supp}\nu$ содержится в $F(t)$ и, значит, $\nu \in (\mathfrak{G} \circ F)(t)$.

Заметим, что из леммы 1.2 и следствия 1.2 вытекает, что $\mathfrak{F}$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ в том и только том случае, если $F \in S(\mathbb{R}, \operatorname{comp}(\mathfrak{U}))$ и их модули совпадают.

Т е о р е м а 1.2. *Отображение F имеет сечение $u(\cdot)$, принадлежащее $S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ в том и только том случае, когда отображение $\mathfrak{F}$ имеет сечение $\mu(\cdot) \in APM_1$ и при этом* $\mathrm{Mod}(u)$ *содержится в* $\mathrm{Mod}(\mu)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условий теоремы 1.2 вытекает из леммы 2.1 [1]. Пусть теперь $\mathfrak{F}$ имеет сечение $\mu \in APM_1$. Тогда [4] найдется такое $u \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$, что $u(t) \in \operatorname{supp}\mu(\mathrm{t})$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$ и $\mathrm{Mod}(u) \subset \mathrm{Mod}(\mu)$. Покажем, что $u(t) \in F(t)$, $t \in \mathbb{R}$. В самом деле, из соотношений

$$0 \leqslant \varphi(t) - g(t,u(t)) = \langle \delta_{u(t)}, \varphi(t) - g(t,u)\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\operatorname{supp}\mu(\mathrm{t})} (\varphi(t) - g(t,u))\mu(t)(du) = \langle \mu(t), \varphi(t) - g(t,u)\rangle = 0$$

вытекает, что $\varphi(t) = g(t,u)$ для п. в. $t \in \mathbb{R}$.

2. Сейчас, используя результаты предыдущего пункта, рассмотрим простейшие задачи оптимального управления в пространстве п. п. функций. Но прежде приведем следующее утверждение (см. [5])

Т е о р е м а 1.3. *Пусть* $g \in B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такая функция* $u \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$, *что* $g(t, u(t)) > \varphi(t) - \varepsilon$ *и* $\mathrm{Mod}(u) \subset \mathrm{Mod}(g)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и введем в рассмотрение при каждом $\alpha \in (0, \varepsilon)$ отображение

$$(t, u) \mapsto \psi(t, u) \doteq \max\{0, g(t, u) - \varphi(t) + \alpha\}, \ (t, u) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{U}.$$

Поскольку $g \in B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U})$, $\varphi \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, то $\psi \in B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}_+)$. Кроме того, так как $\psi(t, u) = \alpha$, если $u \in F(t)$ и (здесь см.(1.3))

$$\{u \in \mathfrak{U}\colon\ g(t, u) - \varphi(t) + \alpha > 0\} \subset W(t, \alpha),$$

то

$$F(t) \subset \operatorname{supp} \psi(\mathrm{t}, \cdot) \subset \mathrm{W}(\mathrm{t}, \alpha), \ \mathrm{t} \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Фиксируем такую меру $\eta \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, что $\operatorname{supp} \eta = \mathfrak{U}$, и при каждом $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим отображение $c(\cdot) \mapsto \langle \eta, \psi(t, u) c(u) \rangle$, $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$. Так как $\psi(t, \cdot) \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$, то введенное отображение принадлежит $(C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))^*$, и, значит, по теореме Рисса [6.C.138] найдется такая мера $\mu_t \in frm(\mathfrak{U})$, что $\langle \mu_t, c(u) \rangle = \langle \eta, \psi(t, u) c(u) \rangle$ для всех $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$, и при этом отображение $t \mapsto \langle \mu_t, c(u) \rangle$ принадлежит $B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Полагаем далее $\xi(t) \doteq \langle \eta, \psi(t, u) \rangle$, $t \in \mathbb{R}$. Так как $\psi \in B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}_+)$, $\eta \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, то $\xi \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Покажем, что $\inf\limits_{t \in \mathbb{R}} \xi(t) > 0$. Действительно, пусть $\gamma > 0$ такое, что $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \omega_\gamma[\psi(t, \cdot), \mathfrak{U}] < \frac{\alpha}{4}$ и точки $u_1, \ldots, u_p \in \mathfrak{U}$ образуют γ-сеть компакта $\mathfrak{U}$. Для каждого $t \in \mathbb{R}$ выбираем точки $u_t \in F(t)$ (поэтому $\psi(t, u_t) = \alpha$) и u_j такие, что $|u_t - u_j| < \gamma$. Теперь, учитывая, что $\psi(t, u) \geqslant 0$, $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{U}$ и $\eta \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, имеем следующие соотношения

$$\xi(t) = \int_{\mathfrak{U}} (\psi(t, u) - \alpha) \eta(du) + \alpha =$$

$$= \int_{\mathfrak{U} \cap O_\gamma[u_j]} (\psi(t, u) - \psi(t, u_j)) \eta(du) +$$

$$+\int_{\mathfrak{U}\cap O_\gamma[u_j]}(\psi(t,u_j)-\psi(t,u_t))\eta(du)+$$
$$+\int_{\mathfrak{U}\setminus O_\gamma[u_j]}(\psi(t,u)-\psi(t,u_t))\eta(du)+\alpha\geqslant$$
$$\geqslant(-2\sup_{t\in\mathbb{R}}\omega_\gamma[\psi(t,\cdot)\mathfrak{U}]+\alpha)\eta(\mathfrak{U}\cap O_\gamma[u_j])>$$
$$>\frac{\alpha}{2}\min_{1\leqslant j\leqslant p}\eta(\mathfrak{U}\cap O_\gamma[u_j])\doteq\mathfrak{k}.$$

Поскольку $u_1,\ldots,u_p\in\operatorname{supp}\eta$, то [2.С.153] $\eta(\mathfrak{U}\bigcap O_r[u_j])>0$, $j=1,\ldots,p$. Поэтому из приведенных выше соотношений получаем, что $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}}\xi(t)\geqslant\mathfrak{k}>0$, и, следовательно, функция $\frac{1}{\xi}$ принадлежит $B(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$.

Рассмотрим далее отображение $t\mapsto\nu(t)\doteq\frac{1}{\xi(t)}\mu_t\in\operatorname{rpm}(\mathfrak{U})$, $t\in\mathbb{R}$, которое (см. замечание 2.2 в [1]) принадлежит пространству $B(\mathbb{R},\operatorname{rpm}(\mathfrak{U}))\subset APM_1$ и $\operatorname{supp}\nu(\mathrm{t})=\operatorname{supp}\psi(\mathrm{t},\cdot)$, $t\in\mathbb{R}$. Поэтому [4] существует такая функция $u\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$, что $u(t)\in\operatorname{supp}\psi(\mathrm{t},\cdot)$ при п. в. $t\in\mathbb{R}$, а, значит, (см. (1.8)) $u(t)\in W(t,\alpha)$ для п. в. $t\in\mathbb{R}$. Теперь, т. к. $\alpha\in(0,\varepsilon)$, то (см. (1.3)) $\psi(t)\geqslant g(t,u(t))>\varphi(t)-\varepsilon$ при п. в. $t\in\mathbb{R}$.

З а м е ч а н и е 1.1. Из приведенного доказательства видно, что утверждение теоремы 1.3 справедливо для всякой функции $g\in\mathfrak{V}_1^{loc}(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$, такой, то $g(\cdot,u)\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ при каждом $u\in\mathfrak{U}$ и $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}(\operatorname{ess}\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\omega_\gamma[g(t,\cdot),\mathfrak{U}])=0$. При этом надо использовать утверждение леммы 1.4 и следствие 2.3 работы [1].

Пусть далее $g\in B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$. По следствию 2.3 из [1] для всякой функции $u\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ отображение $t\mapsto g(t,u(t))$ принадлежит $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и, значит, существует среднее $M\{g(t,u(t))\}$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Задача

$$I(u(\cdot))\doteq M\{g(t,u(t))\}\to\sup,\ u(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})\tag{1.9}$$

называется элементарной п. п. ляпуновской задачей и функция $\widehat{u}(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ называется решением этой задачи, если для всех $u(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ справедливо неравенство $I(\widehat{u}(\cdot))\geqslant I(u(\cdot))$.

Т е о р е м а 1.4. *Функция* $\widehat{u} \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ *является решением задачи* (1.9) *в том и только том случае, если для п. в. точек* $t \in \mathbb{R}$

$$\max_{u \in \mathfrak{U}} g(t,u) = g(t, \widehat{u}(t)). \tag{1.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность условий теоремы 1.4 очевидна. Докажем необходимость условий. По теореме 1.2 для каждого $j \in \mathbb{N}$ найдется такая функция $u_j \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$, что при п. в. $t \in \mathbb{R}$ $g(t, u_j(t)) > \varphi(t) - \frac{1}{j}$, где $\varphi(t) \doteq \max\limits_{u \in \mathfrak{U}} g(t,u)$. Поэтому, т. к. $\widehat{u}$ — решение задачи (1.9), то

$$M\{\varphi(t)\} \geqslant I(\hat{u}) \geqslant I(u_j) > M\{\varphi(t)\} - \frac{1}{j}, \ j \in \mathbb{N}.$$

Откуда, в свою очередь, получаем равенство $M\{f(t)\} = 0$, где $f(t) \doteq \varphi(t) - g(t, \hat{u}(t))$, $t \in \mathbb{R}$ и при этом $f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Теперь нужное нам равенство (1.10) вытекает из следующего, несложно доказываемого утверждения.

Л е м м а 1.3. *Пусть функция* $f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, *такая, что* $M\{f(t)\} = 0$. *Тогда* $f(t) = 0$ *для п. в.* $t \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустив противное, получим, что для неотрицательной п.п. по Бору функции

$$t \mapsto \mathfrak{f}(t) \doteq \int_t^{t+1} f(s)ds, \ t \in \mathbb{R}$$

найдется такая точка $\vartheta \in \mathbb{R}$, что $\mathfrak{f}(\vartheta) \doteq \gamma > 0$. Следовательно [7], существует такое натуральное число l, что в каждом отрезке $[m, m+l]$, $m \in \mathbb{Z}$ содержится точка t_m, в которой $\mathfrak{f}(t_m) > \gamma/3$. Поэтому

$$M\{f(t)\} = \lim_{q \to \infty} \frac{1}{ql} \sum_{m=0}^{q-1} \int_{ml}^{ml+l} f(t)dt \geqslant \lim_{q \to \infty} \frac{1}{ql} \sum_{m=0}^{q-1} \mathfrak{f}(t_m) > \frac{\gamma}{3l} > 0.$$

Откуда получаем противоречие с условием — $M\{f(t)\} = 0$.

Из теорем 1.1 и 1.4 вытекает

С л е д с т в и е 1.3. *Пусть функция* $g \in B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$ *и отвечающие ей отображения* $F(\cdot), W(\cdot,\alpha): \mathbb{R} \to \mathrm{comp}(\mathfrak{U})$, *заданные равенствами* (1.2) *и* (1.3), *соответственно, такие, что* $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0} d_{\mathrm{dist}}(W(\cdot,\alpha), F(\cdot)) = 0$. *Тогда решение задачи* (1.9) *существует.*

З а м е ч а н и е 1.2. Для фиксированного множества $\Delta \subset \mathbb{R}$ полагаем

$$\mathbb{U}(\Delta) \doteq \{u \in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})\colon \mathrm{Mod}(u) \subset \mathrm{Mod}(\Delta)\}. \tag{1.11}$$

Отметим, что если $\Delta = \mathbb{R}$, то $\mathbb{U} = S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$, а, в случае если Δ — суть одноточечное множество вида $\{\frac{2\pi}{\omega}\}$, $\omega > 0$, то $\mathbb{U}(\frac{2\pi}{\omega})$ — подмножество из $S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$, состоящее из ω-периодических измеримых функций $u\colon \mathbb{R}\to\mathfrak{U}$. Рассмотрим далее задачу

$$I(u(\cdot)) \doteq M\{g(t,u(t))\} \to \sup,\ u(\cdot) \in \mathbb{U}(\Delta), \tag{1.12}$$

в которой функция $\widehat{u}(\cdot) \in \mathbb{U}(\Delta)$ называется решением, если $I(u(\cdot)) \leqslant I(\widehat{u}(\cdot))$ для всех $u(\cdot) \in \mathbb{U}(\Delta)$. Поскольку $\mathbb{U}(\Delta)$ содержится в $S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$, то очевидно, что

$$\sup\{I(u(\cdot)), u(\cdot) \in \mathbb{U}(\Delta)\} \leqslant \sup\{I(u(\cdot)), u(\cdot) \in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})\},$$

и всякое решение задачи (1.9), если его модуль содержится в $\mathrm{Mod}(\Delta)$, будет решением задачи (1.12). Следующий пример показывает, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

П р и м е р 1.3. Рассмотрим п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Бора равномерно по $u = (u_1,u_2) \in \mathfrak{U} \doteq [-1,1]\times[-1,1]$ отображение $g(t,u) = u_1 \sin\omega_1 t + u_2 \sin\omega_2 t$, где числа $\omega_1,\omega_2 > 0$ и несоизмеримы. Далее, т. к. для любых несоизмеримых $\beta > 0$ и $\omega > 0$ и всякой измеримой ω-периодической функции $u\colon \mathbb{R}\to[-1,1]$ имеет место равенство — $M\{u(t)\sin\beta t\} = 0$, то

$$\sup_{u(\cdot)\in\mathbb{U}(\omega)} M\{u_1(t)\sin\omega_1 t + u_2(t)\sin\omega_2 t\} =$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{если } \omega \text{ несоизмеримо с } \omega_1 \text{ и } \omega_2,\\ \dfrac{2}{\pi}, & \text{если } \omega \text{ соизмеримо либо с } \omega_1, \text{ либо с } \omega_2. \end{cases}$$

Будем считать для определенности, что $\omega = \omega_1$. Тогда, в силу вышеприведенного равенства, в качестве решения задачи

$$M\{u_1(t)\sin\omega_1 t + u_2(t)\sin\omega_2 t\} \to \sup,\ u(\cdot) \in \mathbb{U}(\omega_1)$$

можно взять любую фиксированную $\frac{2\pi}{\omega_1}$-периодическую функцию $\widehat{v}(t) = (\operatorname{sign}(\sin\omega_1 t), u_2(t))$, где $u_2(\cdot) \in \mathbb{U}(\omega_1)$. С другой стороны, поскольку при всех $t \in \mathbb{R}$

$$\max_{|u_1|\leqslant 1,\,|u_2|\leqslant 1}(u_1\sin\omega_1 t + u_2\sin\omega_2 t) = |\sin\omega_1 t| + |\sin\omega_2 t|,$$

то п. п. по Степанову функция $\widehat{u}(t) = (\operatorname{sign}(\sin\omega_1 t), \operatorname{sign}(\sin\omega_2 t))$ будет решением задачи

$$I(u(\cdot)) = M\{u_1(t)\sin\omega_1 t + u_2(t)\sin\omega_2 t\} \to \sup,\ u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$$

и при этом $I(\widehat{v}(\cdot)) = \frac{2}{\pi} < \frac{4}{\pi} I(\widehat{u}(\cdot))$. Кроме того, на множестве положительной меры $g(t, \widehat{v}(t)) < g(t, \widehat{u}(t))$.

Приведенный пример 1.3 показывает также, что в теореме 1.4 для выполнения равенства (1.10) существенно, что функция $\widehat{u}(\cdot)$ является решением задачи (1.9), определенной на $S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$. Вместе с тем отметим (см. доказательство теоремы 1.4), что если $\operatorname{Mod}(g) \subset \operatorname{Mod}(\Delta)$, то функция $\widehat{v}(\cdot) \in \mathbb{U}(\Delta)$ будет решением задачи (1.12) в том и только том случае, если при п. в. $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство (1.10).

О п р е д е л е н и е 1.2. Задача[2]

$$\mathfrak{T}(\mu(\cdot)) \doteq M\{\langle \mu(t), g(t,u)\rangle\} \to \sup,\ \mu(\cdot) \in APM_1, \tag{1.13}$$

называется овыпукленной для задачи (1.10), и функция $\widehat{\mu}(\cdot)$, принадлежащая APM_1, называется решением задачи (1.13), если $\mathfrak{T}(\mu(\cdot)) \leqslant \mathfrak{T}(\widehat{\mu}(\cdot))$ для всех $\mu(\cdot) \in APM_1$.

[2]Здесь см.следствие 2.3 в [1].

Т е о р е м а 1.5. *Имеют место следующие утверждения:*

1) *функция* $\widehat{\mu}(\cdot) \in APM_1$ *является решением задачи* (1.13) *в том и только том случае, если для п. в.* $t \in \mathbb{R}$

$$\max_{u \in \mathfrak{U}} g(t,u) = \langle \widehat{\mu}(t), g(t,u) \rangle; \qquad (1.14)$$

2) *решение* $\widehat{\mu}(\cdot) \in APM_1$ *задачи* (1.13) *существует, если и только если существует решение* $\widehat{u}(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ *задачи* (1.9) *и при этом* $I(\widehat{u}(\cdot)) = \mathfrak{T}(\widehat{\mu}(\cdot))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для $\widehat{\mu}(\cdot) \in APM_1$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство (1.14). Тогда из равенства функций максимумов $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$, определенных равенствами (1.1) и (1.4), соответственно, вытекает, что $\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (1.13).

Пусть теперь $\widehat{\mu}(\cdot) \in APM_1$ — решение задачи (1.13). Тогда в силу теоремы 1.2 при каждом $j \in \mathbb{N}$ найдется такая функция $u_j \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$, что $g(t, u_j(t)) > \varphi(t) - \frac{1}{j}$ для п. в. $t \in \mathbb{R}$. Далее, в силу леммы 2.1 из [1] $\delta_{u_j(\cdot)} \in APM_1^{(1)} \subset APM_1$ и, т. к. для всех $t \in \mathbb{R}$ $\varphi(t) = \psi(t)$, то из неравенств

$$M\{\varphi(t)\} \geqslant M\{\langle \widehat{\mu}(t), g(t,u) \rangle\} \geqslant M\{\langle \delta_{u_j(t)}, g(t,u) \rangle\} > M\{\varphi(t)\} - \frac{1}{j}$$

получаем, что $M\{f(t)\} = 0$, где $f(t) \doteq \varphi(t) - \langle \hat{\mu}(t), g(t,u) \rangle$, $t \in \mathbb{R}$. Поскольку $f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, то из леммы 1.3 вытекает, что при п. в. $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство (1.14). Тем самым, первое утверждение теоремы 1.5 доказано.

Второе утверждение этой теоремы является практически очевидным следствием доказанного первого утверждения, а также теорем 1.2 и 1.4. В самом деле, пусть $\widehat{\mu}(\cdot) \in APM_1$ является решением задачи (1.13). Тогда, в силу первого утверждения данной теоремы, $\widehat{\mu}(\cdot)$ — сечение отображения $\mathfrak{F}(\cdot)$ (см. (1.5)). Откуда по теореме 1.2 отображение $F(\cdot)$ (см. (1.2)) имеет сечение $\widehat{u}(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$, являющееся решением задачи (1.9). При этом по теореме 1.4 будет выполняться равенство (1.10), из которого совместно с (1.10) получаем равенство $I(\widehat{u}(\cdot)) = \mathfrak{T}(\widehat{\mu}(\cdot))$. Аналогично показываем, что из существования решения задачи (1.9) вытекает существование решения задачи (1.13).

З а м е ч а н и е 1.3. Отметим, что овыпукленной задачей для задачи (1.12) будет следующая задача (здесь см. обозначение (4.1) в [1])

$$\mathfrak{T}(\mu(\cdot)) = M\{\langle \mu(t), g(t,u)\rangle\} \to \sup,\ \mu(\cdot) \in \mathfrak{M}(\Delta), \tag{1.15}$$

в которой функция $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathfrak{M}(\Delta)$ называется решением, если $\mathfrak{T}(\mu(\cdot)) \leqslant \mathfrak{T}(\widehat{\mu}(\cdot))$ для всех $\mu(\cdot) \in \mathfrak{M}(\Delta)$. В силу теоремы 3.1 из [1] имеет место равенство

$$\sup\{I(u(\cdot)),\ u(\cdot) \in \mathbb{U}(\Delta)\} = \sup\{\mathfrak{T}(\mu(\cdot)),\ \mu(\cdot) \in \mathfrak{M}(\Delta)\}.$$

Далее, обозначим через $B(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ множество таких функций $g \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, что при каждом $\mathfrak{U} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ g принадлежит $B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ и через $S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ обозначим совокупность ограниченных на $\mathbb{R}$ функций, принадлежащих $S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$.

Пусть, далее, $g \in B(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ и $u \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. Поскольку $\overline{\mathrm{orb}}(u) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, а $g \in B(\mathbb{R}\times\overline{\mathrm{orb}}(u), \mathbb{R})$, то [1] отображение $t \mapsto g(t, u(t))$ принадлежит пространству $S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и, значит, для него существует среднее.

Рассмотрим сейчас задачу

$$I(u(\cdot)) = M\{g(t, u(t))\} \to \sup,\ u(\cdot) \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m). \tag{1.16}$$

О п р е д е л е н и е 1.3. Функция $\widehat{u}(\cdot) \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ называется локальным решением задачи (1.16), если существует такое ограниченное открытое множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, содержащее $\overline{\mathrm{orb}}(\widehat{u})$, что $\widehat{u}(\cdot)$ является решением задачи (1.9) при $\mathfrak{U} = \overline{\mathcal{U}}$.

Из данного определения 1.3 и теоремы 1.4 вытекает

С л е д с т в и е 1.4. *Пусть функция* $\widehat{u}(\cdot) \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ *является локальным решением задачи* (1.16). *Тогда, если отображение* $g \in B(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ *дифференцируемо по* u *в каждой точке* $(t, u) \in \mathbb{R}\times\mathcal{U}$, *то* $g_u'(t, \widehat{u}(t)) = 0$ *для п. в.* $t \in \mathbb{R}$.

Далее, овыпуклим задачу (1.16). С этой целью обозначим через $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathbb{R}^m))$ совокупность таких $\mu : \mathbb{R} \to \mathrm{frm}(\mathbb{R}^m)$, для каждого из которых существует такое компактное множество $\mathfrak{U}_\mu \subset \mathbb{R}^m$, что $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}_\mu))$ (см. п.1 второго раздела работы [1]). Аналогичным образом определим и подмножество $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathbb{R}^m))$ из $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathbb{R}^m))$. Через $APM(\mathbb{R}^m)$ обозначим совокупность таких $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathbb{R}^m))$, что (см. определение 2.1 в [1]) $\mu \in APM(\mathfrak{U}_\mu)$ и пусть

$$APM_1(\mathbb{R}^m) \doteq \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathbb{R}^m)) \cap APM(\mathbb{R}^m).$$

Отметим, что $\mu \in APM(\mathbb{R}^m)$ в том и только в том случае, если для любой функции $c \in C(\mathfrak{U}_\mu, \mathbb{R})$ отображение $t \mapsto \langle \mu(t), c(u) \rangle$ принадлежит $S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и имеет место аналогичное лемме 2.2 из [1] утверждение: для того, чтобы $u(\cdot) \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, необходимо и достаточно, чтобы отображение $t \mapsto \delta_{u(t)}$ принадлежало множеству $APM_1(\mathbb{R}^m)$.

Совокупность отображений $t \mapsto \delta_{u(t)}$, отвечающих функциям $u(\cdot) \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, обозначим через $APM_1^{(1)}(\mathbb{R}^m)$.

Таким образом, следующую задачу

$$\mathfrak{T}(\mu(\cdot)) = M\{\langle \mu(t), g(t,u) \rangle\} \to \sup, \ APM_1(\mathbb{R}^m) \qquad (1.17)$$

естественно назвать овыпукленной для задачи (1.16).

О п р е д е л е н и е 1.4. Функция $\widehat{\mu} \in APM_1(\mathbb{R}^m)$ называется локальным решением задачи (1.17), если существует такое ограниченное открытое множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, что $\mathfrak{U}_{\widehat{\mu}} \subset \mathcal{U}$ и является решением задачи (1.13) при $\mathfrak{U} = \overline{\mathcal{U}}$.

Л е м м а 1.4. *Пусть функция* $\widehat{\mu} \in APM_1(\mathbb{R}^m)$ *является локальным решением задачи* (1.17) *и* $g_u^{'} \in C(\mathbb{R} \times \mathcal{U}, \mathbb{R}^{m*})$. *Тогда* $\langle \widehat{\mu}(t), g_u^{'}(t,u) \rangle = 0$ *для п. в.* $t \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\widehat{\mu} \in APM_1(\mathfrak{U})$, где $\mathfrak{U} = \overline{\mathcal{U}}$, то [4] существует такое счетное множество функций

$u_j(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$, $j \in \mathbb{N}$, что

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} u_j(t)} = \operatorname{supp} \widehat{\mu}(\mathrm{t}) \tag{1.18}$$

для п. в. $t \in \mathbb{R}$. При этом (см. теорему 1.5 и доказательство теоремы 1.3) каждая из функций $u_j(\cdot)$ будет решением задачи (1.9) при $\mathfrak{U} = \overline{\mathcal{U}}$, и т.к. $u_j(t) \in \operatorname{supp} \widehat{\mu}(\mathrm{t}) \subset \mathcal{U}$, то по следствию 1.4 $g_u'(t, u_j(t)) = 0$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$, например, всех $t \in T_j$. Теперь из условия $g_u'(t, \cdot) \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}^{m*})$ и равенства (1.18) получаем, что при каждом t из множества $T = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} T_j$ $(\operatorname{mes}(\mathbb{R} \setminus T) = 0)$ для всякого $u \in \operatorname{supp} \widehat{\mu}(\mathrm{t})$ $g_u'(t, u) = 0$.

В заключение раздела докажем еще одно свойство функции максимума, важное при исследовании свойств функции Понтрягина в задаче п. п. оптимизации.

Л е м м а 1.5. *Пусть функция* $g \in B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$ *такая, что при каждом* $u \in \mathfrak{U}$ *отображение* $t \mapsto g(t, u)$ *абсолютно непрерывно,* $g_t' \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$ *и*

$$\mathfrak{g} \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} (\max_{u \in \mathfrak{U}} |g_t'(t, u)|) < \infty.$$

Пусть далее функция φ *определена равенством* (1.1) *и существует такое* $\tilde{\mu}(\cdot) \in APM_1$, *что при всех* $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = \langle \tilde{\mu}(t), g(t, u) \rangle. \tag{1.19}$$

Тогда функция $\varphi(\cdot)$ *абсолютно непрерывна,* $\dot{\varphi}(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *и при п. в.* $t \in \mathbb{R}$

$$\dot{\varphi}(t) = \langle \tilde{\mu}(t), g_t'(t, u) \rangle. \tag{1.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (1.19) и отмеченного в п. 1 равенства $\varphi(t) = \psi(t) \doteq \max\limits_{\nu \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})} \langle \nu, g(t, u) \rangle$, $t \in \mathbb{R}$ вытекает, что при всех $t, h \in \mathbb{R}$

$$\langle \tilde{\mu}(t), g(t+h, u) - g(t, u) \rangle \leqslant \varphi(t+h) - \varphi(t) \leqslant \langle \tilde{\mu}(t+h), g(t+h, u) - g(t, u) \rangle$$

или, в силу абсолютной непрерывности функции $g(\cdot, u)$, $u \in \mathfrak{U}$

$$\langle\tilde{\mu}(t), \int\limits_t^{t+h} g'_t(s,u)ds\rangle \leqslant \varphi(t+h)-\varphi(t) \leqslant \langle\tilde{\mu}(t+h), \int\limits_t^{t+h} g'_t(s,u)ds\rangle. \quad (1.21)$$

Откуда получаем, что $|\varphi(t+h)-\varphi(t)| \leqslant \mathfrak{g}\cdot|h|$, $t,h \in \mathbb{R}$ и, стало быть, п. п. по Бору функция $\varphi(\cdot)$ является абсолютно непрерывной.

Покажем, что при п. в. $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\max_{u\in\mathfrak{U}}|g'_t(s,u)-g'_t(t,u)|ds = 0. \quad (1.22)$$

Поскольку $g'_t \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$, то (см. в [1] лемму 1.3) найдется такая последовательность $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{j\to\infty}\gamma_j = 0$, что при всех $t \in \mathbb{R}$, за исключением, может быть, множества $\mathcal{N}_1$ нулевой меры $\lim\limits_{j\to\infty} I_t(\gamma_j) = 0$, где $I_t(\gamma_j) \doteq \omega_{\gamma_j}[g'_t(t,\cdot),\mathfrak{U}] = 0$ и при каждом $j \in \mathbb{N}$ при всех $t \in \mathbb{R}$, за исключением, может быть, множества $\mathcal{N}_2$ также нулевой меры

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}|\omega_{\gamma_j}[g'_s(s,\cdot),\mathfrak{U}]-\omega_{\gamma_j}[g'_t(t,\cdot),\mathfrak{U}]|ds = 0. \quad (1.23)$$

Кроме того, если $\mathfrak{U}_\infty \doteq \{\mathfrak{u}_1,\mathfrak{u}_1,\dots\}$ — счетное всюду плотное подмножество множества $\mathfrak{U} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, то при всех $t \in \mathbb{R}$, за исключением, может быть, множества $\mathcal{N}_3$ нулевой меры и всяком $\mathfrak{u}_l \in \mathfrak{U}_\infty$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}|g'_t(s,\mathfrak{u}_l)-g'_t(t,\mathfrak{u}_l)|ds = 0$. Фиксируем теперь произвольное $t \in \mathbb{R}\setminus(\mathcal{N}_1\cup\mathcal{N}_2\cup\mathcal{N}_3)$. Тогда в силу вышесказанного для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $j(\varepsilon)$, что будет выполнено неравенство $I_t(\gamma_{j(\varepsilon)}) < \varepsilon/6$. Для этого $\gamma_{j(\varepsilon)}$ (см. (1.23)) выберем такое $\delta > 0$, что при всех $h \in (-\delta,\delta)$

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h}|\omega_{\gamma_j}[g'_s(s,\cdot),\mathfrak{U}]-\omega_{\gamma_j}[g'_t(t,\cdot),\mathfrak{U}]|ds < \varepsilon/3.$$

Наконец, рассмотрим точки $u_l \dots u_p \in \mathfrak{U}_\infty$, образующие $\gamma_{j(\varepsilon)}$ - сеть для $\mathfrak{U}$, и для константы $\varepsilon/3p$ подберем $\widehat{\delta} \in (0,\delta)$ так, чтобы при $h \in (-\widehat{\delta}, \widehat{\delta})$ имели место неравенства

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} |g'_t(s,u_l) - g'_t(t,u_l)|ds < \varepsilon/3p, \; l = 1\dots p.$$

Зафиксируем сейчас измеримое отображение $u: [t, t+1] \to \mathfrak{U}$, такое, что $\max\limits_{u\in\mathfrak{U}} |g'_t(s,u) - g'_t(t,u)| = |g'_t(s,u(s)) - g'_t(t,u(s))|$ при п. в. $s \in [t,t+1]$, и рассмотрим дизъюнктную систему множеств $T_l(t) \doteq \{s \in [t,t+1]\colon |u(s) - u_l| < \gamma_{j(\varepsilon)}\}$, $l = 1\dots p$, образующую покрытие $[t, t+1]$. Полагая $T_l(t,h) \doteq [t,t+h] \cap T_l(t)$, $l = 1\dots p$ имеем при всех $h \in (-\widehat{\delta}, \widehat{\delta})$, принимая во-внимание выбор $\widehat{\delta}$, следующие соотношения

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \max_{u\in\mathfrak{U}} |g'_t(s,u) - g'_t(t,u)|ds =$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{l=1}^{p}\int_{T_l(t,h)} |g'_t(s,u(s)) - g'_t(t,u(s))|ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\sum_{l=1}^{p}\int_{T_l(t,h)} (|g'_t(s,u(s)) - g'_t(s,u_l)| + |g'_t(s,u_l) - g'_t(s,u_l)| +$$

$$+ |g'_t(s,u_l) - g'_t(t,u(s))|)ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \omega_{\gamma_j}[g'_s(s,\cdot),\mathfrak{U}]ds + \sum_{l=1}^{p}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} |g'_t(s,u_l) - g'_t(t,u_l)|ds +$$

$$+ I(\gamma_{j(\varepsilon)}) < \varepsilon/3 + 2I(\gamma_{j(\varepsilon)}) + p\cdot\varepsilon/3p = \varepsilon.$$

Тем самым равенство (1.22) доказано. Из него, в свою очередь, получаем, что левая из оценок (1.21) обеспечивает при п. в. $t \in \mathbb{R}$ неравенство $\dot\varphi(t) \geqslant \langle\tilde\mu(t), g'_t(t,u)\rangle$. Теперь поскольку отображение $t \mapsto \tilde\mu(t) \in (\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}), \rho_w)$ измеримо, то п. в. точка t, принадлежащая $\mathbb{R}$, будет его точкой аппроксимативной непрерывности, и значит, для всякой такой точки t и отвечающего ей измеримого множества E (здесь см. в [1] оценки, указанные при доказательстве леммы 2.1) будет выполнено равенство

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ t+h\in E}} \langle \tilde{\mu}(t+h) - \tilde{\mu}(t), g(t,u)\rangle = 0.$$

Учитывая которое, а также равенство (1.22), из правой оценки в (1.21) получаем, что $\dot{\varphi}(t) \leqslant \langle \tilde{\mu}(t), g'_t(t,u)\rangle$. Тем самым доказано, что при п. в. $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство (1.20), из которого, в свою очередь, в силу следствия 2.3 работы [1] вытекает, что функция $\dot{\varphi}(\cdot) \in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2. Ляпуновские задачи в п. п. случае

1. Обозначим через $S(\mathbb{R}, C(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}))$, $\mathfrak{U} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ совокупность таких функций $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^k\times\mathfrak{U} \to \mathbb{R}$, что при каждом $V \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$ $f \in S(\mathbb{R}, C(V\times\mathfrak{U},\mathbb{R}))$ (см. первый раздел работы [1]) и пусть функции $f_{\mathfrak{l}} \in S(\mathbb{R}, C(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{U},\mathbb{R}))$, $\mathfrak{l} = 0\ldots\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$. В силу леммы 5.2 и следствия 2.3 из [1] при каждом $\mathfrak{l} = 0\ldots\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$, на $B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)\times S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ корректно определен функционал

$$(v(\cdot),u(\cdot)) \mapsto I_{\mathfrak{l}}(v(\cdot),u(\cdot)) \doteq M\{f_{\mathfrak{l}}(t,v(t),u(t))\}, \tag{2.1}$$

а на $B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)\times APM_1$ — функционал

$$(v(\cdot),\mu(\cdot)) \mapsto \mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(v(\cdot),\mu(\cdot)) \doteq M\{\langle \mu(t), f_{\mathfrak{l}}(t,v(t),u)\rangle\}. \tag{2.2}$$

В дальнейшем $\mathfrak{S} \subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ и

$$\begin{cases} D \doteq \Big\{(v(\cdot),u(\cdot)) \in \mathfrak{S}\times S(\mathbb{R},\mathfrak{U})\colon\ I_{\mathfrak{l}}(v(\cdot),u(\cdot)) \leqslant 0 \\ \ \text{при } \mathfrak{l} = 1\ldots\mathfrak{k} \text{ и } I_{\mathfrak{l}}(v(\cdot),u(\cdot)) = 0,\ \mathfrak{l} = \mathfrak{k}+1\ldots\mathfrak{k}+\mathfrak{m}\Big\}, \\ \mathfrak{D} \doteq \Big\{(v(\cdot),\mu(\cdot)) \in \mathfrak{S}\times APM_1 : \mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(v(\cdot),\mu(\cdot)) \leqslant 0, \\ \ \text{при } \mathfrak{l} = 1\ldots\mathfrak{k} \text{ и } \mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(v(\cdot),u(\cdot)) = 0,\ \mathfrak{l} = \mathfrak{k}+1\ldots\mathfrak{k}+\mathfrak{m}\Big\}. \end{cases} \tag{2.3}$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Задача

$$I_0(v(\cdot), u(\cdot)) \to \inf, \ (v(\cdot), u(\cdot) \in D \tag{2.4}$$

называется п. п. ляпуновской задачей и пара $(\widehat{v}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \in D$ называется ее решением, если $I_0(\widehat{v}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \leqslant I_0(v(\cdot), u(\cdot))$ для всех пар $(v(\cdot), u(\cdot)) \in D$.

З а м е ч а н и е 2.1. В дальнейшем первую компоненту в паре $w(\cdot) = (v(\cdot), u(\cdot))$ называем параметром и подчеркнем, что в задаче (2.4) множество (параметров) $\mathfrak{S}$ — некоторое подмножество из $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ с заданным свойством.

П р и м е р 2.1. Пусть $f \in S(\mathbb{R}, C(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$, функции $a_{\mathfrak{l}} \in S(\mathbb{R}, C(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n*}))$, $f_{\mathfrak{l}} \in S(\mathbb{R}, C(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}))$, $\mathfrak{l} = 0 \ldots \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ и отображение $A \in S(\mathbb{R}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$ такое, что система

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \tag{2.5}$$

допускает экспоненциальную дихотомию (см., например [8]). В этом случае для любой функции $b \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ неоднородная система $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ имеет единственное п. п. по Бору решение. Далее, при каждом $\mathfrak{l} = 0 \ldots \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ на $\mathfrak{S} \times S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ рассмотрим функционал

$$J_{\mathfrak{l}}(v(\cdot), u(\cdot)) \doteq M\{a_{\mathfrak{l}}(t, v(t))x(t) + f_{\mathfrak{l}}(t, v(t), u(t))\}, \tag{2.6}$$

где $x(t) = x(t; v(\cdot), u(\cdot))$ — единственное п. п. по Бору решение п. п. по Степанову системы $\dot{x} = A(t)x + f(t, v(t), u(t)$, отвечающее паре $(v(\cdot), u(\cdot)) \in \mathfrak{S} \times S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$. Далее, на множестве $\mathbb{D}$, состоящем из таких пар $(v(\cdot), u(\cdot)) \in \mathfrak{S} \times S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$, что $J_{\mathfrak{l}}(v(\cdot), u(\cdot)) \leqslant 0$, при $\mathfrak{l} = 1 \ldots \mathfrak{k}$ и $J_{\mathfrak{l}}(v(\cdot), u(\cdot)) = 0$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{k}+1 \ldots \mathfrak{k}+\mathfrak{m}$, рассмотрим задачу (см. (2.6))

$$J_0(v(\cdot), u(\cdot)) \to \inf, \quad (v(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{D}, \tag{2.7}$$

которую будем называть задачей оптимального управления п. п. движениями линейной по фазовой переменной, параметризованной множеством $\mathfrak{S} \subset B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ и пару $(\widehat{v}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \in \mathbb{D}$ называем решением этой задачи, если $J_0(\widehat{v}(\cdot),\widehat{u}(\cdot)) \leqslant J_0(v(\cdot),u(\cdot))$ для всех $(v(\cdot),u(\cdot))$, принадлежащих $\mathbb{D}$.

Покажем, что задача (2.7) может быть редуцирована к задаче вида (2.4).

В самом деле, пусть $p_{\mathfrak{l}}(\cdot) \in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n*})$, $\mathfrak{l} = 0\ldots\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ — это решение системы $\dot{p} = -pA(t) + a_{\mathfrak{l}}(t,v(t))$. Тогда для каждого решения $x(\cdot)$ системы $\dot{x} = A(t)x + f(t,v(t),u(t)$ имеет место равенство $\frac{d}{dt}(p_{\mathfrak{l}}(t)x(t)) = a_{\mathfrak{l}}(t,v(t))x(t) + p_{\mathfrak{l}}(t)f(t,v(t),u(t))$. Далее, т. к. $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|p_{\mathfrak{l}}(t)|$, $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|x(t)| < \infty$, то $M\{\dfrac{d}{dt}(p_{\mathfrak{l}}(t)x(t))\} = 0$. Следовательно, $M\{a_{\mathfrak{l}}(t,v(t))x(t)\} = -M\{p_{\mathfrak{l}}(t)f(t,v(t)),u(t)\}$, а значит, при любых $(v(\cdot),u(\cdot)) \in \mathfrak{S}\times S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ $J_{\mathfrak{l}}(v(\cdot),u(\cdot)) = I_{\mathfrak{l}}(v(\cdot),u(\cdot))$, где

$$I_{\mathfrak{l}}(v(\cdot),u(\cdot)) \doteq M\{-p_{\mathfrak{l}}(t)f(t,v(t),u(t)) + f_{\mathfrak{l}}(t,v(t),u(t))\}. \tag{2.8}$$

Таким образом, задача (2.7) сводится к задаче (2.4) с функционалами $I_{\mathfrak{l}}$, определенными равенствами (2.8).

О п р е д е л е н и е 2.2. Задача

$$\mathfrak{T}_0(v(\cdot),\mu(\cdot)) \to \inf,\ (v(\cdot),\mu(\cdot) \in \mathfrak{D} \tag{2.9}$$

называется овыпукленной ляпуновской п. п. задачей (или расширением задачи (2.4)), для которой пара $(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{D}$ называется решением, если $\mathfrak{T}_0(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \leqslant \mathfrak{T}_0(v(\cdot),\mu(\cdot))$ для всех пар $(v(\cdot),\mu(\cdot))$, принадлежащих множеству $\mathfrak{D}$.

З а м е ч а н и е 2.2. Целесообразность рассмотрения задачи (2.9) обусловлена тем, что задача (2.4) может не иметь решения, тогда как отвечающая ей задача (2.9) имеет решение (ср. с утв. теоремы 1.5).

П р и м е р 2.2. Пусть $\mathfrak{U} \doteq \{u = (u_1,u_2)\colon |u_1|,|u_2| \leqslant 1\}$ и множество $D \doteq \{u(\cdot) \in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})\colon I_1(u(\cdot)) = M\{u_1(t)+u_2(t)\} = 0\}$. Рассмотрим задачу

$$I_0(u(\cdot)) = M\{u_1(t)u_2(t)f(t)\} \to \inf,\ u(\cdot) \in D,$$

в которой знакопеременная функция $f \in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ такая, что $\operatorname{sign} f \in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $M\{\operatorname{sign} f(t)\} \neq 1$. Легко видеть, что для всех $u(\cdot) \in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ $\quad I_0(u(\cdot)) \geqslant -M\{|f(t)|\}$ и равенство достигается на функции $\widehat{u}(t) = (-1, \operatorname{sign} f(t))$, или $\widehat{v}(t) = -\widehat{u}(t)$, которые, в силу наложенных ограничений на f, не принадлежат D. Покажем, что $I_0(u(\cdot)) > -M\{|f(t)|\}$ для всякой функции $u(\cdot) \in D$. Допустим, что существует такое $u(\cdot) \in D$, что $I_0(u(\cdot)) = -M\{|f(t)|\}$. Тогда при п. в. $t \in \mathbb{R}$ необходимо $u_1(t)u_2(t) = -\operatorname{sign} f(t)$. Из этого равенства вытекает, что для п. в. $t \in \mathbb{R}$ $\ u_1(t) = -\operatorname{sign} f(t) u_2(t)$ и $u_2(t) = -\operatorname{sign} f(t) u_1(t)$. Стало быть $u_1(t) + u_2(t) = -\operatorname{sign} f(t)(u_1(t) + u_2(t))$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$. Из последнего равенства получаем, что п. п. по Степанову функция $t \mapsto (u_1(t) + u_2(t))$ неотрицательна. Поскольку $M\{u_1(t) + u_2(t)\} = 0$, то по лемме 1.3 $u_1(t) = -u_2(t)$ для п. в. $t \in \mathbb{R}$. Откуда, учитывая, что $u_2^2(t) = 1$, имеем

$$I_0(u(\cdot)) = -M\{u_2^2(t)f(t)\} = -M\{f(t)\} > -M\{|f(t)|\}.$$

Полученное противоречие показывает, что рассматриваемая задача решения не имеет. С другой стороны, овыпукленной задачей для исходной будет следующая задача:

$$\mathfrak{I}_0(\mu(\cdot)) = M\{\langle \mu(t), u_1 u_2 f(t) \rangle\} \to \inf, \ \mu(\cdot) \in \mathfrak{D},$$

где $\mathfrak{D} \doteq \{\mu(\cdot) \in APM_1(\mathfrak{U}) : \ \mathfrak{I}_1(\mu(\cdot)) = M\{\langle \mu(t), u_1 + u_2 \rangle\} = 0\}$. Легко видеть, что отображение $t \mapsto \widehat{\mu}(t) = \frac{1}{2}(\delta_{\widehat{u}(t)} + \delta_{\widehat{v}(t)})$ принадлежит $\mathfrak{D}$ и т. к. $\mathfrak{I}_0(\widehat{\mu}(\cdot)) = -M\{|f(t)|\} = \inf\{\mathfrak{I}_0(\mu(\cdot)), \ \mu(\cdot) \in \mathfrak{D}\}$, то оно является решением овыпукленной задачи.

В связи со сказанным сделаем

З а м е ч а н и е 2.3. Если пара $(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{D}$, где $\widehat{\mu}(\cdot) \in APM_1 \setminus APM_1^{(1)}$, является решением задачи (2.9), то из теоремы 3.1 в [1] получаем, что существует такая последовательность функций $\{u_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty} \subset S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$, что для всех $\mathfrak{l} = 0 \ldots \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ выполнено равенство $\lim\limits_{j\to\infty} I_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot), u_j(\cdot)) = \mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$, т. е. расширение задачи (2.4) до задачи (2.9) корректно.

О п р е д е л е н и е 2.3. Пара $(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{D}$ называется решением задачи (2.9) в ослабленном смысле, если не существует такой пары $(v(\cdot),u(\cdot))\in D$, при которой справедливо неравенство $I_0(v(\cdot),u(\cdot))<\mathfrak{T}_0(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$.

Отметим, что всякое решение задачи (2.9) является ее решением в ослабленном смысле и для задачи (2.4) оба этих понятия совпадают.

Всюду далее предполагаем, что отображения

$$(t,v,u)\mapsto f_{\mathfrak{l}}(t,v,u)\in\mathbb{R},\ \mathfrak{l}=0\ldots\mathfrak{k}+\mathfrak{m},$$

удовлетворяют условию: 1) в каждой точке $(t,v,u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k\times\mathfrak{U}$ существует производная по v и для всякого $V\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^k)$ $f'_{\mathfrak{l}v}\in S(\mathbb{R},C(V\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^{n*}))$. Через $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ обозначаем в банаховом пространстве $(B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k),\|\cdot\|_C)$, $(\|\cdot\|_C\doteq\|\cdot\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)})$ касательный конус Кларка к множеству $\mathfrak{S}\subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ в точке $\widehat{v}(\cdot)\in\mathfrak{S}$. В соответствии с определением [9], в нашем случае $h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ в том и только в том случае, если для любой последовательности функций $\{v_p(\cdot)\}_{p=1}^{\infty}\subset\mathfrak{S}$, $\lim\limits_{p\to\infty}\|v_p(\cdot)-\widehat{v}(\cdot)\|_C=0$ и всякой числовой последовательности $\{\lambda_p\}_{p=1}^{\infty}\subset(0,\infty)$, $\lim\limits_{p\to\infty}\lambda_p=0$ отвечает последовательность $\{h_p(\cdot)\}_{p=1}^{\infty}\subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ такая, что $\lim\limits_{p\to\infty}\|h_p(\cdot)-h(\cdot)\|_C=0$ и при всех $p\in\mathbb{N}$

$$w_p(\cdot)\doteq v_p(\cdot)+\lambda_p h_p(\cdot)\in\mathfrak{S}. \tag{2.10}$$

В следующей теореме

$$\mathcal{L}(t,v,u)\doteq\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}f_{\mathfrak{l}}(t,v,u),\ (t,v,u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathfrak{U}.$$

Т е о р е м а 2.1. *Пусть функции* $f_{\mathfrak{l}}\in B(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$, $\mathfrak{l}=0\ldots\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ *удовлетворяют условию* 1). *Тогда, если пара* $(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{D}$ *является решением задачи* (2.9) *в ослабленном* *смысле, то найдутся такие не равные нулю одновременно числа* $\widehat{\lambda}_0 \geqslant 0, \ \widehat{\lambda}_1 \dots \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *что*

1) *имеет место равенство*

$$\inf_{\mu(\cdot)\in APM_1} M\{\langle \mu(t), \mathcal{L}(t, \widehat{v}(t), u)\rangle\} = M\{\langle \widehat{\mu}(t), \mathcal{L}(t, \widehat{v}(t), u)\rangle\}; \quad (2.11)$$

2) $\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \geqslant 0, \ \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}\mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = 0$ *при каждом* $\mathfrak{l} = 1 \dots \mathfrak{k}$;

3) *для каждого* $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$

$$M\{\langle \widehat{\mu}(t), \mathcal{L}'_v(t, \widehat{v}(t), u)\rangle h(t)\} \geqslant 0. \quad (2.12)$$

Из определения 2.3 и теоремы 2.1 вытекает

С л е д с т в и е 2.1. *Пусть функции* $f_{\mathfrak{l}}, \ \mathfrak{l} = 0 \dots \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ *из пространства* $B(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$ *удовлетворяют условию* 1). *Тогда, если* $(\widehat{v}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \in D$ *— решение задачи* (2.4), *то найдутся такие не равные нулю одновременно числа* $\widehat{\lambda}_0 \geqslant 0, \ \widehat{\lambda}_1 \dots \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *что при* $\widehat{\mu}(t) = \delta_{\widehat{u}(t)}$ *будут выполнены условия* 1)–3) *теоремы* 2.1.

Доказательство теоремы 2.1 приведем в третьем пункте раздела. В следующем пункте определим конус вариаций для заданной пары $(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{S} \times APM_1$.

2. Полагаем

$$\begin{cases} \widehat{f}_{\mathfrak{l}}(t, u) \doteq f_{\mathfrak{l}}(t, \widehat{v}(t), u), \quad \widehat{f}_{\mathfrak{l},m}(t, u) \doteq \widehat{f}_{\mathfrak{l}}(t + ma, u) \\ \Delta f(t, \nu) \doteq \langle \nu - \widehat{\mu}(t), \widehat{f}_{\mathfrak{l}}(t, u)\rangle, \ \Delta f(t, \nu) \doteq \Delta f_{\mathfrak{l}}(t + ma, \nu) \end{cases} \quad (2.13)$$

и $h(\cdot) \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$, поставим в соответствие множество

$$V \doteq \overline{\operatorname{orb}}(\widehat{v}) + O_{\varrho}[0], \quad \varrho \doteq \|h\|_C + 1. \quad (2.14)$$

Далее, т.к. $\widehat{f}_{\mathfrak{l}} \in B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}))$, то (см. в [1] лемму 4.2) для каждой п.п. последовательности $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \operatorname{rpm}(\mathfrak{U})$ существует $\lim\limits_{q\to\infty} \frac{1}{qa} \sum\limits_{m=0}^{q-1} \langle \nu(m), \widehat{f}_{\mathfrak{l},m}(\vartheta, u)\rangle, \ \vartheta \in [0, a]$. Кроме того, по следствию 2.2 в работе [1] отображение $t \mapsto \langle \widehat{\mu}(t), \widehat{f}_{\mathfrak{l}}(t, u)\rangle$ п.п. по Степанову. Теперь, используя теорему 1.5 указанной работы, получаем (см. (2.13)) следующее утверждение:

Л е м м а 2.1. *Существуют такие последовательности* $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$, $\lim\limits_{l\to\infty}q_l=\infty$ *и* $\{\eta_p\}_{p=1}^{\infty}\subset[0,a]$, $\lim\limits_{p\to\infty}\eta_p=0$, *а также измеримое множество* $\Xi\subset[0,a]$, $\operatorname{mes}\Xi=a$, *что при каждом* $\vartheta\in\Xi$ *для любой п. п. последовательности* $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset\operatorname{rpm}(\mathfrak{U})$ *существуют пределы*

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\Delta f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta,\nu(m)),\qquad \mathfrak{l}=0\ldots\mathfrak{k}+\mathfrak{m},$$

и

$$\lim_{p\to\infty}\Bigl(\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\eta_p}\int_0^{\eta_p}\sup_{\nu\in\operatorname{rpm}(\mathfrak{U})}|\Delta f_{\mathfrak{l},m}(t+\vartheta,\nu)-\\ -\Delta f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta,\nu)|\,dt\Bigr)=0.\qquad(2.15)$$

В дальнейшем, не оговаривая специально, при рассмотрении игольчатых вариаций для $\widehat{\mu}(\cdot)$ (см. четвертый раздел работы [1]) предполагаем, что в зафиксированном наборе $\vec{\vartheta}=(\vartheta_i)_{i=1}^N$ точки ϑ_i, $i=1\ldots N$ принадлежит множеству Ξ, указанному в лемме 2.1. Отметим, что в этом случае, для каждой иголки $\iota=\{(\vec{\beta}_{k_i},\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N\in\mathcal{V}$ и всяком $\mathfrak{l}=0\ldots\mathfrak{m}+\mathfrak{k}$ существуют пределы

$$\mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota)\doteq\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k_i}\beta_{ij}\Delta f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta_i,\nu_{ij}(m)),\qquad(2.16)$$

которые для каждого $\vec{\iota}\in\mathcal{V}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{k}}$ и $\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, в силу определения иголки $\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\in\mathcal{V}$ (см. (4.6)–(4.9) в [1]), удовлетворяют равенству

$$\mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})=\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}}\mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota_{\mathfrak{q}}).$$

Имеет место следующая

Л е м м а 2.2. *Пусть* $\vec{\iota}\in\mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ *такое, что* $\beta(\vec{\iota})>0$ *и* $\varepsilon_p \doteq \eta_p/(\rho\beta(\vec{\iota}))$, $p\in\mathbb{N}$, *где* $\{\eta_p\}_{p=1}^{\infty}$ *— последовательность, указанная в лемме* 2.1 *Тогда, если* $\mu(\cdot;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})]$ *— игольчатая вариация, отвечающая* $\widehat{\mu}(\cdot)$ (*см.* (4.18) *в* [1]), *то при каждом* $\mathfrak{l}=0\ldots\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$

$$\lim_{p\to\infty}(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}|\frac{1}{\varepsilon_p}(\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot),\mu(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}))-\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)))-\mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})|)=0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (4.9) в [1], определения функционала $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}$ (см. (2.2)), учитывая, что (здесь см. в [1] (4.13)) $\operatorname{mes}T_{m,i,j}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})=\varepsilon\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}}\beta_{ij}^{\mathfrak{q}}$ при $j=1\ldots k_i^{\mathfrak{q}}$, имеем следующие соотношения:

$$|\frac{1}{\varepsilon_p}M\{\langle\triangle\,\mu(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\widehat{f}_{\mathfrak{l}}(t,u)\rangle\}-\mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})|\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\sum_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}}\frac{1}{\varepsilon_p}\times$$

$$\times\int_{T_{0,i,j}(\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})}|\triangle\,f_{\mathfrak{l},m}(t+\vartheta_i,\nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m))-\triangle\,f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta_i,\nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m))|dt\leqslant$$

$$\leqslant\rho\beta(\vec{\iota})\sum_{i=1}^{N}\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\eta_p}\times$$

$$\times\int_0^{\eta_p}\sup_{\nu\in\operatorname{rpm}(\mathfrak{U})}|\triangle\,f_{\mathfrak{l},m}(t+\vartheta_i,\nu)-\triangle\,f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta_i,\nu)|dt.$$

Откуда в силу (7.15) вытекает нужное предельное равенство.

Нам понадобится также следующая

Л е м м а 2.3. *Для каждого* $h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ *найдется такая последовательность функций* $\{w_p(\cdot)\}_{p=1}^{\infty}$, *содержащаяся в* $\mathfrak{S}$, *что* $\lim\limits_{p\to\infty}\|w_p(\cdot)-\widehat{v}(\cdot)\|_C=0$ *и при всяком* $\mathfrak{l}=0\ldots\mathfrak{m}+\mathfrak{k}$ *равномерно по* $\mu(\cdot)\in APM_1$

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{\varepsilon_p}\left(\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(w_p(\cdot),\mu(\cdot))-\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot),\mu(\cdot))\right)=\mathfrak{v}_{\mathfrak{l}}(\mu(\cdot),h(\cdot)),$$

где
$$\mathfrak{v}_{\mathfrak{l}}(\mu(\cdot),h(\cdot)) \doteq M\{\langle\mu(t),f'_{\mathfrak{l}v}(t,\widehat{v}(t),u)\rangle h(t)\}$$
и $\{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty}$ *— последовательность, указанная в лемме* 2.2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\widehat{v}(\cdot)\in\mathfrak{S}$, то расстояние $\rho_{\mathfrak{S}}(\widehat{v}(\cdot))$ в $B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ от $\widehat{v}(\cdot)$ до $\mathfrak{S}$ равно нулю. Следовательно, для каждого $p\in\mathbb{N}$ найдется такая функция $v_p(\cdot)\in\mathfrak{S}$, что $\|\widehat{v}(\cdot)-v_p(\cdot)\|_C\leqslant\varepsilon_p^2$. Очевидно, что $\lim\limits_{p\to\infty}\|\widehat{v}(\cdot)-v_p(\cdot)\|_C=0$. Поэтому для каждого $h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ найдется такая последовательность $\{h_p(\cdot)\}_{p=1}^{\infty}\subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$, $\lim\limits_{p\to\infty}\|h_p(\cdot)-h(\cdot)\|_C=0$, что заданная равенством (2.10) при $\lambda_p=\varepsilon_p$, $p\in\mathbb{N}$ последовательность $\{w_p(\cdot)\}_{p=1}^{\infty}\subset\mathfrak{S}$. Покажем, что эта последовательность искомая. В самом деле, равенство $\lim\limits_{p\to\infty}\|w_p(\cdot)-\widehat{v}(\cdot)\|_C=0$ вытекает непосредственно из определения функций $w_p(\cdot)$. Стало быть, можно считать (см. (2.14)), что при каждом $p\in\mathbb{N}$ и всех $(\theta,t)\in[0,1]\times\mathbb{R}$ $w_p(t,\theta)\doteq(\widehat{v}(t)+\theta(w_p(t)-\widehat{v}(t))\in V$. Поэтому (см. ограничения на $f_{\mathfrak{l}}$) имеем следующие соотношения:

$$|\frac{1}{\varepsilon_p}M\{\langle\mu(t),f_{\mathfrak{l}}(t,w_p(t),u)-f_{\mathfrak{l}}(t,\widehat{v}(t),u)\rangle\}-\mathfrak{v}_{\mathfrak{l}}(\mu(\cdot),h(\cdot))|=$$
$$=|M\{\langle\mu(t),\int_0^1 f'_{\mathfrak{l}v}(t,w_p(t,\theta),u)\,d\theta\rangle\}(\frac{v_p(t)-\widehat{v}(t)}{\varepsilon_p}+h_p(t))\}-$$
$$-\mathfrak{v}_{\mathfrak{l}}(\mu(\cdot),h(\cdot))|\leqslant(\varepsilon_p+\|h_p(\cdot)-h(\cdot)\|_C)M\{\max_{(v,u)\in V\times\mathfrak{U}}|f'_{\mathfrak{l}v}(t,v,u)|\}+$$
$$+\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\omega_{\gamma(p)}[f'_{\mathfrak{l}v}(s,\cdot,\cdot),V\times\mathfrak{U}]\,ds\,\|h_p(\cdot)\|_C,$$

где $\omega_{\gamma(p)}[f'_{\mathfrak{l}v}(s,\cdot,\cdot),V\times\mathfrak{U}]$ это $\gamma(p)\doteq\|w_p(\cdot)-\widehat{v}(\cdot)\|_C$-колебание на $V\times\mathfrak{U}$ непрерывной функции $(v,u)\mapsto f'_{\mathfrak{l}v}(s,v,u)$. Из которых, учитывая, что $\lim\limits_{p\to\infty}\|h_p(\cdot)-h(\cdot)\|_C=0$ и $\lim\limits_{p\to\infty}\gamma(p)=0$, принимая во внимание обозначения (2.2) и лемму 1.3 из [1], получаем утверждение леммы 2.3.

С л е д с т в и е 2.2. *Пусть* $\{w_p(\cdot)\}_{p=1}^{\infty}$ *— последовательность функций из множества* $\mathfrak{S}$, *указанная в лемме* 2.3 , *отвечающая* $h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ *и* $\mu(\cdot;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})]$ *— игольчатая вариация, отвечающая* $\widehat{\mu}(\cdot)$. *Тогда при каждом* $\mathfrak{l}=0\ldots\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(w_p(\cdot),\mu(\cdot;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}))-\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot),\mu(\cdot;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})))\underset{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}{\rightrightarrows}\mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(h(\cdot))\ \text{при}\ \varepsilon\downarrow 0,$$

где

$$\mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(h(\cdot))\doteq M\{\langle\widehat{\mu}(t),f_{\mathfrak{lw}}(t,\widehat{v}(t),u)\rangle h(t)\},\quad \mathfrak{l}=0\ldots\mathfrak{k}+\mathfrak{m},\tag{2.17}$$

и $\{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty}$ *— последовательность, указанная в лемме* 2.2 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку при всех $p\in\mathbb{N}$, для которых $\varepsilon_p\in(0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})]$,

$$\begin{aligned}&|\frac{1}{\varepsilon_p}M\{\langle\mu(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),f_{\mathfrak{l}}(t,w_{\varepsilon_p}(t),u)-f_{\mathfrak{l}}(t,\widehat{v}(t),u)\rangle\}-\mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(h(\cdot))|\leqslant\\ &\leqslant\sup_{\mu(\cdot)\in APM_1}|\frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(w_{\varepsilon_p}(\cdot),\mu(\cdot))-\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot),\mu(\cdot)))-\mathfrak{v}_{\mathfrak{l}}(\mu(\cdot),h(\cdot))|+\\ &\qquad+\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}|M\{\langle\mu(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})-\widehat{\mu}(t),f'_{\mathfrak{lw}}(t,\widehat{v}(t),u)h(t)\rangle\}|,\end{aligned}$$

а отображение $(t,u)\mapsto f'_{\mathfrak{lw}}(t,\widehat{v}(t),u)h(t)$ (см. лемму 5.2 в [1]) принадлежит $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$, то утверждение следствия 2.2 вытекает из леммы 2.3 и следствия 4.1 , приведенных в [1].

Полагаем, далее (здесь см. (2.16) и (2.17))

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\vec{v},\iota,h(\cdot))\doteq\mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{v},\iota)+\mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(h(\cdot)),\quad \iota\in\mathcal{V},\ h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}.\tag{2.18}$$

Из леммы 2.2 и следствия 2.2 вытекает

Л е м м а 2.4. *Пусть* $\vec{\iota}\in\mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ *такое, что* $\beta(\vec{\iota})>0$ *и* $\varepsilon_p\doteq\eta_p/(\rho\beta(\vec{\iota}))$, $p\in\mathbb{N}$, *где* $\{\eta_p\}_{p=1}^{\infty}$ *— последовательность, указанная в лемме* 2.1. *Тогда, если* $\mu(\cdot;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})]$ *— игольчатая вариация, отвечающая* $\widehat{\mu}(\cdot)$ *(см. в* [1] *(4.18)), и*

$\{w_p(\cdot)\}_{p=1}^{\infty}$ — *совокупность функций из множества* $\mathfrak{S}$, *указанная в лемме* 2.3, *отвечающая* $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, *то при каждом* $\mathfrak{l} = 0 \ldots \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ *справедливо предельное соотношение*

$$|\frac{1}{\varepsilon_p}(\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(w_p(\cdot), \mu(\cdot;\varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota})) - \mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))) - \mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta}, \vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}, h(\cdot))| \underset{\mathfrak{y}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}{\rightrightarrows} 0$$

при $p \to \infty$.

З а м е ч а н и е 2.4. Утверждение леммы 2.4, в силу замечания 4.2 в [1], справедливо для всякого фиксированного набора $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^{N}$ точек $\vartheta_i \in \Xi$, $i = 1 \ldots N$, допускающих совпадение. Поэтому в дальнейшем при ссылке на лемму 2.4 предполагается, что в зафиксированном наборе $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^{N}$ точки $\vartheta_i \in \Xi$, $i = 1 \ldots N$ такие, что $0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant \ldots \leqslant \vartheta_N < a$.

3. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ множество (здесь см. (2.16)–(2.18), а также обозначение (4.3) в [1])

$$\mathcal{K}(\vec{\vartheta}) \doteq \Big\{(a_0(\vec{\vartheta},\varsigma) \ldots a_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\varsigma)),\ \varsigma \doteq (\iota, h(\cdot)) \in \mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}\Big\}, \quad (2.19)$$

а также проектор $P: \mathcal{K}(\vec{\vartheta}) \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, определенный для каждой точки $(a_0(\vec{\vartheta},\varsigma) \ldots a_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\varsigma))$ конуса $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$ равенством

$$P((a_0(\vec{\vartheta},\varsigma) \ldots a_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\varsigma)) \doteq (a_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\varsigma)) \ldots a_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\varsigma)), \quad (2.20)$$

и рассмотрим также выпуклый в $\mathbb{R}^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$

$$\mathcal{H} \doteq \{(x_0 \ldots x_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}) \colon x_0 \ldots x_{\mathfrak{k}} < 0,\ x_{\mathfrak{k}+1} = \ldots = x_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} = 0\}. \quad (2.21)$$

Так как $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ — выпуклый конус с вершиной в нуле, то, принимая во внимание (4.3)–(4.5) из [1], получаем, что $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$ — выпуклый конус в $\mathbb{R}^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, причем с вершиной в нуле, поскольку для каждой иголки вида

$$\iota_0 = \{(\vec{0}_{k_i}, \{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^{N} \in \mathcal{V}$$

точка $(a_0(\vec{\vartheta},\iota_0,0) \ldots a_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\iota_0,0))$ — нуль пространства $\mathbb{R}^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$.

Следующая теорема отражает основное свойство конуса $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$ при условии, что $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = 0$ при всех $\mathfrak{l} = 1 \ldots \mathfrak{k}$.

Т е о р е м а 2.2. *Если* $\mathcal{K}(\vec{\vartheta}) \cap \mathcal{H} \neq \varnothing$ *и* $P(\mathcal{K}(\vec{\vartheta})) = \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, *то найдется такой допустимый процесс* $(v(\cdot), u(\cdot)) \in D$ *задачи* (2.4) , *что* $I_0(v(\cdot), u(\cdot)) < \mathfrak{T}_0(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для простоты обозначений считаем $\mathfrak{k} = \mathfrak{m} = 1$ (какие надо внести изменения в общем случае станет ясно из приводимого ниже доказательства), и полагаем $\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\iota, h(\cdot)) \doteq \mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta}, \iota, h(\cdot))$ при всех $(\iota, h(\cdot)) \in \mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, $\mathcal{K} \doteq \mathcal{K}(\vec{\vartheta})$.

Поскольку $\mathcal{K} \cap \mathcal{H} \neq \varnothing$, то (см. (2.19)) найдется такая пара $\widehat{\varsigma} \doteq (\widehat{\iota}, \widehat{h}(\cdot)) \in \mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}(\widehat{\iota} \neq \iota_0)$, что $(\mathfrak{a}_0(\widehat{\varsigma}), \mathfrak{a}_1(\widehat{\varsigma}), \mathfrak{a}_2(\widehat{\varsigma}) \in \mathcal{H}$. Теперь, взяв $\gamma \doteq \min(-(\mathfrak{a}_0(\widehat{\varsigma}), -\mathfrak{a}_1(\widehat{\varsigma})$, получаем (см. (2.21)), что $\mathfrak{a}_0(\widehat{\varsigma}), \mathfrak{a}_1(\widehat{\varsigma}) \leqslant -\gamma, \mathfrak{a}_2(\widehat{\varsigma}) = 0$. Далее, т.к. $P(\mathcal{K}) = \mathbb{R}$, то отрезок $[-1, 1] \subset P(\mathcal{K})$, а значит найдутся такие $\varsigma_j \doteq (\iota_j, h_j(\cdot))$ из $\mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, $j = 1, 2$, что $\mathfrak{a}_2(\varsigma_1) = -1$, $\mathfrak{a}_2(\varsigma_2) = 1$. Учитывая (4.2)–(4.5) и (2.16)–(2.18), получаем, что для любого $\varrho > 0$ $\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\widehat{\varsigma} + \varrho\varsigma_1) \leqslant -\gamma + \varrho\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\varsigma_1)$, $\mathfrak{l} = 0, 1$ и $\mathfrak{a}_2(\widehat{\varsigma} + \varrho\varsigma_1) = -\varrho$. Поэтому при малом $\varrho > 0$ будем иметь $\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\widehat{\varsigma} + \varrho\varsigma_1) \leqslant -\gamma/2$, $\mathfrak{l} = 0, 1$ и $\mathfrak{a}_2(\widehat{\varsigma} + \varrho\varsigma_1) = -\varrho$, или, полагая $\varsigma' \doteq \widehat{\varsigma} + \varrho\varsigma_1$, $\rho' \doteq 1/\varrho$,

$$\mathfrak{a}_0(\varsigma'),\ \mathfrak{a}_1(\varsigma') \leqslant -\gamma/2,\ \rho'\mathfrak{a}_2(\varsigma') = -1. \tag{2.22}$$

Аналогично показываем, что при некоторых $\varsigma'' \in \mathcal{V}$ и $\rho'' > 0$

$$\mathfrak{a}_0(\varsigma''),\ \mathfrak{a}_1(\varsigma'') \leqslant -\gamma/2,\ \rho''\mathfrak{a}_2(\varsigma'') = 1. \tag{2.23}$$

Сейчас рассмотрим симплекс

$$\Sigma \doteq \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \colon \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$$

и гомеоморфное отображение $\mathfrak{f} \colon \Sigma \to [-1, 1]$, определенное равенством

$$\mathfrak{f}(\lambda) \doteq \lambda_2 - \lambda_1,\ \lambda \in \Sigma,$$

для которого, в силу (2.22) и (2.23),

$$\mathfrak{f}(\lambda) = \mathfrak{a}_2(\lambda_1\rho'\varsigma' + \lambda_2\rho''\varsigma''),\ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Sigma. \tag{2.24}$$

В дальнейшем при доказательстве используем результаты, полученные ранее для иголки $\vec{\iota} \doteq (\iota', \iota'')$ и параметров

$$\vec{\mathfrak{y}} = (\lambda_1 \rho', \lambda_2 \rho'') \in \Pi^2 \doteq [0, \rho] \times [0, \rho],$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Sigma$ и $\rho \doteq \max(\rho', \rho'')$.

Далее, т. к. $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ — выпуклый замкнутый конус с вершиной в нуле [9], то при каждом $\lambda \in \Sigma$

$$h(\cdot, \lambda) \doteq \lambda_1 \rho' h'(\cdot) + \lambda_2 \rho'' h''(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$$

и значит [9] для всякого $\lambda \in \Sigma$

$$\rho^0_{\mathfrak{S}}(\widehat{v}(\cdot), h(\cdot, \lambda)) \doteq \limsup_{\substack{v(\cdot) \to \widehat{v}(\cdot) \\ \varepsilon \downarrow 0}} \frac{\rho_{\mathfrak{S}}(v(\cdot) + \varepsilon h(\cdot, \lambda)) - \rho_{\mathfrak{S}}(v(\cdot))}{\varepsilon} = 0.$$

Откуда для функций $v_p(\cdot) \in \mathfrak{S}$, удовлетворяющих неравенству $\|v_p(\cdot) - \widehat{v}(\cdot)\|_C \leqslant \varepsilon_p^2$, $p \in \mathbb{N}$ получаем равенство

$$\lim_{p \to \infty} \frac{1}{\varepsilon_p} \rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot) + \varepsilon_p h(\cdot, \lambda)) = 0.$$

Поэтому из неравенства

$$\rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot) + \varepsilon_p h(\cdot, \lambda)) \leqslant \rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot) + \varepsilon_p \rho' h'(\cdot)) + \rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot) + \varepsilon_p \rho'' h''(\cdot)),$$

выполненного для всех $\lambda \in \Sigma$ и принимая во внимание, что $\rho' h'(\cdot), \rho'' h''(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, получаем следующее предельное соотношение:

$$\frac{1}{\varepsilon_p} \rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot) + \varepsilon_p h(\cdot, \lambda)) \underset{\lambda \in \Sigma}{\rightrightarrows} 0 \text{ при } p \to \infty.$$

Далее, из определения расстояния вытекает, что для каждого $p \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in \Sigma$ найдется такое $w_p(\cdot, \lambda) \in \mathfrak{S}$, что

$$\|v_p(\cdot) + \varepsilon_p h_p(\cdot, \lambda) - w_p(\cdot, \lambda)\|_C < \rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot) + \varepsilon_p h(\cdot, \lambda)) + \frac{\varepsilon_p}{p}.$$

Полагая теперь $h_p(\cdot,\lambda) \doteq \frac{1}{\varepsilon_p}(w_p(\cdot,\lambda) - v_p(\cdot))$, получаем следующие соотношения:

$$\|h_p(\cdot,\lambda) - h(\cdot,\lambda)\|_C = \frac{1}{\varepsilon_p}\|w_p(\cdot,\lambda) - \varepsilon_p + \varepsilon_p h(\cdot,\lambda)\|_C <$$

$$< \frac{1}{\varepsilon_p}\rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot) + \varepsilon_p h(\cdot,\lambda)) + \frac{1}{p}.$$

Откуда, в свою очередь, заключаем, что существует такая совокупность функций $\{h_p(\cdot,\lambda), p \in \mathbb{N}, \lambda \in \Sigma\} \subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$, что

$$\|h_p(\cdot,\lambda) - h(\cdot,\lambda)\|_C \underset{\lambda\in\Sigma}{\rightrightarrows} 0 \text{ при } p \to \infty \tag{2.25}$$

и для всех $p \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in \Sigma$

$$w_p(\cdot,\lambda) \doteq v_p(\cdot) + \varepsilon_p h_p(\cdot,\lambda) \in \mathfrak{S}. \tag{2.26}$$

Покажем также, что для указанной совокупности функций

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Big(\underset{\substack{(p,\lambda_l)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{S},\\ l=1,2,|\lambda_1-\lambda_2|\leqslant\gamma}}{\text{supremum}} \|h_p(\cdot,\lambda_1) - h_p(\cdot,\lambda_2)\|_C\Big) = 0.$$

Допустив противное, получаем, что найдется $\varkappa > 0$ и последовательности $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0,\infty)$, $\lim\limits_{i\to\infty}\gamma_i = 0$ такие, что

$$\varkappa < H_i \doteq \|h_{p_i}(\cdot,\lambda_1^{(i)}) - h_{p_i}(\cdot,\lambda_2^{(i)})\|_C,\ i \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, из цепочки неравенств

$$H_i \leqslant \sum_{l=1}^{2}\varepsilon_{p_i}^{-1}\|w_{p_i}(\cdot,\lambda_l^{(i)}) - v_{p_i}(\cdot) - \varepsilon_{p_i}h_{p_i}(\cdot,\lambda_l^{(i)})\|_C +$$

$$+\|h(\cdot,\lambda_l^{(i)}) - h(\cdot,\lambda_l^{(i)})\|_C < 2\sup_{\lambda\in\Sigma}\varepsilon_{p_i}^{-1}\rho_{\mathfrak{S}}(v_{p_i}(\cdot) + \varepsilon_{p_i}h(\cdot,\lambda)) + p_i^{-1} +$$

$$+|\lambda_l^{(i)} - \lambda_2^{(i)}|\,(\rho'\|h'(\cdot)\|_C + \rho''\|h''(\cdot)\|_C)$$

вытекает, что $\lim\limits_{i\to\infty} H_i = 0$. Последнее противоречит тому, что $\varkappa < H_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Теперь, для иголки $\vec{\iota} \doteq (\iota', \iota'') \in \mathcal{V}^2$ рассмотрим константу $\varepsilon_0 \doteq \varepsilon(\rho, \vec{\iota})$ (см. (4.12) из [1]) и будем считать, чтобы не загромождать обозначений, что

$$\{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty} \subset [0, \varepsilon_0], \ \varepsilon_1 \doteq 0.$$

Введем далее отображение $(\varepsilon_p, \lambda) \mapsto \varphi(\varepsilon_p, \lambda)$, $(\varepsilon_p, \lambda) \in [0, \varepsilon_0] \times \Sigma$ (здесь см. (2.2) и (2.26), а также (4.18) в [1]), заданное следующим образом:

$$\varphi(\varepsilon_p, \lambda) \doteq \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_p} \mathfrak{T}_2(w_p(\cdot, \lambda), \mu(\cdot; \varepsilon_p, \lambda_1 \rho' \iota' + \lambda_2 \rho'' \iota'')), \ p > 1, \\ \mathfrak{a}_2(\lambda_1 \rho' \varsigma' + \lambda_2 \rho'' \varsigma''), \ p = 1. \end{cases} \tag{2.27}$$

Из способа задания функций $\{w_p(\cdot, \lambda), p \in \mathbb{N}, \lambda \in \Sigma\} \subset \mathfrak{S}$, отвечающих $h(\cdot, \lambda) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ (здесь см. доказательства леммы 2.3 и следствия 2.2) в силу леммы 2.4 и предельного соотношения (2.25) вытекает, что

$$|\varphi(\varepsilon_p, \lambda) - \varphi(0, \lambda)| \underset{\lambda \in \Sigma}{\rightrightarrows} 0 \text{ при } p \to \infty. \tag{2.28}$$

Далее, т. к. $\mathfrak{f}$ является гомеоморфизмом, то определено непрерывное отображение

$$\alpha \mapsto \mathfrak{f}^{-1}(\alpha) \doteq (\lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha)) \in \Sigma, \ \alpha \in [-1, 1],$$

и, следовательно, при каждом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ определено также отображение $\alpha \mapsto \varphi(\varepsilon_p, \mathfrak{f}^{-1}(\alpha))$, которое, в силу (2.24), (2.27) и (2.28), удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} \alpha - \varphi(0, \mathfrak{f}^{-1}(\alpha)) = 0, \ \alpha \in [-1, 1], \\ |\alpha - \varphi(\varepsilon_p, \mathfrak{f}^{-1}(\alpha))| \underset{\alpha \in [-1,1]}{\rightrightarrows} 0 \text{ при } p \to \infty. \end{cases} \tag{2.29}$$

Полагаем теперь $w_p(\cdot, \alpha) \doteq w_p(\cdot, \lambda(\alpha))$ (см. (2.26)), и пусть

$$\nu(\cdot; \varepsilon, \alpha) \doteq \mu(\cdot; \varepsilon, \lambda_1(\alpha) \rho' \iota' + \lambda_2(\alpha) \rho'' \iota''), \ (\varepsilon, \alpha) \in \Omega \doteq [0, \varepsilon_0] \times [-1, 1].$$

Поскольку (см. в [1] следствие 4.1) $\nu(\cdot;\varepsilon,\alpha)\in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, то найдется такая последовательность функций $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ из пространства $S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathfrak{U})$, что, во-первых, при каждом $j\in\mathbb{N}$

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Big(\operatorname*{supremum}_{\substack{(\varepsilon_l,\alpha_l)\in\Omega,\ l=1,2\\ |\varepsilon_1-\varepsilon_2|+|\alpha_1-\alpha_2|\leqslant\gamma}}\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1}|\delta_{u_j(s;\varepsilon_1,\alpha_1)}-\delta_{u_j(s;\varepsilon_2,\alpha_2)}|(\mathfrak{U})ds\Big)\Big)=0, \quad (2.30)$$

а, во-вторых (здесь см. (2.1) и (2.2), а также лемму 5.2 из [1]), при каждом $\mathfrak{l}=0,1,2$

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{(\varepsilon,\alpha)\in\Omega}|\mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot),\nu(\cdot;\varepsilon,\alpha))-I_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot),u_j(\cdot;\varepsilon,\alpha))|\Big)=0. \quad (2.31)$$

Покажем, что равномерно по $(p,\alpha)\in\mathbb{N}\times[-1,1]$

$$|\mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(w_p(\cdot,\alpha),\nu(\cdot;\varepsilon_p,\alpha))-I_{\mathfrak{l}}(w_p(\cdot,\alpha),u_j(\cdot;\varepsilon_p,\alpha))|\to 0. \quad (2.32)$$

при $j\to\infty$.

Допустим противное. Тогда найдется константа $\varkappa>0$ и последовательности $\{j_i\}_{i=1}^{\infty},\{p_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathbb{N},\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}\subset[-1,1]$ такие, что для всех $i\in\mathbb{N}$ $y_i\geqslant\varkappa$, где

$$y_i\doteq|\mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(w_{p_i}(\cdot,\alpha_i),\nu(\cdot,\varepsilon_{p_i},\alpha_i))-I_{\mathfrak{l}}(w_{p_i}(\cdot,\alpha_i),u_{j_i}(\cdot,\varepsilon_{p_i},\alpha_i))|.$$

С другой стороны, если

$$\gamma_i\doteq\sup_{\alpha\in[-1,1]}\|w_{p_i}(\cdot,\alpha)-\widehat{v}(\cdot)\|_C$$

и $\omega_{\gamma_i}[f_{\mathfrak{l}}(t,\cdot,\cdot),V\times\mathfrak{U}]$ – γ_i-колебание на $V\times\mathfrak{U}$ непрерывной функции $(v,u)\mapsto f_{\mathfrak{l}}(t,v,u)$, где $V\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, здесь и далее при доказательстве настоящей теоремы определено равенством (2.14) при $\varrho\doteq\rho'\|h'\|_C+\rho''\|h''\|_C$, то при каждом i имеем следующие неравенства:

$$y_{j_i}\leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\omega_{\gamma_i}[f_{\mathfrak{l}}(t,\cdot,\cdot),V\times\mathfrak{U}]+$$
$$+\sup_{(\varepsilon,\alpha)\in\Omega}|\mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot),\nu(\cdot,\varepsilon,\alpha))-I_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot),u_{j_i}(\cdot,\varepsilon,\alpha))|.$$

Поскольку (см. (2.26)) $\gamma_i \to 0$ при $i \to \infty$ и, напомним, что, $f_{\mathfrak{l}} \in B(\mathbb{R} \times V \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$, то [10] $\lim\limits_{i\to\infty}(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \omega_{\gamma_i}[f_{\mathfrak{l}}(t,\cdot,\cdot), V \times \mathfrak{U}]) = 0$. Следовательно, из последнего неравенства, учитывая (2.31), получаем, что $y_{j_i} \to 0$ при $i \to \infty$. Последнее противоречит предположению: $y_{j_i} \geqslant \varkappa > 0$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Далее, из леммы 2.4, учитывая принятые обозначения, вытекает, что

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(\mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(w_p(\cdot,\alpha),\nu(\cdot;\varepsilon_p,\alpha)) - \mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))) \underset{\alpha\in[-1,1]}{\rightrightarrows} \mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\lambda_1(\alpha)\rho'\varsigma' + \lambda_2(\alpha)\rho''\varsigma'')$$

при $p \to \infty$, и т. к. (см. (2.22), (2.23))

$$\sup_{\alpha\in[-1,1]} \mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\lambda_1(\alpha)\rho'\varsigma' + \lambda_2(\alpha)\rho''\varsigma'') \leqslant -\frac{\gamma}{2}\min(\rho',\rho''),$$

то найдется такое $p_1 \in \mathbb{N}$, что при всех $p \geqslant p_1$

$$\sup_{\alpha\in[-1,1]} \frac{1}{\varepsilon_p}(\mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(v_{\varepsilon_p}(\cdot,\alpha),\nu(\cdot;\varepsilon_p,\alpha)) - \mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))) \leqslant -\frac{\gamma\varepsilon_p}{4}\min(\rho',\rho'').$$

С другой стороны, из (2.32) следует, что для каждого фиксированного $p \geqslant p_1$ найдется такое $j_1(p) \in \mathbb{N}$, что при всех $j \geqslant j_1(p)$ будет выполнено неравенство

$$\sup_{(\varepsilon,\alpha)\in\Omega} |\mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(v_\varepsilon(\cdot,\alpha),\nu(\cdot;\varepsilon,\alpha)) - I_{\mathfrak{l}}(v_\varepsilon(\cdot,\alpha),u_j(\cdot;\varepsilon,\alpha))| \leqslant \frac{\gamma\varepsilon_p}{8}\min(\rho',\rho''),$$

из которого, совместно с предыдущим неравенством, вытекает, что для каждого $p \geqslant p_1$ и любом $j \geqslant j_1(p)$ при всех $\alpha \in [-1,1]$

$$I_{\mathfrak{l}}(v_{\varepsilon_p}(\cdot,\alpha),\nu(\cdot;\varepsilon_p,\alpha)) \leqslant \mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))) - \frac{\gamma\varepsilon_p}{8}\min(\rho',\rho''). \qquad (2.33)$$

Сейчас введем в рассмотрение функцию

$$\alpha \mapsto \Phi_{pj}(\alpha) \doteq \alpha - \frac{1}{\varepsilon_p} I_2(w_p(\cdot,\alpha),u_j(\cdot;\varepsilon_p,\alpha)),\ \alpha \in [-1,1].$$

Поскольку при каждом $\alpha \in [-1,1]$

$$|\Phi_{pj}(\alpha)| \overset{(2.27)}{\leqslant} \sup_{\alpha\in[-1,1]} |\alpha - \varphi(\varepsilon_p, \mathfrak{f}^{-1}(\alpha))| +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_p} \sup_{(k,\alpha)\in\mathbb{N}\times[-1,1]} |\mathfrak{T}_2(w_p(\cdot,\alpha), \nu(\cdot;\varepsilon_p,\alpha)) - I_2(w_p(\cdot,\alpha), u_j(\cdot;\varepsilon_p,\alpha))|,$$

то, в силу (2.29) и (2.32), найдется такое $p_2 \geqslant p_1$, что для каждого $p \geqslant p_2$ существует $j_2(p) \geqslant j_1(p)$ такое, что при любом $j \geqslant j_2(p)$ будет выполнено включение $\Phi_{pj}([-1,1]) \subset [-1,1]$. Теперь покажем, что для любых фиксированных $p \geqslant p_2$ и $j \geqslant j_2(p)$ функция Φ_{pj} принадлежит пространству $C([-1,1],[-1,1])$. С этой целью полагаем $F(t) \doteq \max\limits_{(v,u)\in V\times\mathfrak{U}} |f'_{2v}(t,v,u)|$ и пусть

$$\mathcal{F} \doteq \sup\{|f_2(t,v,u)|,\ (t,v,u) \in \times V \times \mathfrak{U}\}.$$

Поскольку $w_p(\cdot,\lambda) \underset{\lambda\in\Sigma}{\rightrightarrows} \widehat{v}(\cdot)$ при $p \to \infty$, то можно считать, что при указанных p для любых $\alpha', \alpha'' \in [-1,1]$ и $\theta \in [0,1]$

$$w_p(t,\theta,\alpha',\alpha'') \doteq w_p(t,\alpha'') + \theta(w_p(t,\alpha') - w_p(t,\alpha'')) \in V,\ t \in \mathbb{R},$$

где, напомним, множество $V \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ определено равенством (2.14) при $\varrho \doteq \rho'\|h'\|_C + \rho''\|h''\|_C$. Теперь для любых точек $\alpha', \alpha'' \in [-1,1]$ имеем следующие соотношения (напомним также, что $w_p(\cdot,\alpha) \doteq w_p(\cdot,\lambda(\alpha))$):

$$|\Phi_{pj}(\alpha') - \Phi_{pj}(\alpha'')| \leqslant |\alpha' - \alpha''| +$$

$$+\varepsilon_p^{-1}|I_2(w_p(\cdot,\alpha'), u_j(\cdot;\varepsilon_p,\alpha')) - I_2(w_p(\cdot,\alpha''), u_j(\cdot;\varepsilon_p,\alpha'))| +$$

$$+\varepsilon_p^{-1}|I_2(w_p(\cdot,\alpha''), u_j(\cdot;\varepsilon_p,\alpha')) - I_2(w_p(\cdot,\alpha''), u_j(\cdot;\varepsilon_p,\alpha''))| \leqslant$$

$$\leqslant |\alpha' - \alpha''| + \varepsilon_p^{-1} M\{|\int_0^1 f'_{2v}(t, w_p(t,\theta,\alpha',\alpha''), u_j(\cdot;\varepsilon_p,\alpha'))d\theta \times$$

$$\times (w_p(\cdot,\alpha'') - w_p(t,\alpha'))|\} +$$

$$+\varepsilon_p^{-1}\mathcal{F}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\delta_{u_j(t;\varepsilon_p,\alpha')}-\delta_{u_j(t;\varepsilon_p,\alpha'')}|(\mathfrak{U})ds\leqslant$$

$$\leqslant|\alpha'-\alpha''|+\varepsilon_p^{-1}d(F(\cdot),0)\|w_p(\cdot,\alpha'')-w_p(t,\alpha')\|_C+$$

$$+\varepsilon_p^{-1}\mathcal{F}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\delta_{u_j(t;\varepsilon_p,\alpha')}-\delta_{u_j(t;\varepsilon_p,\alpha'')}|(\mathfrak{U})ds,$$

из которых, учитывая непрерывность отображений

$$\alpha\mapsto\mathfrak{f}^{-1}(\alpha)\in\Sigma,\ \alpha\in[-1,1],\quad \lambda\mapsto w_p(\cdot,\lambda)\in\mathbb{R},\ \lambda\in\Sigma,$$

а также равенство (2.30), получаем, что отображение $\alpha\mapsto\Phi_{pj}(\alpha)$ непрерывно на $[-1,1]$, а т.к. $\Phi_{pj}([-1,1])\subset[-1,1]$, то, действительно, $\Phi_{pj}\in C([-1,1],[-1,1])$ при $p\geqslant p_2$ и $j\geqslant j_2(p)$. Поэтому по теореме Брауэра [11] для указанных p и j существует такая точка $\alpha_{pj}\in[-1,1]$, что $\alpha_{pj}=\Phi_{pj}(\alpha_{pj})$, или иначе $I_2(v_{\varepsilon_p}(\cdot,\alpha_{pj}),u_j(\cdot;\varepsilon_p,\alpha_{pj}))=0$. Из этого равенства, совместно с неравенством (2.32) и условием — $(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{D}$, получаем, что $(v_{\varepsilon_p}(\cdot,\alpha_{pj}),u_j(\cdot;\varepsilon_p,\alpha_{pj}))\in D$ и, кроме того,

$$I_0(v_{\varepsilon_p}(\cdot,\alpha_{pj}),u_j(\cdot;\varepsilon_p,\alpha_{pj}))<\mathfrak{T}_0(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)),$$

тем самым теорема 2.2 доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда в задаче (2.9) имеются ограничения в виде строгих неравенств. С этой целью выделим те индексы $\mathfrak{l}_1\dots\mathfrak{l}_{\mathfrak{k}'}$, для которых $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}_i}(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))=0$, $i=1\dots\mathfrak{k}'$, и в $\mathbb{R}^{1+\mathfrak{k}'+\mathfrak{m}}$ рассмотрим конус

$$\mathcal{K}'(\vec{\vartheta})\doteq\Big\{(\mathfrak{a}_0(\vec{\vartheta},\varsigma),\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}_1}(\vec{\vartheta},\varsigma)\dots\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}_{\mathfrak{k}'}}(\vec{\vartheta},\varsigma),\\ \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+1}(\vec{\vartheta},\varsigma)\dots\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\varsigma)),\varsigma\in\mathcal{V}\times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}\Big\}\quad(2.34)$$

(свойства которого аналогичны свойствам конуса $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$, определенного равенством (2.19)), проектор $P\colon\mathcal{K}'(\vec{\vartheta})\to\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, задаваемый аналогично (2.20) и конус

$$\mathcal{H}'\doteq\{x\in\mathbb{R}^{1+\mathfrak{k}'+\mathfrak{m}}\colon x_0,x_1\dots x_{\mathfrak{k}'}<0,\ x_{\mathfrak{k}+1}=\dots=x_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}=0\}.\quad(2.35)$$

Т е о р е м а 2.3. *Если* $P(\mathcal{K}'(\vec{\vartheta})) = \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ *и* $\mathcal{K}'(\vec{\vartheta}) \bigcap \mathcal{H}' \neq \varnothing$, *то найдется такая пара* $(v(\cdot), u(\cdot)) \in D$, *что будет выполнено неравенство* $I_0(v(\cdot), u(\cdot)) < \mathfrak{T}_0(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Снова считаем $\mathfrak{k} = \mathfrak{m} = 1$, т.е. в рассматриваемой ситуации $\mathfrak{T}_1(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) < 0$. Тогда (см. обозначения принятые при доказательстве теоремы 2.2)

$$\mathcal{K}'(\vec{\vartheta}) \overset{(2.35)}{=} \mathcal{K}'\{(\mathfrak{a}_0(\varsigma), \mathfrak{a}_1(\varsigma)),\ \varsigma \doteq (\iota, h(\cdot) \in \mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}\},$$
$$\mathcal{H}' \overset{(2.33)}{=} \{(x_0, x_2)\colon\ x_0 < 0,\ x_2 = 0\}.$$

Теперь в точности следуя схеме доказательства теоремы 2.2, считая $\mathfrak{a}_1(\varsigma') = \mathfrak{a}_1(\varsigma'') = 0$, получим что для всех $p \geqslant p_2$ и $j \geqslant j_2(p)$ найдется пара $(v_{\varepsilon_p}(\cdot, \alpha_{pj}), u_j(\cdot; \varepsilon_p, \alpha_{pj})) \in \mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, удовлетворяющая условиям:

$$I_2(v_{\varepsilon_p}(\cdot, \alpha_{pj}), u_j(\cdot; \varepsilon_p, \alpha_{pj})) < \mathfrak{T}_0(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)),$$
$$I_2(v_{\varepsilon_p}(\cdot, \alpha_{pj}), u_j(\cdot; \varepsilon_p, \alpha_{pj})) = 0.$$

Далее, т. к. (см. (2.25) и (2.26))

$$w_p(\cdot, \alpha) \doteq w_p(\cdot, \lambda(\alpha)) \underset{\alpha \in [-1,1]}{\rightrightarrows} \widehat{v}(\cdot) \text{ при } p \to \infty,$$

то можно считать, что для указанных p и j для всех точек $(\theta, t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ $\quad \widehat{v}(t) + \theta(\widehat{v}(t) - w_p(t, \alpha)) \in V$. Поэтому (см. обозначения (2.13) и (2.26) при $\lambda = \lambda(\alpha)$) имеем следующие соотношения:

$$|I_1(w_p(\cdot, \alpha), u_j(\cdot; \varepsilon, \alpha)) - \mathfrak{T}_1(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))| \leqslant$$
$$\leqslant \|w_p(\cdot, \alpha) - \widehat{v}(\cdot)\|_C \sup_{\alpha \in [-1,1]} (\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\langle \widehat{\mu}(s) - \nu(s; \varepsilon_p, \alpha), \widehat{f}_1(s, u)\rangle| ds) +$$
$$+ \sup_{(\varepsilon, \alpha) \in \Omega} |M\{\langle \nu(t; \varepsilon, \alpha) - \delta_{u_j(t;\varepsilon,\alpha)}, \widehat{f}_1(t, u)\rangle\}|.$$

Теперь, поскольку функция $\widehat{f}_1 \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$, то в силу следствия 4.1 в [1]

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\langle \widehat{\mu}(s) - \nu(s;\varepsilon_p,\alpha), \widehat{f}_1(s,u)\rangle| ds \underset{\alpha\in[-1,1]}{\rightrightarrows} 0 \text{ при } p\to\infty.$$

Откуда, учитывая также равенство (2.31) (здесь, см. обозначения (2.1), (2.2)) из полученных выше соотношений, принимая во внимание, что $\mathfrak{T}_1(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) < 0$, получаем, что при достаточно больших $p \geqslant p_2$ и $j \geqslant j_2(p)$ будет выполняться неравенство $I_1(v_{\varepsilon_p}(\cdot, \alpha_{pj}), u_j(\cdot;\varepsilon_p,\alpha_{pj})) < 0$, т.е. при этих p и j пара $(v_{\varepsilon_p}(\cdot,\alpha_{pj}), u_j(\cdot;\varepsilon_p,\alpha_{pj})) \in D$ обладает нужным свойством.

4. В этом пункте, используя теоремы 2.2 и 2.3, докажем сначала существование универсальных множителей Лагранжа для оптимального в ослабленном смысле решения задачи (2.9) (см. определение 2.3), а затем докажем теорему 2.1.

Л е м м а 2.5. *Пусть* $(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{D}$ *является решением задачи* (2.9) *в ослабленном смысле. Тогда для каждого набора* $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^N$ *точек* $\vartheta_i \in \Xi$, $i = 1\ldots N$, *удовлетворяющих неравенствам* $0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant \ldots \leqslant \vartheta_N < a$, *существуют такие числа, не равные нулю одновременно,* $\lambda_0(\vec{\vartheta}) \geqslant 0, \lambda_1(\vec{\vartheta}) \ldots \lambda_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta})$, *что для всякой пары* $(\iota, h(\cdot)) \in \mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ *выполнено неравенство*

$$\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \lambda_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta}) \mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta}, \iota, h(\cdot)) \geqslant 0, \tag{2.36}$$

и, кроме того,

$$\lambda_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta}) \geqslant 0,\ \lambda_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta}) \mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = 0,\ \mathfrak{l} = 1\ldots\mathfrak{k}. \tag{2.37}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = 0$, $\mathfrak{l} = 1\ldots\mathfrak{k}$. В этом случае рассмотрим конус вариаций $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$ и проектор $P\colon \mathcal{K}(\vec{\vartheta}) \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, определенные равенствами (2.20) и (2.21) соответственно. Возможны следующие два случая: 1) $P(\mathcal{K}(\vec{\vartheta})) \subset \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, 2) $P(\mathcal{K}(\vec{\vartheta})) = \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$. В первом случае в качестве искомого набора чисел $\lambda_0(\vec{\vartheta})\dots\lambda_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta})$ берем такие — $\lambda_0(\vec{\vartheta})=\dots=\lambda_{\mathfrak{k}}(\vec{\vartheta})=0$, $(\lambda_{\mathfrak{k}+1}(\vec{\vartheta})\dots\lambda_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta}))\in S_1^{\mathfrak{m}}(0)$ и

$$\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{m}}\lambda_{\mathfrak{k}+\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta})\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot))\geqslant 0$$

для всех $(\iota,h(\cdot))\in\mathcal{V}\times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$. Такой набор найдется, т.к. $P(\mathcal{K}(\vec{\vartheta}))$ — выпуклый конус с вершиной в нуле. Далее, во втором возможном случае пересечение конуса $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$ с конусом $\mathcal{H}$, заданным равенством (2.21), пусто. Действительно, если допустить, что $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})\bigcap\mathcal{H}\neq\varnothing$, то по теореме 2.2 найдется такая пара $(v(\cdot),u(\cdot))\in D$, для которой будет выполнено неравенство $I_0(v(\cdot),u(\cdot))<\mathfrak{T}_0(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$, что противоречит оптимальности в слабом смысле допустимого процесса $(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{D}$ задачи (2.9). Таким образом $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})\bigcap\mathcal{H}=\varnothing$. По теореме отделимости [12] найдется вектор $(\lambda_0(\vec{\vartheta}),\lambda_1(\vec{\vartheta})\dots\lambda_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta}))$, принадлежащий $S_1^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(0)$, у которого первые $1+\mathfrak{k}$ координат неотрицательны, и для всех $(\iota,h(\cdot))\in\mathcal{V}\times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ справедливо неравенство

$$\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\lambda_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta})\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot))\geqslant 0.$$

Условия (2.37) здесь также выполнены. Тем самым лемма 2.5 для случая, когда $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))=0$, $\mathfrak{l}=1\dots\mathfrak{k}$, доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда в задаче (2.9) имеются ограничения в виде строгих неравенств. В этом случае выделяем те индексы $\mathfrak{l}_1\dots\mathfrak{l}_{\mathfrak{k}'}$, для которых $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}_i}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))=0$, $i=1\dots\mathfrak{k}'$, и рассмотрим конусы $\mathcal{K}'(\vec{\vartheta})$ и $\mathcal{H}'$, заданные равенствами (2.34) и (2.35) соответственно, а также проектор $P\colon\mathcal{K}'(\vec{\vartheta})\to\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$. Если $P(\mathcal{K}'(\vec{\vartheta}))\subset\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, то рассуждаем аналогично рассмотренному в первой части доказательства случаю, когда $P(\mathcal{K}(\vec{\vartheta}))$ содержится в $\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$. Если же $P(\mathcal{K}'(\vec{\vartheta}))=\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, то по теореме 2.3 получаем, что $\mathcal{K}'(\vec{\vartheta})\bigcap\mathcal{H}'=\varnothing$. Теперь по теореме отделимости найдется такой вектор

$$(\lambda_0(\vec{\vartheta}),\lambda_{\mathfrak{l}_1}(\vec{\vartheta}),\dots,\lambda_{\mathfrak{l}_{\mathfrak{k}'}}(\vec{\vartheta}),\lambda_{\mathfrak{k}+1}(\vec{\vartheta})\dots\lambda_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta}))\in S_1^{1+\mathfrak{k}'+\mathfrak{m}}(0),\qquad(2.38)$$

у которого первые $1+\mathfrak{k}'$ координат неотрицательны и для всех $(\iota, h(\cdot)) \in \mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ выполнено неравенство

$$\lambda_0(\vec{\vartheta})\mathfrak{a}_0(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot))+\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}'}\lambda_{\mathfrak{l}_i}(\vec{\vartheta})\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}_i}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot))+\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{m}}\lambda_{\mathfrak{k}+\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta})\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot)) \geqslant 0.$$

Для завершения доказательства леммы 2.5 в рассматриваемом случае осталось дополнить компоненты вектора (2.38) нулями.

Введем далее для всякого вектора $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ и каждой пары $(\vartheta, \{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})$, где $\vartheta \in \Xi$, а $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ — п. п. последовательность [3], в рассмотрение (здесь см. (2.13), (2.17)) следующее множество:

$$\mathfrak{K}(h(\cdot),(\vartheta,\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})) \doteq \Big\{\vec{\lambda} = (\lambda_\mathfrak{l})_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \in S_1^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(0):$$
$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\lambda_\mathfrak{l}\big(\triangle f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta,\nu(m)) + \mathfrak{b}_\mathfrak{l}(h(\cdot))\big) \geqslant 0,$$
$$\lambda_0 \geqslant 0,\ \lambda_\mathfrak{l} \geqslant 0,\ \lambda_\mathfrak{l}\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) = 0,\ \mathfrak{l} = 1\ldots\mathfrak{k}\Big\}.$$

Л е м м а 2.6. *Для любого конечного множества*

$$\big\{(h_i(\cdot),\vartheta_i,\{\nu_i(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\big\}_{i=1}^N$$

допустимых наборов

$$\bigcap_{i=1}^N \mathfrak{K}(h_i(\cdot),\vartheta_i,\{\nu_i(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}) \neq \varnothing.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать (при необходимости переобозначим), что $\vartheta_1 \leqslant \vartheta_2 \leqslant \ldots \leqslant \vartheta_N$. Для этого набора $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^N$ по лемме 2.5 существует такой вектор $(\lambda_0(\vec{\vartheta}),\lambda_1(\vec{\vartheta})\ldots\lambda_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta})) \in S_1^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(0)$, что $\lambda_0(\vec{\vartheta}) \geqslant 0$ и для всех

[3] В этом случае набор $(h(\cdot),(\vartheta,\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}))$ называем допустимым.

пар $(\iota, h(\cdot)) \in \mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ выполнены неравенство (2.36) и соотношения (2.37). Далее, для каждого $i_0 \in \{1 \ldots N\}$ рассмотрим иголку вида $\iota_{i_0} \doteq \{(\delta_{ii_0}, \{\nu_{i_0}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^{N}$ (здесь δ_{ii_0} — символ Кронекера). Для каждой пары $(\iota_{i_0}, h_{i_0}(\cdot)) \in \mathcal{V} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ неравенство (2.36) (здесь см. (2.16), (2.18) и (2.19)) запишется в виде $\lim\limits_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum\limits_{m=0}^{q_l-1} \sum\limits_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \lambda_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta})\big(\vartriangle f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta_{i_0}, \nu_{i_0}(m)) + \mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(h_{i_0}(\cdot))\big) \geqslant 0$. Откуда в силу произвольности выбора i_0 получаем утверждение леммы 2.6.

Т е о р е м а 2.4. *Пусть пара $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$, принадлежащая $\mathfrak{D}$, является решением задачи* (2.9). *Тогда существуют такие числа $\widehat{\lambda}_0 \geqslant 0, \widehat{\lambda}_1 \ldots \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, не равные нулю одновременно, что для каждого $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, всякой точки $\vartheta \in \Xi$ и любой п. п. последовательности $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \operatorname{rpm}(\mathfrak{U})$ выполнено неравенство*

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}\big(\vartriangle f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta, \nu(m)) + \mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(h(\cdot))\big) \geqslant 0$$

и, кроме того, $\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = 0$, $\mathfrak{l} = 1 \ldots \mathfrak{k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 2.6 система замкнутых множеств $\{\mathfrak{K}(h(\cdot), \vartheta, \{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}),\ (h(\cdot), \vartheta, \{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}) \in I\}$, где I — совокупность допустимых наборов, компакта $S_1^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(0)$ является центрированной. Поэтому [3] пересечение этой системы множеств не пусто. Откуда следует, что в качестве искомого набора чисел можно взять координаты любого вектора $(\widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1 \ldots \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}})$ из этого пересечения.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.1. Для каждого $\mu(\cdot)$ из APM_1 рассмотрим (см. определение 2.4 в [1]) его стекловское усреднение $\mu(\cdot, \zeta)$. Так как $\mu(\cdot, \zeta)$ принадлежит $B(\mathbb{R}, (\operatorname{rpm}(\mathfrak{U}), \rho_w))$, то последовательность $\{\mu(\vartheta + ma, \zeta)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ из $\operatorname{rpm}(\mathfrak{U})$ при каждом $\vartheta \in \Xi$ является п. п. и, стало быть, по теореме 2.4 для всякого $\vartheta \in \Xi$ и любого $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ будет выполняться неравенство

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}\bigl(\vartriangle f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta,\mu(\vartheta+ma,\zeta))+\mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(h(\cdot))\bigr)\geqslant 0.$$

Проинтегрировав последнее неравенство по ϑ от 0 до a, учитывая обозначения (2.13) и (2.18), получаем, что

$$M\{\langle\mu(t,\zeta),\mathcal{L}(t,\widehat{v}(t),u)\rangle\}-M\{\langle\widehat{\mu}(t),\mathcal{L}(t,\widehat{v}(t),u)\rangle\}+\\ +M\{\langle\widehat{\mu}(t),\mathcal{L}'_v(t,\widehat{v}(t),u)\rangle\},$$

где, напомним,

$$\mathcal{L}(t,v,u)\doteq\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}f_{\mathfrak{l}}(t,v,u),\ \ (t,v,u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathfrak{U}.$$

Откуда (см. теорему 2.4 в [1]) получаем, что для всех $\mu(\cdot)$ из APM_1 и каждого $h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$

$$M\{\langle\mu(t)-\widehat{\mu}(t),\mathcal{L}(t,\widehat{v}(t),u)\rangle\}+M\{\langle\widehat{\mu}(t),\mathcal{L}'_v(t,\widehat{v}(t),u)\rangle\}\geqslant 0.$$

Из последнего неравенства в силу произвольности $\mu(\cdot)\in APM_1$ и $h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, воспользовавшись тем, что вместе с каждым вектором $h(\cdot)$ по определению конусу $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ принадлежат и вектора $\lambda h(\cdot)$, $\lambda>0$, несложно убедиться в справедливости равенства (2.11) и неравенства (2.12) при каждом $h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$.

З а м е ч а н и е 2.5. Так как функция $(t,u)\mapsto\mathcal{L}(t,\widehat{v}(t),u)$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$, то по теореме 1.5 равенство (2.11) выполнено в том и только в том случае, если при п. в. $t\in\mathbb{R}$ $\min\limits_{u\in\mathfrak{U}}\mathcal{L}(t,\widehat{v}(t),u)=\langle\widehat{\mu}(t),\mathcal{L}(t,\widehat{v}(t),u)\rangle$.

З а м е ч а н и е 2.6. Требование $f_{\mathfrak{l}}\in B(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$ в теореме 2.1 обусловлено (см. лемму 2.1) тем, что для таких функций найдутся последовательность $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$, $\lim\limits_{l\to\infty}q_l=\infty$ и измеримое множество $\Xi\subset[0,a]$, $\operatorname{mes}\Xi=a$ такие, что при каждом

$\vartheta \in \Xi$ и любой п. п. последовательности $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ существуют пределы $\lim\limits_{l\to\infty} \dfrac{1}{q_l a} \sum\limits_{m=0}^{q_l-1} \Delta f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta, \nu(m))$, $\mathfrak{l} = 0\ldots\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$. В ряде случаев (см. лемму 4.2 в [1]) указанным свойством будут обладать и функции $f_\mathfrak{l} \in S(\mathbb{R}, C(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}))$. Например, все функции $f_\mathfrak{l}$, представимые в виде $f_\mathfrak{l}(t,v,u) = g_\mathfrak{l}(t,v)h_\mathfrak{l}(t,v,u)$, где $g_\mathfrak{l} \in S(\mathbb{R}, C(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n*}))$, $h_\mathfrak{l} \in B(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k\times\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$. Стало быть, в этом случае имеет место утверждение, аналогичное теореме 2.1.

П р и м е р 2.3. Рассмотрим задачу (2.7) из примера 2.1. Относительно функции $f \in B(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k\times\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$, будем предполагать, что она удовлетворяет условию, аналогичному условию 1) для функций $f_\mathfrak{l} \in B(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k\times\mathfrak{U}, \mathbb{R})$, $\mathfrak{l} = 0\ldots\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$. Как было показано, эта задача может быть редуцирована к задаче (2.4) с функционалами $I_\mathfrak{l}(v(\cdot), u(\cdot))$, определенными равенствами (2.8). Для задачи (2.4) с такими функционалами в силу следствия 2.1 получаем следующее необходимое условие оптимальности.

Т е о р е м а 2.5. *Пусть пара* $(\widehat{v}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \in \mathbb{D}$ *является решением задачи* (2.7). *Тогда найдутся такие числа* $\widehat{\lambda}_0 \geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_1 \ldots \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *не равные нулю одновременно, что для функции*

$$(t,v,u,p) \mapsto \mathbb{H}(t,v,u,p) \doteq pf(t,v,u) - \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_\mathfrak{l} f_\mathfrak{l}(t,v,u)$$

справедливо равенство

$$\sup_{u(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})} M\{\mathbb{H}(t,\widehat{v}(t),u(t),\widehat{p}(t))\} = M\{\mathbb{H}(t,\widehat{v}(t),\widehat{u}(t),\widehat{p}(t))\},$$

где $\widehat{p}(\cdot)$ — *п. п. по Бору решение системы*

$$\dot{p} = -pA(t) + \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_\mathfrak{l} a_\mathfrak{l}(t,\widehat{v}(t)),\ (t,p)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n*}.$$

Кроме того, (*здесь см.* (2.8))

$$\widehat{\lambda}_\mathfrak{l} \geqslant 0,\ \widehat{\lambda}_\mathfrak{l} I_\mathfrak{l}(\widehat{v}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) = 0,\ \mathfrak{l} = 1\ldots\mathfrak{k}$$

и для всякого $h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ *справедливо неравенство*

$$M\{\mathbb{H}'_v(t,\widehat{v}(t),\widehat{u}(t),\widehat{p}(t))h(t)\}\leqslant 0.$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий приведенную теорему.

П р и м е р 2.4. Пусть

$$\Gamma\doteq\{\mathbb{M}\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n):\ Re\,\lambda_j(\mathbb{M})<0,\ j=1,\dots,n\}$$

и $A\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$, $b\in\mathbb{R}^n$ такие, что матрица $\mathbb{K}\doteq[b,Ab\dots A^{n-1}b]$ невырождена. Зафиксируем также такую функцию $f\in S(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, что $M\{f(t)\}\neq 0$ и при v, принадлежащем открытому в $\mathbb{R}^n$ множеству

$$\mathfrak{S}\doteq\{\mathfrak{s}\in\mathbb{R}^n:\ A+b\mathfrak{s}^*\in\Gamma\},$$

рассмотрим систему

$$\dot{x}=(A+bv^*)x+f(t),\ (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n. \qquad (2.39)$$

Из определения $\mathfrak{S}$ вытекает, что каждому $v\in\mathfrak{S}$ отвечает единственное п.п. по Бору решение $x(\cdot)=x(\cdot,v)$ системы (2.39). Рассмотрим, далее, задачу

$$J(v)\doteq M\{q^*x(t,v)\}\to\inf,\ v\in\mathfrak{S}\quad(q\in\mathbb{R}^n). \qquad (2.40)$$

Отметим, что аналогичная задача для случая, когда f — суть непрерывная ω-периодическая функция, удовлетворяющая условию $M\{f(t)\}=\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega f(t)dt\neq 0$, решена в [13].

Наряду с системой (2.39) рассмотрим также систему

$$\dot{p}=-p(A+bv^*)x+q^*,\ p\in\mathbb{R}^{n*}, \qquad (2.41)$$

имеющую при каждом $v\in\mathfrak{S}$ единственное п. п. по Бору решение $p(t,v)\equiv q^*(A+bv^*)^{-1}$, а т. к. $M\{q^*x(t,v)\}=-M\{p(t,v)f(t)\}$, $v\in\mathfrak{S}$, то задача (2.40) может быть переписана в виде:

$$J(v)\doteq M\{f_0(t,v)\}\to\inf,\ v\in\mathfrak{S},$$

где $f_0(t,v) \doteq q^*(A+bv^*)^{-1}f(t)$, для которой, в силу следствия 2.2 (см. также замечание 2.6), учитывая, что множество $\mathfrak{S}$ открыто в $\mathbb{R}^n$, решение $\widehat{v} \in \mathfrak{S}$ необходимо удовлетворяет равенству

$$q^*(A + b\widehat{v}^*)^{-1}b = 0. \tag{2.42}$$

Таким образом, для нахождения $\widehat{v}$ достаточно найти решение уравнения (2.42). Для этого приведем краткое описание множества $\mathfrak{S}$. Рассмотрим множество Λ, состоящее из таких векторов $\lambda = (\lambda_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$, что полином $P(\lambda, z) \doteq z^n - \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j z^{j-1}$ гурвицев и пусть $\eta \doteq [0,\ldots,0,1]\mathbb{K}^{-1}$. Тогда (см.[13], а также [14]) $\mathfrak{S} = \{-(\eta P(\lambda, A))^*,\ \lambda \in \Lambda\}$. В силу вышесказанного получаем следующее утверждение Е.Л. Тонкова в п. п. случае.

Т е о р е м а 2.6. *Пусть* $\widehat{\lambda} \in \Lambda$ — *решение уравнения* $q^*(A - b\eta P(\lambda, A))^{-1}b = 0,\ \lambda \in \Lambda$. *Тогда* $\widehat{v} = \eta P(\widehat{\lambda}, A)$ — *решение задачи* (2.40) *и* $J(\widehat{v}) = -q^*(A - b\eta P(\widehat{\lambda}, A))^{-1}M\{f(t)\}$.

3. Ряд свойств линейных п. п. по Степанову систем управления

1. Приведем ряд необходимых для дальнейшего утверждений, связанных с понятием экспоненциальной дихотомичности (э. д.) системы

$$\dot{x} = A(t)x,\ x \in \mathbb{R}^n\ A \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)),\ \mathfrak{a} \doteq d(A,0) < \infty. \tag{3.1}$$

Напомним (см., например [8; 15]), что система (3.1) называется э. д. на $\mathbb{R}$, если существует пара взаимно дополнительных проекторов $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ и положительные константы $\mathfrak{r}_j$, σ_j, $j = 1,2$ такие, что

$$\begin{cases} |P_1(t,s)| \doteq |\Phi(t)\mathfrak{P}_1\Phi^{-1}(s)| \leqslant \mathfrak{r}_1 e^{-\sigma_1(t-s)}, & -\infty < s \leqslant t < \infty, \\ |P_2(t,s)| \doteq |\Phi(t)\mathfrak{P}_2\Phi^{-1}(s)| \leqslant \mathfrak{r}_2 e^{-\sigma_2(s-t)}, & -\infty < t \leqslant s < \infty, \end{cases} \tag{3.2}$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы (3.1). В дальнейшем через $X(t,s) \doteq \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$ обозначаем ее оператор Коши и $X_\tau(t,s) \doteq X(t+\tau, s+\tau)$. Функция $(t,s) \mapsto \mathcal{G}(t,s) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$, определенная для всех $t,s \in \mathbb{R}$ равенством (здесь см. обозначения в формулах (3.2))

$$\mathcal{G}(t,s) \doteq \chi_{(-\infty,t)}(s)P_1(t,s) - \chi_{(t,\infty)}(s)P_2(t,s), \tag{3.3}$$

называется (главной) функцией Грина системы (3.1).

Имеет место следующая

Т е о р е м а 3.1. [8;15] *Пусть система* 3.1 *э. д. Тогда*

1) *существует такое* $\delta > 0$, *что для всякого* B *из пространства* $L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$, *такого, что* $d(B,0) \leqslant \delta$, *система* $\dot{x} = (A(t)+B(t))x$ *будет э. д. При этом существуют такие положительные константы* $\tilde{\mathfrak{r}}_j = \tilde{\mathfrak{r}}_j(\delta), \tilde{\sigma}_j = \tilde{\sigma}_j(\delta)$, $j = 1,2$ *что если* $\mathcal{G}(t,s;B) \doteq \chi_{(-\infty,t)}(s)P_1(t,s;B) - \chi_{(t,\infty)}(s)P_2(t,s;B)$ — *функция Грина этой системы, то для* $P_j(t,s;B)$, $j = 1,2$ *справедливы оценки, аналогичные* (3.2) *с константами* $\tilde{\mathfrak{r}}_j, \tilde{\sigma}_j$, $j = 1,2$;

2) *для всякой функции* $b \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $d(b,0) < \infty$ *система* $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ *имеет единственное ограниченное на* $\mathbb{R}$ *решение* $x(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)b(s)ds$, $t \in \mathbb{R}$, *при этом, если* $A \in S(\mathbb{R}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$ *и* $b \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, *то* $x \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Из второго утверждения теоремы 3.1 получаем, что для всех $t,s \in \mathbb{R}$ и каждого $\tau \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\mathcal{G}_\tau(t,s) - \mathcal{G}(t,s) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,\xi)(A_\tau(\xi) - A(\xi))\mathcal{G}_\tau(\xi,s)d\xi,$$

где $\mathcal{G}_\tau(\cdot,\cdot) \doteq \mathcal{G}(\cdot+\tau, \cdot+\tau)$ и, следовательно, если

$$\mathfrak{r} \doteq \max(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2), \ \sigma \doteq \min(\sigma_1, \sigma_2), \tag{3.4}$$

то при каждом $\tau \in \mathbb{R}$

$$\sup_{t,s \in \mathbb{R}} |\mathcal{G}_\tau(t,s) - \mathcal{G}(t,s)| \leqslant \frac{2\mathfrak{r}^2}{1-e^{-\sigma}} d(A_\tau, A). \tag{3.5}$$

Откуда в силу (3.2) и (3.3) получаем, что для всякого $\tau \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \sup\limits_{-\infty<s\leqslant t<\infty} |P_{1,\tau}(t,s) - P_1(t,s)| \leqslant \frac{2\mathfrak{r}^2}{1-e^{-\sigma}} d(A_\tau, A), \\ \sup\limits_{-\infty<t\leqslant s<\infty} |P_{2,\tau}(t,s) - P_2(t,s)| \leqslant \frac{2\mathfrak{r}^2}{1-e^{-\sigma}} d(A_\tau, A), \end{cases} \tag{3.6}$$

где $P_{j,\tau}(\cdot,\cdot) \doteq P_j(\cdot+\tau,\cdot+\tau)$, $j=1,2$.

Всюду далее считаем, что $A \in S(\mathbb{R}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$.

Л е м м а 3.1. *Пусть $\mu \in APM$ и $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$. Тогда для любых фиксированных $v \in \mathbb{R}_+$ и $\varsigma > 0$ отображения*

$$t \mapsto \psi^{(1)}(t;\mu,v,\varsigma) \doteq \int_{t-v-\varsigma}^{t-v} P_1(t,s)\langle \mu(s), g(s,u)\rangle ds, \tag{3.7}$$

$$t \mapsto \psi^{(2)}(t;\mu,v,\varsigma) \doteq \int_{t+v}^{t+v+\varsigma} P_2(t,s)\langle \mu(s), g(s,u)\rangle ds \tag{3.8}$$

принадлежат пространству $B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Кроме того, если множество $Q \subset APM$ равностепенно п. п. и ограничено, то при каждом $j=1,2$ подмножество функций $\{\psi^{(j)}(\cdot;\mu,v,\varsigma),\ \mu \in Q\}$ из $B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ будет также равностепенно п. п.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\mathfrak{g}(t) \doteq \langle \mu(t), g(t,u)\rangle$, $t \in \mathbb{R}$. Поскольку при каждом $\tau \in \mathbb{R}$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\psi^{(j)}(t+\tau;\mu,v,\varsigma) - \psi^{(j)}(t;\mu,v,\varsigma)| \overset{(3.4),\,(3.6)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \frac{2\mathfrak{r}^2\|\mu\|}{1-e^{-\sigma}} d(A_\tau, A)\cdot \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+\varsigma} \max_{u\in\mathfrak{U}} |g(s,u)| ds + \mathfrak{r}\varsigma d_\varsigma(\mathfrak{g}_\tau(\cdot), \mathfrak{g}(\cdot)),$$

то утверждение леммы 3.1 вытекает из теоремы 2.2 в [1] и топологической эквивалентности d_l-расстояний.

Фиксируем, далее, направленное множество $(\mathbb{A}, \prec)$, в котором $\mathbb{A}$ является множеством $\mathbb{N}$ или $(0,\infty)$ соответственно с отношениями $i \prec j$, если $i \leqslant j$ и $\alpha \prec \beta$, если $\alpha \geqslant \beta$, а также множество параметров Ω.

В дальнейшем рассматриваем множество

$$Q = Q(\mathbb{A}\times\Omega,\xi) \doteq \tag{3.9}$$
$$\doteq \{\nu(\cdot,\alpha,\omega)\subset APM,\ (\alpha,\omega)\in\mathbb{A}\times\Omega\colon \sup_{(\alpha,\omega)\in\mathbb{A}\times\Omega}\|\nu(\cdot,\alpha,\omega)\|\leqslant\xi\}$$

и направленность

$$\alpha\mapsto\eta(\alpha)\doteq\sup_{\omega\in\Omega}\|\nu(\cdot,\alpha,\omega)\|_w,\ \alpha\in\mathbb{A}. \tag{3.10}$$

Л е м м а 3.2. *Пусть* $g\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$ *и* $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}\eta(\alpha)=0$. *Тогда, если направленность* $\{\eta(h(\lambda))\}_{\lambda\in\Lambda}$ *где* $h\colon(\Lambda,\ll)\to(\mathbb{A},\prec)$, *является поднаправленностью направленности* (3.10) , *а направленность* $\{t_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\mathbb{R}$ *такая, что* $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}t_\lambda=\widehat{t}$, *то для любых фиксированных* $v\in\mathbb{R}$ *и* $\varsigma>0$ (здесь см. (3.7) и (3.8)) справедливо следующее предельное равенство:

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}(\sup_{\omega\in\Omega}|\psi^{(k)}(t_\lambda;\nu(\cdot,h(\lambda),\omega),v,\varsigma)|)=0,\ k=1,2 \tag{3.11}$$

и, кроме того,

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}(\sup_{\omega\in\Omega}|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t_\lambda,s)\langle\nu(s,h(\lambda),\omega),g(s,u)\rangle ds|)=0. \tag{3.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{g}(t)\doteq\sup\limits_{u\in\mathfrak{U}}|g(t,u)|, t\in\mathbb{R}$ и $\theta_\lambda\doteq|t_\lambda-t|$. Поскольку $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}t_\lambda=\widehat{t}$, то найдется такое $\lambda_0\in\Lambda$, что $\theta_\lambda\leqslant1$ для всех $\lambda\in\Lambda$, удовлетворяющих условию $\lambda_0\ll\lambda$. Поэтому, при этих λ имеем следующие соотношения:

$$|\psi^{(2)}(t_\lambda;\nu(\cdot,h(\lambda),\omega),v,\varsigma)|\overset{(3.2),(3.4)}{\leqslant}$$
$$\leqslant\mathfrak{r}|\int_{t_\lambda+v}^{t_\lambda+v+\varsigma}|X(t_\lambda,s)\langle\nu(s,h(\lambda),\omega),g(s,u)\rangle ds|\overset{(3.9)}{\leqslant}$$
$$\leqslant e^{\mathfrak{a}}(\xi\int_v^{v+\theta_\lambda}(|X_{\widehat{t}}(0,s)|\mathfrak{g}_{\,\widehat{t}}(s)+|X_{\widehat{t}+\varsigma}(0,s)|\mathfrak{g}_{\,\widehat{t}+\varsigma}(s))ds+$$
$$+\sup_{\omega\in\Omega}|\int_{\mathbb{R}}\langle\nu(s,h(\lambda),\omega),\varphi(s,u)\rangle ds|,$$

где $\varphi(s,u) \doteq \chi_{[\widehat{t}+v,\widehat{t}+v+\varsigma]}(s)X(\widehat{t},s)g(s,u)$. Так как $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}\eta(\alpha) = 0$ и $\{\eta(h(\lambda))\}_{\lambda\in\Lambda}$ — поднаправленность направленности (3.10), то $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}\eta(h(\lambda)) = 0$. Поэтому из приведенных выше неравенств, учитывая, что $\mathfrak{g} \in L_1^{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$, $\varphi \in \mathfrak{V}_1(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$ и $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}\theta_\lambda = 0$, получаем равенство (3.11) при $k=2$. Аналогично доказывается это равенство и при $k=1$.

Далее, из (3.2) и (3.3) вытекает, что отображение

$$(s,u)\mapsto\varphi(s,u)\doteq\mathcal{G}(\widehat{t},s)g(s,u)$$

принадлежат пространству $\mathfrak{V}_1(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$ и, следовательно,

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}(\sup_{\omega\in\Omega}|\int_{\mathbb{R}}\langle\nu(s,h(\lambda),\omega),\varphi(s,u)\rangle ds|)=0.$$

Откуда в силу неравенства

$$|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t_\lambda,s)\langle\nu(s,h(\lambda),\omega),g(s,u)\rangle ds|\leqslant$$

$$\leqslant e^{\mathfrak{a}}(2\xi\mathfrak{r}\int_{\widehat{t}}^{\widehat{t}+\theta_\lambda}|X(\widehat{t},s)|\,\mathfrak{g}(s)ds+\sup_{\omega\in\Omega}|\int_{\mathbb{R}}\langle\nu(s,h(\lambda),\omega),\varphi(s,u)\rangle ds|),$$

получаем равенство (3.12).

Л е м м а 3.3. *Пусть* $g\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, *множество* Q, *определенное равенством* (3.9), *является равностепенно п.п. и* $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}\eta(\alpha)=0$. *Тогда* (*здесь см.* (3.7), (3.8)) *для любых фиксированных* $v\in\mathbb{R}_+$ *и* $\varsigma>0$

$$\lim_{\alpha\in\mathbb{A}}(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|\psi^{(k)}(t;\nu(\cdot,\alpha,\omega),v,\varsigma)|)=0,\ k=1,2,\tag{3.13}$$

$$\lim_{\alpha\in\mathbb{A}}(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\nu(s,\alpha,\omega),g(s,u)\rangle ds|)=0.\tag{3.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что (3.13) неверно. Тогда найдутся константа $\gamma>0$, конфинальное в $\mathbb{A}$ множество $\alpha_1\prec\alpha_2\prec\ldots$ точек $\alpha_j\in\mathbb{A}$, $j\in\mathbb{N}$ и последовательности

$\{t_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$ такие, что при всех $j \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство

$$|\psi^{(k)}(t_j;\alpha_j,\omega_j)| \doteq |\psi^{(k)}(t_j;\nu(\cdot,\alpha_j,\omega_j),\upsilon,\varsigma)| > \gamma. \tag{3.15}$$

Так как множество Q равностепенно п. п. и ограничено, то по лемме 3.1 последовательность $\{\psi^{(k)}(\cdot;\alpha_j,\omega_j)\}_{j=1}^{\infty} \subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ также равностепенно п. п. Поэтому для $\gamma/4 > 0$ найдется такое $L > 0$, что в каждом отрезке $[-t_j,-t_j+L]$, $j \in \mathbb{N}$ существует $\tau_j \in \bigcap\limits_{l=1}^{\infty} E_B(\psi^{(k)}(\cdot;\alpha_l,\omega_l),\gamma/4)$. Так как $\{t_j+\tau_j\}_{j=1}^{\infty} \subset [0,L]$, то можно считать, что $\lim\limits_{j\to\infty}(t_j+\tau_j) = \widehat{t} \in [0,L]$. Далее, поскольку образ монотонно возрастающего отображения $j \mapsto \alpha_j \in (\mathbb{A},\prec)$, $j \in (\mathbb{N},\leqslant)$ является конфинальным множеством в $(\mathbb{A},\prec)$, то [16] $\{\eta(\alpha_j)\}_{j=1}^{\infty}$ — поднаправленность направленности $\{\eta(\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$. По лемме 2.2, где $(\Lambda,\ll) = (\mathbb{N},\leqslant)$, $h(j) = \alpha_j$, $j \in \mathbb{N}$, найдется такое $j_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $j \geqslant j_0$ будет выполнено неравенство $\sup\limits_{\omega\in\Omega}|\psi^{(k)}(t_j+\tau_j;\alpha_j,\omega_j)| < \gamma/4$. При этих j, в силу выбора точек τ_j, получаем следующие соотношения:

$$|\psi^{(k)}(t_j;\alpha_j,\omega_j)| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}}|\psi^{(k)}(t+\tau_j;\alpha_j,\omega_j) - \psi^{(k)}(t;\alpha_j,\omega_j)| +$$

$$+|\psi^{(k)}(t_j+\tau_j;\alpha_j,\omega_j)| < \frac{\gamma}{4} + \sup_{\omega\in\Omega}|\psi^{(k)}(t_j+\tau_j;\alpha_j,\omega)| < \frac{\gamma}{4} + \frac{\gamma}{4} = \frac{\gamma}{2},$$

из которых вытекает противоречие с неравенством (3.15). Точно так же методом от противного, используя равенство (3.12) леммы 3.2, доказывается равенство (3.14).

Далее нам понадобится следующая

Л е м м а 3.4. *Пусть* $(\mathfrak{Y},\|\cdot\|)$ *— банахово пространство и* $f \in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для каждого измеримого множества* $E \subset [0,1]$, $\operatorname{mes} E \leqslant \delta$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_E \|f_t(s)\| ds \leqslant \varepsilon \quad (f_t(\cdot) \doteq f(\cdot+t)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, то (также как для случая, когда $f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (см. [7. С. 237])) для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такая п.п. по Степанову функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{Y}$, что $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} \|g(t)\| \doteq \mathfrak{g} < \infty$ и $d(g(\cdot), f(\cdot)) \leqslant \varepsilon/2$. Теперь, взяв $\delta = \varepsilon/2\,\mathfrak{g}$, получаем, что для каждого измеримого подмножества E отрезка [0,1], мера Лебега которого не превосходит δ, будут выполнены следующие соотношения:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_E \|f_t(s)\| ds \leqslant d(g(\cdot), f(\cdot)) + \mathfrak{g}\,\mathrm{mes}\, E \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Л е м м а 3.5. *Пусть* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$, *множество* Q, *определенное равенством* (3.9) *является равностепенно п. п. и* $\lim_{\alpha\in\mathbb{A}} \eta(\alpha) = 0$. *Тогда, для любых фиксированных* $i \in \mathbb{Z}_+$ *и* $\mathfrak{k} \in (0, \infty)$ *имеют место следующие равенства:*

$$\lim_{\alpha\in\mathbb{A}} \big(\sup_{\varsigma\in(0,\mathfrak{k}]} \big(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\psi^{(k)}(t; \nu(\cdot, \alpha, \omega), i\varsigma, \varsigma)| \big)\big) = 0, \;\; k = 1, 2. \tag{3.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем равенство (3.16) при $k = 2$. Допустим противное. В этом случае найдутся такая константа $\gamma > 0$, конфинальное в $\mathbb{A}$ множество $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \ldots$ точек $\alpha_j \in \mathbb{A}$, $j \in \mathbb{N}$ и последовательность $\{\varsigma_j\}_{j=1}^{\infty} \subset (0, \mathfrak{k}]$, что при всех $j \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство

$$\Psi_j \doteq \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\psi^{(2)}(t; \nu(\cdot, \alpha_j, \omega), i\varsigma_j, \varsigma_j)| > \gamma/4. \tag{3.17}$$

С другой стороны, т. к. $\{\varsigma_j\}_{j=1}^{\infty} \subset (0, \mathfrak{k}]$, то без ограничения общности можно считать, что $\varsigma_j \to \widehat{\varsigma} \in [0, \mathfrak{k}]$ при $j \to \infty$. Полагаем, далее, $\mathfrak{g}(t) \doteq \max_{u\in\mathfrak{U}} |g(t, u)|$, $t \in \mathbb{R}$, $\vartheta_j \doteq |\varsigma_j - \widehat{\varsigma}|$. При всех $j \in \mathbb{N}$ имеем следующие соотношения:

$$\Psi_j \leqslant \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} \Big| \int_{t+i\varsigma_j}^{t+i\widehat{\varsigma}} P_2(t, s) \langle \nu(s, \alpha_j, \omega), g(s, u) \rangle ds \Big| + \Psi^{(2)}(\alpha_j) +$$

$$+ \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} \Big| \int_{t+(i+1)\widehat{\varsigma}}^{t+(i+1)\varsigma_j} P_2(t, s) \langle \nu(s, \alpha_j, \omega), g(s, u) \rangle ds \Big| \overset{(3.2),\,(3.4)}{\leqslant}$$

$$\leqslant 2\xi\mathfrak{r}e^{\mathfrak{a}}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+(i+1)\vartheta_j}\mathfrak{g}(s)ds+\Psi^{(2)}(\alpha_j),$$

где $\Psi^{(2)}(\alpha_j)\doteq\Psi^{(2)}(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_j}$, а

$$\Psi^{(2)}(\alpha)\doteq\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|\psi^{(2)}(t;\nu(\cdot,\alpha_j,\omega),i\widehat{\varsigma},\widehat{\varsigma}|,\ \alpha\in\mathbb{A}.$$

Далее, поскольку образ монотонно возрастающего отображения $j\mapsto\alpha_j$, $j\in(\mathbb{N},\leqslant)$ является конфинальным множеством в $(\mathbb{A},\prec)$, то направленность $\{\Psi^{(2)}(\alpha_j)\}_{j=1}^{\infty}$ — поднаправленность направленности $\{\Psi^{(2)}(\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$. Следовательно, по равенству (3.13) при $k=2$, и $v=i\widehat{\varsigma},\varsigma=\widehat{\varsigma}$ получаем, что $\lim\limits_{j\to\infty}\Psi^{(2)}(\alpha_j)=0$ и поскольку $\lim\limits_{j\to\infty}\vartheta_j=0$, а $\mathfrak{g}\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то (здесь см. лемму 3.4) из приведенных выше неравенств вытекает, что $\lim\limits_{j\to\infty}\Psi_j=0$. Последнее несовместно с (3.17). Таким образом, равенство (3.16) при $k=2$ доказано. Доказательство его при $k=1$ аналогично случаю $k=2$, и мы его опускаем.

2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}=A(t)x+\langle\nu(t,\alpha,\omega),g(t,u)\rangle z(t),\ (\alpha,\omega)\in\mathbb{A}\times\Omega\},$$

где $g\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$ и $z(\cdot)\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Ясно, что (здесь см. теоремы 2.1 и 3.1)

$$\mathfrak{x}(t;z(\cdot),\alpha,\omega)=\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\nu(s,\alpha,\omega),g(s,u)\rangle z(s)ds,\ t\in\mathbb{R},$$

суть п. п. по Бору решение этой системы.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть функция* $g\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$ *такая, что* $\mathfrak{d}\doteq\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}}(\max\limits_{u\in\mathfrak{U}}|g(t,u)|)<\infty$, *множество* Q, *заданное равенством* (3.9), *является равностепенно п. п. и* $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}\eta(\alpha)=0$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *найдется такое* $\alpha_0\in\mathbb{A}$, *что для всех*

$\alpha \in \mathbb{A}$, *удовлетворяющих условию* $\alpha_0 \prec \alpha$ *и каждой функции* $z \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, *выполнено неравенство*

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\mathfrak{x}(t; z(\cdot), \alpha, \omega)| \leqslant \varepsilon \left(\xi\mathfrak{d}(\frac{\mathfrak{r}_1}{\sigma_1} + \frac{\mathfrak{r}_2}{\sigma_2}) + \|z\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}\right). \quad (3.18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольную функцию $z \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Так как п. п. по Бору функция равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такая константа $\varsigma = \varsigma(z(\cdot)) \in (0, \mathfrak{k}]$, где $\mathfrak{k} \doteq \varepsilon/\xi\mathfrak{d}$, что

$$\omega_\varsigma[z, \mathbb{R}] \doteq \sup_{\substack{t,s\in\mathbb{R},\\ |t-s|<\varsigma}} |z(t) - z(s)| < \varepsilon. \quad (3.19)$$

Теперь имеем следующие соотношения:

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\mathfrak{x}(t; z(\cdot), \alpha, \omega)| \overset{(3.3)}{=}$$

$$= \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\int_{-\infty}^{t} P_1(t,s)\langle\nu(s,\alpha,\omega), g(s,u)\rangle z(s)ds -$$

$$- \int_{t}^{\infty} P_2(t,s)\langle\nu(s,\alpha,\omega), g(s,u)\rangle z(s)ds| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} \sum_{i=0}^{\infty}\{|\int_{t-i\varsigma-\varsigma}^{t-i\varsigma} P_1(t,s)\langle\nu(s,\alpha,\omega), g(s,u)\rangle(z(s)-z(t-i\varsigma-\varsigma))ds+$$

$$+ \int_{t-i\varsigma-\varsigma}^{t-i\varsigma} P_1(t,s)\langle\nu(s,\alpha,\omega), g(s,u)\rangle ds \cdot z(t-i\varsigma-\varsigma) -$$

$$- \int_{t+i\varsigma}^{t+i\varsigma+\varsigma} P_2(t,s)\langle\nu(s,\alpha,\omega), g(s,u)\rangle(z(s) - z(t+i\varsigma)ds +$$

$$- \int_{t+i\varsigma}^{t+i\varsigma+\varsigma} P_2(t,s)\langle\nu(s,\alpha,\omega), g(s,u)\rangle ds \cdot z(t+i\varsigma)|\} \overset{(3.2)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \xi\mathfrak{d}(\frac{\mathfrak{r}_1}{\sigma_1} + \frac{\mathfrak{r}_2}{\sigma_2})\omega_\varsigma[z, \mathbb{R}] + \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=0}^{\infty} \Psi^{(k)}(\alpha, i\varsigma, \varsigma) \cdot \|z\|_C,$$

где

$$\Psi^{(k)}(\alpha, i\varsigma, \varsigma) \doteq \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\psi^{(k)}(t; \nu(\cdot, \alpha, \omega), i\varsigma, \varsigma)|, \;\; k = 1, 2,$$

а отображения $t \mapsto \psi^{(k)}(t; \nu(\cdot, \alpha, \omega), i\varsigma, \varsigma)$, $k = 1, 2$ задаются равенствами (3.7) и (3.8) соответственно при $\mu(\cdot) = \nu(\cdot, \alpha, \omega)$ и $v = i\varsigma$.

Таким образом, в силу (3.19), для всех $\alpha \in \mathbb{A}$ и $z \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\mathfrak{x}(t; z(\cdot), \alpha, \omega)| \leqslant \tag{3.20}$$

$$\leqslant 2\varepsilon\mathfrak{d}(\frac{\mathfrak{r}_1}{\sigma_1} + \frac{\mathfrak{r}_2}{\sigma_2}) + \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=0}^{\infty} \Psi^{(k)}(\alpha, i\varsigma, \varsigma) \cdot \|z\|_C.$$

Далее, т. к. для любого $N \in \mathbb{N}$ и каждого $k = 1, 2$

$$\sum_{i=0}^{N} \sup_{(\alpha,\varsigma)\in\mathbb{A}\times(0,\mathfrak{k}]} \Psi^{(k)}(\alpha, i\varsigma, \varsigma) \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathfrak{d}\frac{\mathfrak{r}_k}{\sigma_k} \cdot \sup_{\varsigma\in(0,\mathfrak{k}]} ((1 - e^{-\sigma_k\varsigma}) \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i\sigma_k\varsigma}) = 2\mathfrak{d}\frac{\mathfrak{r}_k}{\sigma_k},$$

то ряды $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \Psi^{(k)}(\alpha, i\varsigma, \varsigma)$ являются равномерно сходящимися на множестве $\mathbb{A} \times (0, \mathfrak{k}]$. Поэтому найдется такое $i_0 = i_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $(\alpha, \varsigma) \in \mathbb{A} \times (0, \mathfrak{k}]$ будет выполнено неравенство

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Psi^{(k)}(\alpha, i\varsigma, \varsigma) \leqslant \sum_{i=0}^{i_0} \Psi^{(k)}(\alpha, i\varsigma, \varsigma) + \frac{\varepsilon}{4}, \;\; k = 1, 2. \tag{3.21}$$

Так как множество Q равностепенно п. п., $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}} \eta(\alpha) = 0$ (см. (3.10)), $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$ и $\varsigma \in (0, \mathfrak{k}]$, то по лемме 3.5, учитывая принятое обозначение при $i = 0 \ldots i_0$, получаем равенства $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}(\sup\limits_{\varsigma\in(0,\mathfrak{k}]} \Psi^{(k)}(\alpha, i\varsigma, \varsigma)) = 0$, $k = 1, 2$, и, следовательно, найдется такое $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon/4) \in \mathbb{A}$, что для всех $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha_0 \prec \alpha$ будет иметь место неравенство

$$\sum_{i=0}^{i_0} \sup_{\varsigma \in (0,\mathfrak{k}]} \Psi^{(k)}(\alpha, i\varsigma, \varsigma) < \frac{\varepsilon}{4}, \; k = 1, 2.$$

Откуда совместно с неравенствами (3.20) и (3.21) вытекает, что для всех $\alpha \in \mathbb{A}$, удовлетворяющих условию $\alpha_0 \prec \alpha$ и любой функции $z \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, будет выполнено неравенство (3.18).

4. О некоторых свойствах линейных п.п. по Степанову систем с управлениями, аппроксимирующих заданное мерозначное п. п. управление

1. В третьем разделе работы [1] показано, что для каждого $\mu \in S(\mathbb{R} \times \Omega, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, где, здесь и далее, (Ω, ρ) — компактное метрическое пространство, существует последовательность функций $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset S(\mathbb{R} \times \Omega, \mathfrak{U})$, обладающая свойствами, указанными в [1] (см. теорему 3.1).

Приведем еще ряд необходимых в дальнейшем свойств этих функций. С этой целью для удобства изложения напомним кратко конструкцию указанной последовательности $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$, аппроксимирующей заданное $\mu \in S(\mathbb{R} \times \Omega, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$.

Для $j \in \mathbb{N}$ строим такое открытое покрытие $\mathcal{U}_1^{(j)} \ldots \mathcal{U}_{p_j}^{(j)}$ компакта $\mathfrak{U}$, что $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant p_j} (\mathrm{diam}\,\mathcal{U}_k^{(j)}) \leqslant 1/j$, и через $\{\alpha_k^{(j)}\}_{k=1}^{p_j}$ обозначим непрерывное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Для каждого $k = 1 \ldots p_j$ фиксируем точку $u_k^{(j)} \in U \cap \mathcal{U}_k^{(j)}$, в которой $\alpha_k^{(j)}(u_k^{(j)}) > 0$, и рассмотрим функцию

$$(t, \omega) \mapsto \lambda_k^{(j)}(t, \omega) \doteq \langle \mu(t, \omega), \alpha_k^{(j)}(u) \rangle \in [0, 1], \; (t, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega.$$

Так как $\mu \in S(\mathbb{R} \times \Omega, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, то (см.в [1] определение 1.1)

$\{\lambda_k^{(j)}\}_{k=1}^{p_j} \subset S(\mathbb{R}\times\Omega,[0,1])$ и при этом

$$\sum_{k=1}^{p_j}\lambda_k^{(j)}(t,\omega)=1,\ (t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega.$$

Рассмотрим, далее, отображение $(t,\omega)\mapsto\Delta_j(t,\omega)\in\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, $(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega$, заданное при каждом $j\in\mathbb{N}$ равенством

$$\Delta_j(t,\omega)\doteq\sum_{k=1}^{p_j}\lambda_k^{(j)}(t,\omega)\delta_{u_k^{(j)}},\ (t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega. \tag{4.1}$$

В третьем разделе работы [1] показано, что при каждом $j\in\mathbb{N}$ $\Delta_j\in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ и $\mathrm{Mod}(\Delta_j)\subset\mathrm{Mod}(\mu)$.

Выбираем число $a>0$ таким, чтобы $\frac{4\pi}{a}\in\mathrm{Mod}(\mu)$ и отрезок $[0,a]$ разбиваем на j равных отрезков $I_l^{(j)}=[\frac{l-1}{j}a,\frac{l}{j}a]$, $l=1,\ldots,j$. В свою очередь каждый отрезок $I_l^{(j)}$ разобьем на p_j частичных подотрезков $I_{l_k}^{(j)}(\xi,\omega)$, $k=1,\ldots,p_j$, зависящих от $(\xi,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega$, определенных в [1] равенствами (3.6). Сейчас рассмотрим последовательность $\{w_m^{(j)}\}_{m\in\mathbb{Z}}$, состоящую из отображений $w_m^{(j)}:[0,a]\times\Omega\to\mathfrak{U}$, $m\in\mathbb{Z}$, определенных равенством

$$w_m^{(j)}(t,\omega)\doteq\sum_{l=1}^{j}\chi_{I_l^{(j)}}(t)\sum_{k=1}^{p_j}\chi_{I_{l_k}^{(j)}(ma,\omega)}(t)u_k^{(j)},\ (t,\omega)\in[0,a]\times\Omega.$$

Пусть, далее, при каждом $j\in\mathbb{N}$ функция $u_j:\mathbb{R}\times\Omega\to\mathfrak{U}$ определена на каждом множестве $[ma,(m+1)a]\times\Omega$, $m\in\mathbb{Z}$ равенством

$$u_j(t+ma,\omega)\doteq w_m^{(j)}(t,\omega),\ (t,\omega)\in[0,a]\times\Omega. \tag{4.2}$$

В [1] показано, что так определенная последовательность функций $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}\subset S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathfrak{U})$ обладает свойствами, указанными в теореме 3.1 .

Фиксируем отображение $A \in S(\mathbb{R}\times\Omega, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$ и всюду далее предполагаем, что оно удовлетворяет условиям:

I) выполнено соотношение

$$\mathfrak{d} \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}(\sup_{\omega\in\Omega}|A(t,\omega)|) < \infty; \tag{4.3}$$

II) при каждом $\omega\in\Omega$ однородная система уравнений

$$\dot{y} = A(t,\omega)y,\ (t,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

допускает э. д., причем существуют такие положительные константы $\tilde{\mathfrak{r}}_j, \tilde{\sigma}_j,\ j=1,2,$ не зависящие от $\omega\in\Omega,$ что для функции Грина

$$\mathcal{G}(t,s;\omega) = \chi_{(-\infty,t)}(s)P_1(t,s;\omega) - \chi_{(t,\infty)}(s)P_2(t,s;\omega),\ t,s\in\mathbb{R}$$

этой системы справедливы оценки

$$\begin{cases} |P_1(t,s;\omega)| \leqslant \tilde{\mathfrak{r}}_1 e^{-\tilde{\sigma}_1(t-s)},\ -\infty<s\leqslant t<\infty,\\ |P_2(t,s;\omega)| \leqslant \tilde{\mathfrak{r}}_2 e^{-\tilde{\sigma}_2(s-t)},\ -\infty<t\leqslant s<\infty. \end{cases} \tag{4.4}$$

В дальнейшем для оператора Коши $X(\cdot,\cdot;\omega)$ (как обычно $X_\tau(\cdot,\cdot;\omega) \doteq X(\cdot+\tau,\cdot+\tau;\omega))$ системы $\dot{y}=A(t,\omega)y$ используем, не оговаривая специально, оценки

$$\sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega}|X_{ma}(\alpha,s;\omega)| \leqslant e^{\mathfrak{d}(s+\alpha)},\ s,\alpha\geqslant 0\ (a>0)$$

$$\sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega}|X_{ma}(\alpha,s_1;\omega)-X_{ma}(\alpha,s_2;\omega)| \leqslant \mathfrak{d}e^{\mathfrak{d}(a+\alpha)}\cdot|s_1-s_2|,$$

в которых $s_1,s_2\in[0,a],$ и используем описанную выше конструкцию функций $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathfrak{U}),$ аппроксимирующей отображение $\mu\in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})).$

Полагаем, далее, при каждом $\omega\in\Omega$ и $j\in\mathbb{N}$

$$\begin{cases} \nu_j(\cdot,\omega) \doteq \mu(\cdot,\omega) - \delta_{u_j(\cdot,\omega)},\\ \nu_j^{(1)}(\cdot,\omega) \doteq \mu(\cdot,\omega) - \Delta_j(\cdot,\omega),\\ \nu_j^{(2)}(\cdot,\omega) \doteq \Delta_j(\cdot,\omega) - \delta_{u_j(\cdot,\omega)}, \end{cases} \tag{4.5}$$

где отображения $u_j \in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathfrak{U})$, $\Delta_j \in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ задаются равенствами (4.1) и (4.2) соответственно.

Л е м м а 4.1. *Пусть* $g \in S(\mathbb{R}, C(\Omega\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$. *Тогда для любого фиксированного* $\alpha \in [0,a]$ *и каждого* $\mathfrak{l}=1,2$

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega}\Big|\int\limits_{ma}^{(m+1)a} X(ma+\alpha,s;\omega)\langle\nu_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega),g(s,\omega,u)\rangle ds\Big|\Big)=0. \quad (4.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала равенство (4.6) при $\mathfrak{l}=2$ в предположении, что функция g принадлежит $B(\mathbb{R}\times\Omega\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$. В этом случае $\mathfrak{g}\doteq\|g\|_{C(\mathbb{R}\times\Omega\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)}<\infty$, и если

$$q_j \doteq \operatorname*{supremum}_{\substack{(t_\mathfrak{l},\omega,u)\in\mathbb{R}\times\Omega\times\mathfrak{U},\mathfrak{l}=1,2\\ |t_1-t_2|\leqslant a/j}} |g(t_1,\omega,u)-g(t_2,\omega,u)|,$$

то [10] $q_j\downarrow 0$ при $j\to\infty$. Фиксируем далее при $l=1\dots j$ точки $t_l^{(j)}\in I_l^{(j)}=[\frac{l-1}{j}a,\frac{l}{j}a]$. Если обратиться к доказательству леммы 3.5 в [1], то можно заметить, что при каждом $l=1\dots j$ $(j\in\mathbb{N})$, для всех $(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega$ справедливо равенство

$$\int_{I_l^{(j)}}\langle\nu_j^{(2)}(s+ma,\omega),g(t_l^{(j)}+ma,\omega,u)\rangle ds=0,$$

в силу которого, при всех $j\in\mathbb{N}$ и $(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega$, имеем следующие соотношения:

$$|I_j(m,\omega)|\doteq\Big|\int_{ma}^{(m+1)a} X(ma+\alpha,s;\omega)\langle\nu_j^{(2)}(s,\omega),g(s,\omega,u)\rangle ds\Big|\leqslant$$

$$\leqslant 2\mathfrak{d}\sum_{l=1}^{j}\int_{I_l^{(j)}}|X_{ma}(\alpha,s;\omega)-X_{ma}(\alpha,t_l^{(j)};\omega)|ds+$$

$$+\sum_{l=1}^{j}|X_{ma}(\alpha,t_l^{(j)};\omega)|\cdot\Big|\int_{I_l^{(j)}}\langle\nu_j^{(2)}(s+ma,\omega),g(s+ma,\omega,u)\rangle ds\Big|\leqslant$$

$$\leqslant 2ae^{\mathfrak{d}(a+\alpha)}\Big(\frac{a\mathfrak{d}}{j}+q_j\Big).$$

Откуда получаем равенство (4.6) для $\mathfrak{l} = 2$ при условии, что g принадлежит пространству $B(\mathbb{R} \times \Omega \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$.

Пусть теперь отображение $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R}^n))$. В этом случае рассмотрим при каждом $h > 0$ его стекловское усреднение

$$(t, \omega, u) \mapsto g(t, \omega, u; h) \doteq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} g(s, \omega, u) ds,$$

которое принадлежит пространству $B(\mathbb{R} \times \Omega \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$ и при каждом $l > 0$ (см. теорему 1.2 из [1])

$$\lim_{h \downarrow 0} (\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+l} \max_{(\omega,u) \in \Omega \times \mathfrak{U}} |g(s, \omega, u) - g(s, \omega, u; h))| ds) = 0.$$

Поэтому, учитывая справедливость равенства (4.6) для любого фиксированного отображения из пространства $B(\mathbb{R} \times \Omega \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$, из неравенства

$$\sup_{(m,\omega) \in \mathbb{Z} \times \Omega} |I_j(m, \omega)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{(m,\omega) \in \mathbb{Z} \times \Omega} | \int_{ma}^{(m+1)a} X(ma + \alpha, s; \omega) \langle \nu_j^{(2)}(s, \omega), g(s, \omega, u; h) \rangle ds| +$$

$$+ 2a e^{\mathfrak{d}(\alpha + a)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{a} \int_t^{t+a} \max_{(\omega,u) \in \Omega \times \mathfrak{U}} |g(s, \omega, u) - g(s, \omega, u; h))| ds$$

получаем (4.6) при условии, что $g \in S(\mathbb{R}, C(\Omega \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$.

Далее, из неравенств

$$| \int_{ma}^{(m+1)a} X(ma + \alpha, s; \omega) \langle \nu_j^{(2)}(s, \omega), g(s, \omega, u) \rangle ds| \leqslant$$

$$\leqslant | \int_{ma}^{(m+1)a} X(ma + \alpha, s; \omega)| \times$$

$$\times (\sum_{k=1}^{p_j} \int_{\mathfrak{U}} \alpha_k^{(j)}(u) |g(s, \omega, u) - g(s, \omega, u_k^{(j)})| \mu(s, \omega)(du)| ds \leqslant$$

$$\leqslant \mathfrak{d} a e^{\mathfrak{d}(\alpha + a)} \cdot \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{a} \int_t^{t+a} \omega_{\frac{1}{j}} [g(s, \cdot, \cdot), \Omega \times \mathfrak{U}] ds,$$

леммы 1.3 из [1] и топологической эквивалентности d_l-расстояний получаем утверждение леммы 4.1 при $\mathfrak{l}=1$.

С л е д с т в и е 4.1. *Пусть* $g \in S(\mathbb{R}, C(\Omega \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$. *Тогда при каждом* $\mathfrak{l}=1,2$

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}\Big|\int_{[\frac{t}{a}]a}^{t} X(t,s;\omega)\langle\nu_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega), g(s,\omega,u)\rangle ds\Big|\Big)=0 \qquad (4.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$\mathfrak{f}_j^{(\mathfrak{l})}(t,\omega)\doteq\langle\nu^{(\mathfrak{l})}(t,\omega), g(t,\omega,u)\rangle,\ \ (t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega$$

и допустим, что равенство (4.7) неверно. Тогда найдутся такая константа $\gamma>0$, а также две последовательности $\{j_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ и $\{(t_i,\omega_i)\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}\times\Omega$, что при всех $j\in\mathbb{N}$

$$\mathfrak{I}_i^{(\mathfrak{l})}\doteq\Big|\int_{[\frac{t_i}{a}]a}^{t_i} X(t_i,s;\omega_i)\mathfrak{f}_{j_i}^{(\mathfrak{l})}(s,\omega_i)ds\Big|>\gamma. \qquad (4.8)$$

С другой стороны, представим каждую точку $t_i,\ \ i\in\mathbb{N}$ в виде $t_i=m_ia+\theta_ia$, где $m_i\in\mathbb{Z}$ и $\theta_i\in[0,1)$, и будем считать, чтобы не загромождать обозначений, что $\theta_i\to\hat{\theta}\in[0,1]$ при $i\to\infty$. Следовательно, найдется такое $i_0\in\mathbb{N}$, что для всех $i\geqslant i_0$ будет выполнено неравенство $\theta_i\leqslant 1+\hat{\theta}$. При этих i имеем следующие соотношения:

$$\mathfrak{I}_i^{(\mathfrak{l})}\leqslant\Big|\int_{\theta_ia}^{\hat{\theta}a} X_{m_ia}(\theta_ia,s;\omega_i)\mathfrak{f}_{j_i}^{(\mathfrak{l})}(s+m_ia,\omega_i)ds\Big|+$$

$$+|X_{m_ia}(\theta_ia,\hat{\theta}a;\omega_i)|\cdot\Big|\int_{m_ia}^{m_ia+\hat{\theta}a} X(m_ia+\hat{\theta}a,s;\omega_i)\mathfrak{f}_{j_i}^{(\mathfrak{l})}(s,\omega_i)ds\Big|\leqslant$$

$$\leqslant 2e^{2a\mathfrak{d}}\int_t^{t+\vartheta_ja}\mathfrak{g}(s)ds+\sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega}\Big|\int_{ma}^{(m+1)a} X(ma+\alpha,s;\omega)\times$$

$$\times\langle\nu_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega),\varphi(s,\omega,u)\rangle ds\Big|),$$

где $\mathfrak{g}(t) \doteq \max\limits_{(\omega,u)\in\Omega\times\mathfrak{U}} |g(t,\omega,u)|$, $\vartheta_j \doteq |\theta_i - \hat{\theta}|$, $\varphi(t,\omega,u) \doteq \psi(t)g(t,\omega,u)$ и где, в свою очередь, $\psi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — a-периодическая функция, определенная на отрезке $[0,a]$ равенством $\psi(t) = \chi_{[0,a\hat{\theta}]}(t)$. Так как $\varphi \in S(\mathbb{R}, C(\Omega\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, то, используя лемму 4.1 для этой функции при $\alpha = \hat{\theta}a$, принимая во внимание, что $\mathfrak{g}\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\lim\limits_{i\to\infty}\vartheta_i = 0$ (здесь см. лемму 3.4), из полученного выше соотношения получаем, что $\lim\limits_{i\to\infty}\mathfrak{I}_i^{(\mathfrak{l})} = 0$, а это противоречит (4.8).

С л е д с т в и е 4.2. *Пусть* $g\in S(\mathbb{R}, C(\Omega\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$. *Тогда при каждом* $\mathfrak{l} = 1,2$ *имеют место следующие равенства:*

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega}\Big|\int\limits_{(m-1)a}^{ma} P_1(ma,s;\omega)\langle\nu_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega), g(s,\omega,u)\rangle ds\Big|\Big) = 0, \quad (4.9)$$

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega}\Big|\int\limits_{ma}^{(m+1)a} P_2(ma,s;\omega)\langle\nu_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega), g(s,\omega,u)\rangle ds\Big|\Big) = 0. \quad (4.10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку

$$P_k(ma,s;\omega) = P_k(ma,ma;\omega)X(ma,s;\omega),\ \ k=1,2,$$

то равенства (4.9), (4.10) вытекают из оценок (4.4) и утверждения леммы 4.1 при $\alpha = 0$.

С л е д с т в и е 4.3. *Пусть* $g\in S(\mathbb{R}, C(\Omega\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$. *Тогда при каждом* $\mathfrak{l} = 1,2$

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega}\Big|\int_{-\infty}^{ma} P_1(ma,s;\omega)\langle\nu_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega), g(s,\omega,u)\rangle ds\Big|\Big) = 0, \quad (4.11)$$

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega}\Big|\int_{ma}^{\infty} P_2(ma,s;\omega)\langle\nu_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega), g(s,\omega,u)\rangle ds\Big|\Big) = 0. \quad (4.12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функция g принадлежит $S(\mathbb{R}, C(\Omega \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$, то

$$\mathfrak{k} \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{(\omega,u)\Omega\times\mathfrak{U}} |g(s,\omega,u)|ds < \infty.$$

Далее, т. к. ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} exp(-ia\tilde{\sigma}_2)$ сходящийся, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое i_0, что $\sum\limits_{i=i_0+1}^{\infty} exp(-ia\tilde{\sigma}_2) < \varepsilon/4\tilde{\mathfrak{r}}_2\mathfrak{k}$. Сейчас, обозначив $\mathfrak{f}_j^{(\mathfrak{l})}(t,\omega) \doteq \langle \nu_j^{(\mathfrak{l})}(t,\omega), g(t,\omega,u)\rangle$, имеем для всех $j \in \mathbb{N}$ и $(m,\omega) \in \mathbb{Z} \times \Omega$ следующие соотношения:

$$\mathfrak{J}_j^{(\mathfrak{l})}(m,\omega) \doteq |\int_{ma}^{\infty} P_2(ma,s;\omega)\mathfrak{f}_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega)ds| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{i_0} |\int_{(m+i)a}^{(m+i)a+a} P_2(ma,s;\omega)\mathfrak{f}_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega)ds| +$$

$$+2\tilde{\mathfrak{r}}_2 \sum_{i_0+1}^{\infty} \int_{(m+i)a}^{(m+i)a+a} e^{-\tilde{\sigma}_2(s-ma)} \max_{(\omega,u)\in\Omega\times\mathfrak{U}} |g(s,\omega,u)|ds + 2\tilde{\mathfrak{r}}_2\mathfrak{k} \sum_{i_0+1}^{\infty} e^{-ia\tilde{\sigma}_2} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{i_0} |X_{ma}(0,ia;\omega)| \cdot |\int_{(m+i)a}^{(m+i)a+a} P_2((m+i)a,s;\omega)\mathfrak{f}_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega)ds| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + i_0 e^{i_0 a\mathfrak{d}} \sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega} |\int_{ma}^{(m+1)a} P_2(ma,s;\omega)\mathfrak{f}_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega)ds|.$$

Откуда в силу равенства (4.10) вытекает, что для всех j, начиная с некоторого, $\sup\limits_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega} \mathfrak{J}_j^{(\mathfrak{l})}(m,\omega) \leqslant \varepsilon$. Тем самым равенство (4.12) доказано.

Аналогично, используя (4.9), доказываются и равенства (4.11).

Л е м м а 4.2. *Пусть* $g \in S(\mathbb{R}, C(\Omega \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$. *Тогда*

$$\lim_{j\to\infty} (\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s;\omega)\langle \nu_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega), g(s,\omega,u)\rangle ds|) = 0,\ \mathfrak{l} = 1,2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (см. (4.4)) константа $\tilde{\mathfrak{r}} \doteq \max(\tilde{\mathfrak{r}_1}, \tilde{\mathfrak{r}_2})$ и при каждом $j \in \mathbb{N}$ полагаем

$$\mathfrak{f}_j^{(\mathfrak{l})}(t,\omega) \doteq \langle \nu_j^{(\mathfrak{l})}(t,\omega), g(t,\omega,u)\rangle .$$

Теперь, представив каждое $t \in \mathbb{R}$ в виде $t = m_t a + \theta_t a$, где $m_t \in \mathbb{Z}$, $\theta_t \in [0,1)$, получаем, что для всех $j \in \mathbb{N}$ и $(t,\omega) \in \mathbb{R}\times\Omega$

$$|\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s;\omega)\langle \nu_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega), g(s,\omega,u)\rangle ds| \leqslant$$

$$\leqslant 2\tilde{\mathfrak{r}}\,|\int_{m_t a}^{t} X(t,s;\omega)\mathfrak{f}_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega)ds| +$$

$$+|X_{m_t a}(\theta_t a, 0)\cdot \big(|\int_{-\infty}^{m_t a} P_1(m_t a, s;\omega)\mathfrak{f}_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega)ds| +$$

$$+|\int_{m_t a}^{\infty} P_2(m_t a, s;\omega)\mathfrak{f}_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega)ds|\big) \leqslant$$

$$\leqslant 2\tilde{\mathfrak{r}} \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\int_{[t/a]a}^{t} X(t,s;\omega)\mathfrak{f}_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega)ds| +$$

$$+e^{a\mathfrak{d}} \sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega} |\int_{-\infty}^{m_t a} P_1(ma, s;\omega)\mathfrak{f}_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega)ds| +$$

$$+e^{a\mathfrak{d}} \sup_{(m,\omega)\in\mathbb{Z}\times\Omega} |\int_{ma}^{\infty} P_2(m_t a, s;\omega)\mathfrak{f}_j^{(\mathfrak{l})}(s,\omega)ds|,$$

откуда в силу равенств (4.7), (4.11) и (4.12) вытекает утверждение леммы 4.3.

Из леммы (4.2) получаем (здесь см. обозначения (4.5))

С л е д с т в и е 4.4. *Допустим, что заданное отображение* $A \in S(\mathbb{R}\times\Omega, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$ *удовлетворяет условиям* I) *и* II). *Тогда для любой фиксированной функции* g *из пространства* $S(\mathbb{R}, C(\Omega\times\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$

$$\lim_{j\to\infty}\big(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s;\omega)\langle \nu_j(s,\omega), g(s,\omega,u)\rangle ds|\big) = 0.$$

Далее, для фиксированной функции $g \in S(\mathbb{R}, C(\Omega \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$ и констант $v, \varsigma > 0$ введем при каждом $\mathfrak{l} = 1, 2$ и всех $j \in \mathbb{N}$ на $\mathbb{R} \times \Omega$ отображения

$$\psi^{(1)}(t, \nu_j^{(\mathfrak{l})}(\cdot, \omega)) = \psi^{(1)}(t, \nu_j^{(\mathfrak{l})}(\cdot, \omega), v, \varsigma) \doteq$$

$$\doteq \int_{t-v-\varsigma}^{t-v} P_1(t, s; \omega) \langle \nu_j^{(\mathfrak{l})}(s, \omega), g(s, \omega, u) \rangle ds,$$

$$\psi^{(2)}(t, \nu_j^{(\mathfrak{l})}(\cdot, \omega)) = \psi^{(2)}(t, \nu_j^{(\mathfrak{l})}(\cdot, \omega), v, \varsigma) \doteq$$

$$\doteq \int_{t+v}^{t+v+\varsigma} P_2(t, s; \omega) \langle \nu_j^{(\mathfrak{l})}(s, \omega), g(s, \omega, u) \rangle ds.$$

Л е м м а 4.3. *Имеют место следующие равенства*:

$$\lim_{j \to \infty} \Big(\sup_{(t,\omega) \in \mathbb{R} \times \Omega} |\psi^{(k)}(t, \nu_j^{(2)}(\cdot, \omega))| \Big) = 0, \; k = 1, 2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем лемму 4.3 лишь при $k = 2$ (при $k = 1$ доказательство аналогично). Допустим противное. Тогда найдутся такие константа $\gamma > 0$ и последовательности $\{j_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $\{t_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Omega$, что для всех $i \in \mathbb{N}$ будет выполняться неравенство

$$|\psi^{(2)}(t_i, \nu_{j_i}^{(2)}(\cdot, \omega_i))| > \gamma.$$

С другой стороны, каждую точку t_i, $i \in \mathbb{N}$ можно представить в виде $t_i = m_i a + \theta_i a$, где $m_i \in \mathbb{Z}$, $\theta_i \in \big(0, 1]$, и считать, что $\theta_i \to \widehat{\theta} \in [0, 1]$ при $i \to \infty$. Представим, далее, аналогично точки $\widehat{\theta} a + v$ и ς в виде $\widehat{\theta} a + v = m' a + \theta' a$, $\varsigma = m'' a + \theta'' a$, где $m', m'' \in \mathbb{Z}$ и $\theta', \theta'' \in [0, 1)$ и будем считать для определенности, что $m'' \in \mathbb{N}$ и точка $\vartheta \doteq \theta' + \theta''$ принадлежит [0,1].

Рассмотрим, сейчас, последовательность

$$\xi_i \doteq \Big| \int_{\widehat{m}_i a + v}^{\widehat{m}_i a + v + \varsigma} P_2(\widehat{m}_i a + v, s; \omega_i) \langle \nu_{j_2}^{(2)}(s, \omega_i), g(s, \omega_i, u) \rangle ds \Big|,$$

где $\widehat{m}_i \doteq m_i + \widehat{\theta}$, $i \in \mathbb{N}$, и покажем, что $\xi_i \downarrow 0$ при $i \to \infty$. С этой целью введем в рассмотрение измеримые a-периодические функции $\psi_1, \psi_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенные при $t \in [0, a]$ равенствами $\psi_1(t) \doteq \chi_{[0,\theta' a]}(t)$, $\psi_2(t) \doteq \chi_{[0,\vartheta a]}(t)$. Полагая

$$g_k(t, \omega, u) \doteq \psi_k(t) g(t, \omega, u), \ k = 1, 2,$$

будем иметь следующие соотношения:

$$\xi_i \leqslant e^{a\mathfrak{d}\theta'} \Big| \int_{m'_i a}^{(m'_i+1)a} P_2(m'_i a, s; \omega_i) \langle \nu_{j_i}^{(2)}(s, \omega_i), g_1(s, \omega_i, u) \rangle ds \Big| +$$
$$+ \sum_{l=0}^{m''-1} e^{a\mathfrak{d}(\theta'+l)} \Big| \int_{(m'_i+l)a+v}^{(m'_i+l+1)a} P_2((m'_i + l)a, s; \omega_i) \times$$
$$\times \langle \nu_{j_i}^{(2)}(s, \omega_i), g(s, \omega_i, u) \rangle ds \Big| +$$
$$+ e^{a\mathfrak{d}\left(\theta' + m''\right)} \Big| \int_{m''_i a}^{(m''_i+1)a} P_2(m''_i a, s; \omega_i) \langle \nu_{j_i}^{(2)}(s, \omega_i), g_2(s, \omega_i, u) \rangle ds \Big|,$$

из которых по следствию 4.2, принимая во внимание, что функции g_k, $k = 1, 2$ принадлежат $S(\mathbb{R}, C(\Omega \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$, получаем, что $\xi_i \downarrow 0$ при $i \to \infty$.

Пусть далее $\mathfrak{g}(t) \doteq \max\limits_{(\omega,u) \in \Omega \times \mathfrak{U}} |g(t, \omega, u)|$ и $\eta_i \doteq |\widehat{\theta} - \theta_i|$. Тогда при всех i

$$|\psi^{(2)}(t_i, \nu_{j_i}^{(2)}(\cdot, \omega_i))| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \int_{t_i+v}^{t_i+v+\eta_i a} \mathfrak{g}(s) |P_2(t_i, s; \omega_i| ds + |X_{m_i a}(\theta_i a, \widehat{\theta} a + v)| \cdot \xi_i +$$
$$+ 2 \int_{t_i+v+\varphi}^{t_i+v+\varphi+\eta_i a} \mathfrak{g}(s) |P_2(t_i, s; \omega_i| ds \overset{(3.3)}{\leqslant}$$
$$\leqslant 2\tilde{\mathfrak{r}}_2 e^{-\tilde{\sigma_2} v}(1 + e^{-\varsigma \tilde{\sigma_2}}) \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+a\eta_i} \mathfrak{g}(s) ds + e^{\mathfrak{d}(2a+v)} \xi_i.$$

Откуда, учитывая, что $\mathfrak{g} \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\eta_i \downarrow 0$ и $\xi_i \downarrow 0$ при $i \to \infty$, получаем (см. лемму 3.4), что $\lim\limits_{i \to \infty} |\psi^{(2)}(t_i, \nu_{j_i}^{(2)}(\cdot, \omega_i))| = 0$. Последнее противоречит сделанному предположению.

Л е м м а 4.4. *Имеют место следующие равенства:*

$$\lim_{j\to\infty}\big(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|\psi^{(k)}(t,\nu_j^{(1)}(\cdot,\omega))|\big)=0,\quad k=1,2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Снова рассмотрим лишь случай при $k=2$. В этом случае нужное нам равенство вытекает из приведенных ниже соотношений

$$|\psi^{(k)}(t,\nu_j^{(1)}(\cdot,\omega))|\overset{(4.1),(4.4)}{\leqslant}$$

$$\leqslant\tilde{\mathfrak{r}}_2\int\limits_{t+v}^{t+v+\varsigma}e^{-\tilde{\sigma}_2(s-t)}\Big(\sum_{k=1}^{p_i}\int\limits_{\mathfrak{U}}\alpha_k^{(j)}(u)|\varphi(s,\omega,u)-\varphi(s,\omega,u_k^{(j)})|\mu(s,\omega)(du)\Big)ds\leqslant$$

$$\leqslant\tilde{\mathfrak{r}}_2e^{-\tilde{\sigma}_2v}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+\varsigma}\omega_{\frac{1}{j}}g[(s,\cdot,\cdot),\Omega\times\mathfrak{U}]ds$$

и леммы 1.3 работы [1].

Полагаем далее при $k=1,2$

$$\psi^{(k)}(t,\nu_j(\cdot,\omega),v,\varsigma)\doteq\psi^{(k)}(t,\nu_j^{(1)}(\cdot,\omega),v,\varsigma)-\psi^{(k)}(t,\nu_j^{(2)}(\cdot,\omega),v,\varsigma).$$

Из лемм 4.3 и 4.4 вытекает

С л е д с т в и е 4.5. *Пусть функция* g *принадлежит* $S(\mathbb{R},C(\Omega\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$. *Тогда при каждом* $k=1,2$

$$\lim_{j\to\infty}\big(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|\psi^{(k)}(t,\nu_j(\cdot,\omega),v,\varsigma)|\big)=0.$$

Л е м м а 4.5. *Пусть* $g\in S(\mathbb{R},C(\Omega\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$ *и* $\mathfrak{k}\in(0,\infty)$. *Тогда для любого фиксированного* $i\in\mathbb{Z}_+$

$$\lim_{j\to\infty}\big(\sup_{\varsigma\in(0,\mathfrak{k}]}\big(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|\psi^{(k)}(t,\nu_j(\cdot,\omega),i\varsigma,\varsigma)|\big)\big)=0,\quad k=1,2.$$

Доказательство леммы 4.5 (здесь см. оценки (4.2) и утверждение следствия 4.5) аналогично схеме доказательства леммы 3.4 с направленным множеством $(A,\prec)\doteq(\mathbb{N},\leqslant)$, и мы его опускаем.

Рассмотрим (здесь см. в [1] следствия 1.1 и 1.2) семейство п.п. по Степанову систем дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t,\omega)x + \langle \nu_j(t,\omega), g(t,\omega,u)\rangle z(t), \ \ \omega \in \Omega, \tag{4.13}$$

где $g \in S(\mathbb{R}, C(\Omega \times \mathfrak{U}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$ и $z \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Ясно, что при каждом $j \in \mathbb{N}$ функция (см. теорему 3.1)

$$\mathfrak{x}_j(t; z(\cdot), \omega) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s;\omega)\langle \nu_j(s,\omega), g(s,\omega,u)\rangle z(s)ds, \ \ t \in \mathbb{R}$$

является п.п. по Бору решением этой системы.

Т е о р е м а 4.1. *Пусть* (Ω, ρ) *— компактное метрическое пространство, отображение* $A \in S(\mathbb{R} \times \Omega, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$ *и удовлетворяет условиям* I), II), $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ *— последовательность функций из* $S(\mathbb{R} \times \Omega, \mathfrak{U})$ *, аппроксимирующая заданное отображение* $\mu \in S(\mathbb{R} \times \Omega, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, *и пусть в системе* (4.13) $\nu_j(\cdot,\omega) \doteq \mu(\cdot,\omega) - \delta_{u_j(\cdot,\omega)}$. *Тогда, если* $g \in S(\mathbb{R}, C(\Omega \times \mathfrak{U}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$ *такая, что*

$$\tilde{\mathfrak{d}} \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \big(\max_{(\omega,u) \in \Omega \times \mathfrak{U}} |g(t,\omega,u)| \big) < \infty,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $j_0 = j_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *что при каждом* $j \geqslant j_o$ *и всех* $z \in B(\mathbb{R}, O_r[0])$ *справедливо неравенство*

$$\sup_{(t,\omega) \in \mathbb{R} \times \Omega} |\mathfrak{x}_j(t; z(\cdot), \omega)| \leqslant \varepsilon \big(2\tilde{\mathfrak{d}} \big(\frac{\tilde{r_1}}{\tilde{\sigma_1}} + \frac{\tilde{r_2}}{\tilde{\sigma_2}} \big) + \|z\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)} \big).$$

Доказательство теоремы 4.1, если принять во внимание лемму 4.5, аналогично доказательству теоремы 3.2 с направленным множеством $(A, \prec) \doteq (\mathbb{N}, \leqslant)$, и мы его опускаем.

5. Ряд свойств нелинейных п. п. по Степанову систем управления

1. В этом разделе, используя результаты предыдущего раздела, укажем ряд свойств решений нелинейных систем управления, дополняющих результаты работ [17, 18].

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $V \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^k)$ и дифференцируемое по x в каждой точке $(t, x, v, u) \in \mathbb{R} \times G \times V \times \mathfrak{U}$ отображение $(t, x, v, u) \mapsto f(t, x, v, u) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяет следующему условию: 1) для любого фиксированного множества $K \in \operatorname{comp}(G)$ $f \in S(\mathbb{R}, C(K \times V \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$, $f'_x \in S(\mathbb{R}, C(K \times V \times \mathfrak{U}, \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n))$ и

$$\mathfrak{d}(K) \doteq \underset{(t,x,v,u)\in\mathbb{R}\times K\times V\times\mathfrak{U}}{\text{supremum}} (|f(t, x, v, u)| + |f_x^{'}(t, x, v, u)|) < \infty. \quad (5.1)$$

Зафиксируем далее $\widehat{v}(\cdot) \in S(\mathbb{R}, V)$ и рассмотрим п.п. по Степанову (здесь см. лемму 5.2 в [1]) систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \langle \mu(t), f(t, x, \widehat{v}(t), u) \rangle, \ \mu(\cdot) \in APM_1, \qquad (5.2)$$

где

$$\langle \mu(t), f(t, x, \widehat{v}(t), u) \rangle \doteq \int_{\mathfrak{U}} f(t, x, \widehat{v}(t), u) \mu(t)(du),$$

для которой пару $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in B(\mathbb{R}, G) \times APM_1$ называем допустимой, если $x(\cdot)$ — решение этой системы уравнений, отвечающее $\mu(\cdot)$ и такое, что $\overline{\operatorname{orb}}(x) \subset G$.

Фиксируем направленное множество $(\mathbb{A}, \prec)$, содержащее счетное конфинальное подмножество, а также множество параметров Ω. В работе в [17] доказана

Т е о р е м а 5.1. *Пусть функция* $f\colon \mathbb{R} \times G \times V \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условию* 1), *для заданной функции* $\widehat{v}(\cdot) \in S(\mathbb{R}, V)$ *пара* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in B(\mathbb{R}, G) \times \mathrm{APM}_1$ *допустима для системы* (5.2) *и система уравнений в вариациях*

$$\dot{y} = \langle \widehat{\mu}(t), f'_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u) \rangle y, \ (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \qquad (5.3)$$

является э.д. Тогда, если множество $\{\mu_\alpha(\cdot, \omega),\ (\alpha, \omega) \in \mathbb{A} \times \Omega\}$ *из* APM_1 *равностепенно п.п. и заданная совокупность отображений* $\{v_\alpha(\cdot, \omega),\ (\alpha, \omega) \in \mathbb{A} \times \Omega\}$ *из* $S(\mathbb{R}, V)$ *такие, что*

$$\lim_{\alpha\in\mathbb{A}} \big(\sup_{\omega\in\Omega} \|\widehat{\mu}(\cdot) - \mu_\alpha(\cdot, \omega)\|_w + \sup_{\omega\in\Omega} d(\widehat{v}(\cdot), v_\alpha(\cdot, \omega))\big) = 0, \qquad (5.4)$$

то найдется такое $\mathcal{K} \in \mathrm{comp}(\mathrm{G})$ *и* $\alpha_0 \in \mathbb{A}$, *что для всех* $\alpha \in \mathbb{A}$, *удовлетворяющих условию* $\alpha_0 \prec \alpha$, *при каждом* $\omega \in \Omega$ *система*

$$\dot{x} = \langle \mu_\alpha(t,\omega), f(t,x,v_\alpha(t,\omega),u)\rangle, \tag{5.5}$$

где

$$\langle \mu_\alpha(t,\omega), f(t,x,v_\alpha(t,\omega),u)\rangle \doteq \int_{\mathfrak{U}} f(t,x,v_\alpha(t,\omega),u)\mu_\alpha(t,\omega)(du)$$

имеет единственное п.п. по Бору решение $x_\alpha(\cdot,\omega)$ *такое, что* $\overline{\mathrm{orb}}\,(x_\alpha(\cdot,\omega)) \subset \mathcal{K}$ *и для которого*

$$\lim_{\alpha\in\mathbb{A}}(\sup_{\omega\in\Omega} \|x_\alpha(\cdot,\omega) - \widehat{x}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}) = 0. \tag{5.6}$$

Докажем следующее утверждение, в котором

$$\mathfrak{m}_\gamma[\mu_\alpha,\Omega] \doteq \sup_{\substack{\omega_1,\omega_2\in\Omega,\\ \rho(\omega_1,\omega_2)<\gamma}} (\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\mu_\alpha(s,\omega_1) - \mu_\alpha(s,\omega_2)|(\mathfrak{U})ds). \tag{5.7}$$

Т е о р е м а 5.2. *Пусть в условиях теоремы* 5.1 (Ω,ρ) — *компактное метрическое пространство. Тогда для тех* α *из* $\mathbb{A}$, $\alpha_0 \prec \alpha$, *где* $\alpha_0 \in \mathbb{A}$ *взято из теоремы* 5.1, *для которых* $v_\alpha \in S(\mathbb{R}\times\Omega, V)$ *и*

$$\lim_{\gamma\downarrow 0} \mathfrak{m}_\gamma[\mu_\alpha,\Omega] = 0, \tag{5.8}$$

функция $(t,\omega) \mapsto x_\alpha(t,\omega)$ $(x_\alpha(\cdot,\omega)$ — *решение системы* (5.5)) *принадлежит пространству* $B(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как (см. условия теоремы 5.1) пара $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$, принадлежащая $B(\mathbb{R},G)\times\mathrm{APM}_1$, допустима для системы (5.2), то найдется такое $r > 0$, что будет выполнено включение $K_r \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x}) + O_r[0] \subset G$. В дальнейшем считаем $\mathfrak{d} \doteq \mathfrak{d}(K_r)$ (см. (5.1) при $K = K_r$), для э.д. системы (5.3) сохраняем обозначения, входящие в определение э.д. системы (3.1) с матрицей $A(t) = \langle \widehat{\mu}(t), f'_x(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle$ и полагаем (см. (3.2))

$$\mathfrak{k} \doteq \frac{\mathfrak{r}_1}{1-e^{-\sigma_1}} + \frac{\mathfrak{r}_2}{1-e^{-\sigma_2}}, \tag{5.9}$$

Далее, как и при доказательстве теоремы 2.1 работы [17] в системе (5.5) сделаем замену $z = \widehat{x}(t) - x$, которая относительно z запишется в виде

$$\begin{aligned}\dot{z} = A(t)z + h_1(t, z) + h_2(t; \alpha, \omega, z) + \\ + h_3(t; \alpha, \omega, z),\ (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,\ (\alpha, \omega) \in \mathbb{A} \times \Omega,\end{aligned} \tag{5.10}$$

где

$$h_1(t, z) \doteq \langle \widehat{\mu}(t), f(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u) - f(t, \widehat{x}(t) - z, \widehat{v}(t), u) \rangle - A(t)z,$$
$$h_2(t, \alpha, \omega, z) \doteq \langle \nu_\alpha(t, \omega), f(t, \widehat{x}(t) - z, \widehat{v}(t), u) \rangle,$$
$$h_3(t, \alpha, \omega, z) \doteq$$
$$\doteq \langle \mu_\alpha(t, \omega), f(t, \widehat{x}(t) - z, \widehat{v}(t), u) - f(t, \widehat{x}(t) - z, v_\alpha(t, \omega), u) \rangle,$$
$$\nu_\alpha(t, \omega) \doteq \widehat{\mu}(t) - \mu_\alpha(t, \omega).$$

Сейчас для каждой пары $(\alpha, \omega) \in \mathbb{A} \times \Omega$ введем в рассмотрение оператор $\mathfrak{F}_\alpha[\cdot, \omega]: B(\mathbb{R}, O_r[0]) \to B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ $(\omega \in \Omega)$, определенный для каждой функции $z \in B(\mathbb{R}, O_r[0])$ равенством

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_\alpha[z(\cdot), \omega](t) \doteq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t, s)[h_1(s, z(s)) + h_2(s, \alpha, \omega, z(s)) + \\ + h_3(s, \alpha, \omega, z(s))]ds,\ t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

В [17] доказано существование таких $\beta \in (0, r]$ и $\alpha_0 \in \mathbb{A}$, что при каждом $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha_0 \prec \alpha$ и всяком $\omega \in \Omega$ во – первых, выполнено включение $\mathfrak{F}_\alpha[B(\mathbb{R}, O_\beta[0]), \omega] \subset B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$, а во – вторых,

$$\sup_{(t,\omega) \in \mathbb{R} \times \Omega} |\mathfrak{F}_\alpha[z_1(\cdot), \omega](t) - \mathfrak{F}_\alpha[z_2(\cdot), \omega](t)| < \frac{2}{5}\|z_1 - z_2\|_C, \tag{5.11}$$

т.е. при этих α семейство $\{\mathfrak{F}_\alpha[\cdot, \omega]\}_{\omega \in \Omega}$ введенных операторов является операторами сжатия с общей константой $q = 2/5$. По теореме о сжимающем отображении [11] получаем, что оператор $\mathfrak{F}_\alpha[\cdot, \omega]$ имеет на замкнутом подмножестве $B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ банахового пространства $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ неподвижную точку, т.е. для каждого

$\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha_0 \prec \alpha$ и любого $\omega \in \Omega$ существует (единственная) функция $z_\alpha(\cdot,\omega) \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ такая, что при всех $t \in \mathbb{R}$

$$z_\alpha(t,\omega) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)[h_1(s, z_\alpha(s,\omega)) + h_2(s,\alpha,\omega,z_\alpha(s,\omega)) + \\ + h_3(s,\alpha,\omega,z_\alpha(s,\omega))]ds. \quad (5.12)$$

Последнее равенство означает, что $z_\alpha(\cdot,\omega)$ — п.п. по Бору решение системы уравнений (5.10) и, следовательно, п.п. по Бору функция

$$x_\alpha(\cdot,\omega) = \widehat{x}(\cdot) - z_\alpha(\cdot,\omega) \quad (5.13)$$

будет п.п. по Бору решением системы (5.5). При этом, поскольку $\|z_\alpha(\cdot,\omega)\|_C \leqslant \beta < r$ при каждом $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha_0 \prec \alpha$ и любом $\omega \in \Omega$, то (см. (5.13)) $\overline{\mathrm{orb}}(x_\alpha(\cdot,\omega)) \subset \mathcal{K}$, где $\mathcal{K} \doteq \overline{\mathrm{orb}}(x) + O_\beta[0]$. В [17] же показано, что $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}(\sup\limits_{\omega\in\Omega} \|z_\alpha(\cdot,\omega)\|_C) = 0$.

Теперь в силу (5.13) для доказательства теоремы 5.2 достаточно показать, что отображение $(t,\omega) \mapsto z_\alpha(t,\omega)$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R}\times\Omega, \mathbb{R}^n)$. С этой целью для любых $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, удовлетворяющих неравенству $\rho(\omega_1,\omega_2) < \gamma$, полагаем

$$\Delta z_\alpha(t,\omega_1,\omega_2) \doteq z_\alpha(t,\omega_1) - z_\alpha(t,\omega_2), \ t \in \mathbb{R}.$$

Тогда при всех $t \in \mathbb{R}$, учитывая определение оператора $\mathfrak{F}_\alpha[\cdot,\omega]$, неравенства (3.2) (см. также (3.3)) и обозначения (5.7), (5.9), имеем следующие соотношения:

$$|\Delta z_\alpha(t,\omega_1,\omega_2)| \overset{(5.12)}{\leqslant} |\mathfrak{F}_\alpha[z_\alpha(\cdot,\omega_1),\omega_1](t) - \mathfrak{F}_\alpha[z_\alpha(\cdot,\omega_2),\omega_1](t)| +$$

$$+ |\mathfrak{F}_\alpha[z_\alpha(\cdot,\omega_2),\omega_1](t) - \mathfrak{F}_\alpha[z_\alpha(\cdot,\omega_2),\omega_2](t)| \overset{(5.11)}{<} \frac{2}{5}\|\Delta z_\alpha(\cdot,\omega_1,\omega_2)\|_C +$$

$$+ 2\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t,s)| \cdot |\langle \mu_\alpha(s,\omega_1) - \mu_\alpha(s,\omega_2), f(s, x_\alpha(s,\omega_2), \widehat{v}(s), u)\rangle| ds +$$

$$+\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t,s)|\cdot|\langle \mu_\alpha(s,\omega_1)-\mu_\alpha(s,\omega_2), f(s,x_\alpha(s,\omega_2),v_\alpha(s,\omega_1),u)\rangle|ds+$$

$$+\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t,s)|\cdot|\langle \mu_\alpha(s,\omega_1), f(s,x_\alpha(s,\omega_2),v_\alpha(s,\omega_1),u)-$$

$$-f(s,x_\alpha(s,\omega_2),v_\alpha(s,\omega_2),u)\rangle|ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{5}\|\Delta z_\alpha(\cdot,\omega_1,\omega_2)\|_C + 4\mathfrak{d}\mathfrak{k}\mathfrak{m}_\gamma[\mu_\alpha,\Omega] + I_\alpha(t,\omega_1,\omega_2),$$

где

$$I_\alpha(t,\omega_1,\omega_2) \doteq \int\limits_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t,s)|\cdot|\langle \mu_\alpha(s,\omega_1), f(s,x_\alpha(s,\omega_2),v_\alpha(s,\omega_1),u) -$$

$$- f(s,x_\alpha(s,\omega_2),v_\alpha(s,\omega_2),u)\rangle|ds.$$

Покажем, что

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\mathbb{I}(\gamma)=0, \tag{5.14}$$

где $\mathbb{I}(\gamma) \doteq \sup\{\|I_\alpha(\cdot,\omega_1,\omega_2),\ \omega_1,\omega_1\in\Omega\|_C, \rho(\omega_1,\omega_2)<\gamma\}$. С этой целью при каждом $t\in\mathbb{R}$ и $\gamma>0$ обозначим

$$w_\gamma^{(1)}(t) \doteq \underset{\substack{(x,v_k,u)\in K_r\times V\times\mathfrak{U},\\ k=1,2,\ |v_1-v_2|\leqslant\gamma}}{\text{supremum}} |f(t,x,v_1,u)-f(t,x,v_2,u)|. \tag{5.15}$$

Поскольку $f\in S(\mathbb{R},C(K_r\times V\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, то по лемме 1.3 из [1] для заданного $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что (см. обозначение (5.9)) $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1} w_\delta^{(1)}(s)ds < \varepsilon/(2\mathfrak{k})$. Далее, т.к. $v_\alpha\in S(\mathbb{R}\times\Omega,V)$, то по определению 1.1 из [1] $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{v}_\gamma[v_\alpha,\Omega]=0$, где

$$\mathfrak{v}_\gamma[v_\alpha,\Omega] \doteq \sup_{\substack{\omega_1,\omega_2\in\Omega,\\ \rho(\omega_1,\omega_2)<\gamma}} (\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1} |v_\alpha(s,\omega_1)-v_\alpha(s,\omega_2)|ds. \tag{5.16}$$

Следовательно, найдется такое $\gamma_\varepsilon>0$, что при всех $\gamma\in(0,\gamma_\varepsilon)$ будет выполнено неравенство $\mathfrak{v}_\gamma[v_\alpha,\Omega]<\delta\varepsilon/(4\mathfrak{d})$. Полагая

$$T_\delta(t,\omega_1,\omega_2) \doteq \{s\in[t,t+1]\colon\ \|v_\alpha(\cdot,\omega_1)-v_\alpha(\cdot,\omega_2)\|_C \geqslant \delta\},$$

при всех $\omega_1, \omega_1 \in \Omega$, удовлетворяющих неравенству $\rho(\omega_1, \omega_2) < \gamma$, получаем следующие соотношения:

$$|I_\alpha(t, \omega_1, \omega_2)| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \{\mathfrak{r}_1 e^{-\sigma_1 i} (\int\limits_{T_\delta(t-i,\omega_1,\omega_2)} |h_3(s; \alpha, \omega, z(s))| ds +$$

$$+ 2\mathfrak{d} \operatorname{mes} T_\delta(t-i, \omega_1, \omega_2)) + \mathfrak{r}_2 e^{-\sigma_2 i} (\int\limits_{T_\delta(t+i,\omega_1,\omega_2)} |h_3(s; \alpha, \omega, z(s))| ds +$$

$$+ 2\mathfrak{d} \operatorname{mes} T_\delta(t+i, \omega_1, \omega_2))\} \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2} \mathfrak{r}_k e^{-\sigma_k i} \big(\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} w_\delta^{(2)}(s) ds +$$

$$+ \frac{2\mathfrak{d}}{\gamma} d(v_\alpha(\cdot, \omega_1), v_\alpha(\cdot, \omega_2)) \big) < \varepsilon/2 + \frac{2\mathfrak{k}\mathfrak{d}}{\delta} \mathfrak{v}_\gamma[v_\alpha, \Omega] < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Тем самым равенство (5.14) доказано, и т.к. для любых ω_1, ω_2 из Ω, удовлетворяющих неравенству $\rho(\omega_1, \omega_2) < \gamma$

$$\|\Delta z_\alpha(\cdot, \omega_1, \omega_2)\|_C < \frac{3}{5}(4\mathfrak{d}\mathfrak{k}\mathfrak{m}_\gamma[v_\alpha, \Omega] + \mathbb{I}_\gamma),$$

то из равенств (5.8) и (5.14) получаем, что

$$\lim_{\gamma \downarrow 0} (\sup\{\|z_\alpha(\cdot, \omega_1) - z(\cdot, \omega_2)\|_C, \ \omega_1, \omega_1 \in \Omega, \rho(\omega_1, \omega_2) < \gamma\}) = 0.$$

Следовательно, п.п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Бора при каждом ω из компакта Ω отображение $(t, \omega) \mapsto z_\alpha(t, \omega)$ является равномерно непрерывным по ω относительно $t \in \mathbb{R}$, а это означает [2], что $z_\alpha \in B(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R}^n)$.

2. В этом пункте приведем ряд утверждений, дополняющих результаты п. 2 из [1], которые будут использованы в следующем пункте.

Л е м м а 5.1. *Пусть* $(\mathfrak{X}, \rho)$ — *компактное метрическое пространство и функция* $u \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{U}))$. *Тогда для каждого* $c \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ *отображение* $(t, x) \mapsto c(u(t, x))$ *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathbb{R}))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $t \in \mathbb{R}$ по теореме о максимуме [19. С. 27] найдется такое измеримое отображение $x : [t, t+1] \to \mathfrak{X}$, что для п.в. $s \in [t, t+1]$ будет выполнено равенство

$$\max_{x \in \mathfrak{X}} |c(u(s+\tau, x)) - c(u(s, x))| = |c(u(s+\tau, x(s))) - c(u(s, x(s)))|.$$

Поэтому из соотношений

$$\int_t^{t+1} \max_{x \in \mathfrak{X}} |c(u(s+\tau, x)) - c(u(s, x))| ds =$$
$$= \int_t^{t+1} |c(u(s+\tau, x(s))) - c(u(s, x(s)))| ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\sigma} \|c\|_{C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})} \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{x \in \mathfrak{X}} |u(s+\tau, x) - u(s, x)| ds + \omega_\sigma[c, \mathfrak{U}],$$

где $\omega_\sigma[c, \mathfrak{U}]$ — σ–колебание на $\mathfrak{U}$ функции $c \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$, выполненых для любого $\sigma > 0$, и условия $u \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{U}))$ получаем утверждение леммы 5.1 .

О п р е д е л е н и е 5.1. Пусть $(\mathfrak{X}, \rho)$ — компактное метрическое пространство. Отображение $(t, x) \mapsto \mu(t, x) \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})))$, если для каждой функции $c \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ отображение

$$(t, x) \mapsto \langle \mu(t, x), c(u) \rangle \doteq \int_{\mathfrak{U}} c(u) \mu(t, x)(du)$$

принадлежит $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathbb{R}))$.

Непосредственно из определения 5.1, леммы 2.3 и следствия 1.1 из [1] получаем, что $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))) \subset S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, а из леммы 5.1 вытекает

Л е м м а 5.2. *Функция* $u \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{U}))$ *в том и только в том случае, если отображение* $(t, x) \mapsto \delta_{u(t,x)}$ *принадлежит* $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})))$ *и их модули совпадают.*

Т е о р е м а 5.3. *Пусть* $(\mathfrak{X},\rho)$ — *компактное метрическое пространство и функция* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$. *Тогда для каждого* $\mu \in S\big(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$ *отображение*

$$(t,x) \mapsto f(t,x) \doteq \langle \mu(t,x), g(t,u)\rangle,$$

где

$$\langle \mu(t,x), g(t,u)\rangle = \int_{\mathfrak{U}} g(t,u)\mu(t,x)(du)$$

принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X},\mathbb{R}))$ *и его модуль содержится в* $\mathrm{Mod}(\Lambda(\mu)\cup\Lambda(g))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $g \in S\big(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R})\big)$, то по лемме 1.3 [1.С. 19] для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\gamma > 0$, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \omega_\gamma[g(s,\cdot),\mathfrak{U}]ds < \frac{\varepsilon}{3}$. Далее, как и при доказательстве теоремы 2.2 [1.С. 47], $\mathcal{U}_1 \ldots \mathcal{U}_p$ — открытое покрытие компакта $\mathfrak{U}$ такое, что $\operatorname{diam} \mathcal{U}_j \leqslant \gamma$, $j = 1\ldots p$, и через $\{\alpha_j\}_{j=1}^p$ обозначим непрерывное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Для каждого $j = 1\ldots p$ фиксируем точку $u_j \in \mathfrak{U}\bigcap\mathcal{U}_j$, в которой $\alpha_j(u_j) > 0$, и рассмотрим семейство отображений $t \mapsto \lambda_j(t,x) \doteq \langle\mu(t,x), \alpha_j(u)\rangle \in [0,1]$, $t\in\mathbb{R}$, $x \in \mathfrak{X}$. Поскольку $\mu \in S\big(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$, то (см. определение 5.1) при каждом $j = 1\ldots p$ $\lambda_j \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X},\mathbb{R}))$. Кроме того, $\sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j(t,x) = 1$, $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{X}$.

Рассмотрим, далее, семейство отображений

$$t \mapsto \Delta(t,x) \doteq \sum_{j=1}^{p} \lambda_j(t,x)\delta_{u_j} \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}),\ x\in\mathfrak{X},$$

принадлежащее APM_1, и для $\tau\in\mathbb{R}$ полагаем

$$I(\tau) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{x\in\mathfrak{X}} |\langle\Delta(s+\tau,x), g(s+\tau,u)\rangle - \langle\Delta(s,x), g(s,u)\rangle|\, ds.$$

Сейчас для заданного $\varepsilon > 0$ при каждом $j = 1 \dots p$ для $g(\cdot, u_j)$, принадлежащего пространству $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, рассмотрим такую функцию $\mathfrak{g}_j \in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, что (здесь см.[7.С. 231]) $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |\mathfrak{g}_j(t)| \doteq \mathfrak{k}_j < \infty$ и $d(g(\cdot,u_j),\mathfrak{g}_j(\cdot)) < \varepsilon/18p$. Полагаем, далее, $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant p} \mathfrak{k}_j \doteq \mathfrak{k}$. Теперь при всех $(\tau, x) \in \mathbb{R}\times\mathfrak{X}$ имеем следующие соотношения:

$$I(\tau) \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \sum_{j=1}^{p} \max_{x\in\mathfrak{X}} |\lambda_j(s+\tau,x) - \lambda_j(s,x)| \cdot |g(s,u_j)| ds +$$

$$+ \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \sum_{j=1}^{p} \max_{x\in\mathfrak{X}} \lambda_j(s+\tau,x) |g(s+\tau,u_j) - g(s,u_j)| ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{j=1}^{p} d(g(\cdot,u_j),\mathfrak{g}_j(\cdot)) + \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \sum_{j=1}^{p} \max_{x\in\mathfrak{X}} |\lambda_j(s+\tau,x) -$$

$$-\lambda_j(s,x)| \cdot |\mathfrak{g}_j(s)| ds + \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{u\in\mathfrak{U}} |g(s+\tau,u) - g(s,u)| ds < \frac{\varepsilon}{9} +$$

$$+\mathfrak{k} \sum_{j=1}^{p} \max_{x\in\mathfrak{X}} |\lambda_j(s+\tau,x) - \lambda_j(s,x)| ds +$$

$$+\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{u\in\mathfrak{U}} |g(s+\tau,u) - g(s,u)| ds,$$

из которых получаем неравенство $I(\tau) \leqslant \varepsilon/3$ для всякого τ, принадлежащего относительно плотному множеству

$$\mathcal{E} \doteq \Big(\bigcap_{u\in\mathfrak{U}} E_S(g(\cdot,u),\mathfrak{y})\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{x\in\mathfrak{X}} \bigcap_{j=1}^{p} E_S\big(\lambda_j(\cdot,x),\mathfrak{y}\big)\Big),$$

где $\mathfrak{y} \doteq \min\{\varepsilon/9, \varepsilon/9\mathfrak{k}p\}$. Сейчас, если $\tau \in \mathcal{E}$, то при всех $x \in \mathfrak{X}$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{x\in\mathfrak{X}} |f_\tau(s+\tau,x) - f(s,x)| ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{x\in\mathfrak{X}} |\langle \mu(s,x) - \Delta(s,x), g(s,u)\rangle| ds + I(\tau) \leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{x\in\mathfrak{X}}|\langle\mu(s,x),g(s,u)\rangle-\sum_{j=1}^{p}\lambda_j(s,x)g(s,u_j)|ds+\frac{\varepsilon}{3}\leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\Big(\sum_{j=1}^{p}\int_{u\in\mathfrak{U}}\alpha_j(u)|g(s,u)-g(s,u_j)|\mu(s,x)(du)\Big)ds+\frac{\varepsilon}{3}\leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\omega_\gamma[g(s,\cdot),\mathfrak{U}]ds+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon,$$

т. е. $f\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathbb{R}))$.

Из теоремы 5.3 в силу леммы 5.1 вытекает

С л е д с т в и е 5.1. *Пусть* $(\mathfrak{X},\rho)$ — *компактное метрическое пространство и функция* $g\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$. *Тогда для каждого* $u\in S\big(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathfrak{U}\big)$ *отображение* $(t,x)\mapsto g(t,u(t,x))$ *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathbb{R}))$ *и ее модуль содержится в* $\operatorname{Mod}(\Lambda(u)\cup\Lambda(g))$.

3. В этом пункте (Ω,ρ) — компактное метрическое пространство, функция $f:\mathbb{R}\times G\times V\times\mathfrak{U}$, $V\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^k)$ удовлетворяет условию 1), приведенному в первом пункте, и при заданных $\mu\in S(\mathbb{R}\times\Omega,\operatorname{rpm}(\mathfrak{U}))$ и $v\in S(\mathbb{R},C(\Omega,V))$ рассмотрим п.п. по Степанову (здесь см. теорему 2.2 [1. С. 46] и следствие 5.1) систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=\langle\mu(t,\omega),f(t,x,v(t,\omega),u)\rangle,\ (t,x)\in\mathbb{R}\times G,\tag{5.17}$$

где

$$\langle\mu(t,\omega),f(t,x,v(t,\omega),u)\rangle\doteq\int_{\mathfrak{U}}f(t,x,v(t,\omega),u)\mu(t,\omega)(du),$$

Для системы (5.17) пару $(x(\cdot,\omega)),\mu(\cdot,\omega))\in B(\mathbb{R},G)\times\mathrm{APM}_1$, где $\omega\in\Omega$, называем допустимой, если $x(\cdot,\omega)$ — решение этой системы уравнений, отвечающее $\mu(\cdot,\omega)$ и такое, что $\overline{\operatorname{orb}}(x(\cdot,\omega))\subset G$.

В дальнейшем предполагаем, что выполнены условия:

а) для любого $\omega \in \Omega$ пара $(x(\cdot,\omega),\mu(\cdot,\omega)) \in B(\mathbb{R},G) \times \mathrm{APM}_1$ является допустимой для системы (5.17), при этом отображение $(t,\omega) \mapsto x(t,\omega)$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R}\times\Omega,G)$, и существует такое множество $\mathbb{K} \in \operatorname{comp}(G)$, что для всех $\omega \in \Omega$ $\overline{\operatorname{orb}}(x(\cdot,\omega))$ содержится в $\mathbb{K}$;

б) при каждом $\omega \in \Omega$ система уравнений в вариациях

$$\dot{y} = \langle \mu(t,\omega), f'_x(t,x(t,\omega),u)\rangle y, \ \ (t,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

допускает э.д., причем существуют такие положительные константы $\mathfrak{r}_j, \sigma_j$, $j=1,2$, не зависящие от $\omega \in \Omega$, что для функции Грина $\mathcal{G}(t,s;\omega) = \chi_{(-\infty,t)}(s)P_1(t,s;\omega) - \chi_{(t,\infty)}(s)P_2(t,s;\omega)$, $t,s \in \mathbb{R}$, этой системы справедливы оценки (4.4).

Т е о р е м а 5.4. *Пусть для системы* (5.17) *выполнены условия* а), б) *и* $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ — *последовательность функций из* $S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathfrak{U})$, *указанная в теореме* 3.1 [1], *аппроксимирующая отображение* $\mu \in S(\mathbb{R}\times\Omega,\operatorname{rpm}(\mathfrak{U}))$. *Тогда найдутся такое множество* $\mathcal{K} \in \operatorname{comp}(G)$ *и* $j_0 \in \mathbb{N}$, *что при каждом* $j \geqslant j_0$ *и всяком* $\omega \in \Omega$ *система уравнений*

$$\dot{x} = f(t,x,v(t,\omega),u_j(t,\omega)), \tag{5.18}$$

имеет такое п.п. по Бору решение $x_j(\cdot,\omega)$, *что* $\overline{\operatorname{orb}}(x_j(\cdot,\omega)) \subset \mathcal{K}$ *и*

$$\lim_{j\to\infty}(\sup_{\omega\in\Omega}\|x(\cdot,\omega)-x_j(\cdot,\omega)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{5.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\mathbb{K} \in \operatorname{comp}(G)$, то найдется такое $r > 0$, что компакт $\mathbb{K}_r \doteq \mathbb{K} + O_r[0]$ содержится в G и в дальнейшем считаем $\mathfrak{d} \doteq \mathfrak{d}(\mathbb{K}_r)$ (см. (5.1) при $K = \mathbb{K}_r$). Поскольку $u_j \in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathfrak{U})$, то по лемме 2.6 [1. С. 50] отображение $(t,\omega) \mapsto \delta_{u_j(t,\omega)} \doteq \mu_j(t,\omega)$ принадлежит $S(\mathbb{R}\times\Omega,\operatorname{rpm}(\mathfrak{U}))$ и систему (5.18) можно записать в следующем, эквивалентном, виде

$$\dot{x} = \langle \mu_j(t,\omega), f(t,x,v(t,\omega),u)\rangle. \tag{5.20}$$

Система (5.20) относительно переменной $z = x(t,\omega) - x$ запишется в виде

$$\dot z = A(t,\omega)z + a(t,\omega,z) + b_j(t,\omega,z),\ (t,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \tag{5.21}$$

где

$$\begin{gathered} A(t,\omega) \doteq \langle \mu(t,\omega), f'_x(t,x(t,\omega),v(t,\omega),u)\rangle, \\ a(t,\omega,z) \doteq \langle \mu(t,\omega), f(t,x(t,\omega),v(t,\omega),u) - \\ -f(t,x(t,\omega)-z,v(t,\omega),u)\rangle - A(t,\omega)z, \\ b_j(t,\omega,z) \doteq \langle \nu_j(t,\omega), f(t,x(t,\omega)-z,v(t,\omega),u)\rangle, \\ \nu_j(t,\omega) \doteq \mu(t,\omega) - \delta_{u_j}(t,\omega). \end{gathered}$$

Далее, для каждой пары $(j,\omega) \in \mathbb{N}\times\Omega$ рассмотрим оператор $\mathfrak{F}_j[\cdot,\omega]\colon B(\mathbb{R},O_r[0]) \to B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, определенный для каждой функции $z \in B(\mathbb{R},O_r[0])$ и всякого $t\in\mathbb{R}$ равенством

$$\mathfrak{F}_j[z(\cdot),\omega](t) \doteq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s;\omega)[b_j(s,\omega,z(s)) + a(s,\omega,z(s))]ds. \tag{5.22}$$

В силу следствия 5.1 и ограничений, наложенных на f, получаем, что отображения

$$(t,\omega,u) \mapsto g_1(t,\omega,u) \doteq f(t,x(t,\omega),v(t,\omega),u), \tag{5.23}$$
$$(t,\omega,u) \mapsto g_2(t,\omega,u) \doteq f'_x(t,x(t,\omega),v(t,\omega),u), \tag{5.24}$$

принадлежат соответственно пространствам $S(\mathbb{R},C(\Omega\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$ и $S(\mathbb{R},C(\Omega\times\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$. Поэтому по теореме 2.2 [1] отображение $(t,\omega)\mapsto A(t,\omega)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$ и т.к. при п.в. $t\in\mathbb{R}$ и каждом $\omega\in\Omega$ $|A(t,\omega)| \leqslant \mathfrak{d}$, то (см. (5.23) и следствие 4.4 при $g = g_1$) будет выполнено равенство

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} \Big|\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s;\omega)\langle \nu_j(s,\omega), g_1(s,\omega,u))\rangle ds\Big|\Big) = 0. \tag{5.25}$$

Кроме того, если для $(j,\omega)\in\mathbb{N}\times\Omega$ ввести в рассмотрение оператор $\mathfrak{J}_j[\cdot,\omega]\ :\ B(\mathbb{R},O_r[0]) \to B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, определенный для каждой функции $z \in B(\mathbb{R}, O_r[0])$ равенством (см. обозначение (5.24))

$$\mathfrak{I}_j[z(\cdot),\omega](t) \doteq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)\langle \nu_j(s,\omega), g_2(s,\omega,u))\rangle z(s)ds, \ t \in \mathbb{R},$$

то (см. теорему 4.1 при $g = g_2$) будет справедлива

Л е м м а 5.3. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число j_0, что для всех $j \geqslant j_0$, и каждой функции $z \in B(\mathbb{R}, O_r[0])$ выполнено неравенство*

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\mathfrak{I}_j[z(\cdot),\omega](t)| \leqslant \varepsilon \big(2\mathfrak{d}(\frac{\tilde{\mathfrak{r}}_1}{\tilde{\sigma}_1} + \frac{\tilde{\mathfrak{r}}_2}{\tilde{\sigma}_2}) + \|z\|_C\big).$$

Теперь, используя равенство (5.26) и лемму 5.3, в точности следуя доказательству теоремы 2.1 работы [19], получим, что найдутся $j_0 \in \mathbb{N}$, константы $\beta > 0$ и $q \in (0,1)$, такие, что для любых $z_1, z_2 \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ и всех $j \geqslant j_0$ для оператора $\mathfrak{F}_j[z_1(\cdot),\omega]$, заданного равенством (5.22), будут выполнены неравенство

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\mathfrak{F}_j[z_1(\cdot),\omega](t) - \mathfrak{F}_j[z_2(\cdot),\omega](t)| \leqslant q\|z_1 - z_2\|_C, \qquad (5.26)$$

и включение $\mathfrak{F}_j[B(\mathbb{R}, O_\beta[0]),\omega] \subset B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ $(\omega \in \Omega)$.

Поэтому по теореме о сжимающем отображении [11] при каждом $j \geqslant j_0$ и всяком $\omega \in \Omega$ оператор $\mathfrak{F}_j[\cdot,\alpha,\omega]$ имеет на замкнутом подмножестве $B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ банахового пространства $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ (единственную) неподвижную точку, т.е. для каждого $j \geqslant j_0$ и любого $\omega \in \Omega$ существует (единственная) функция $z_j(\cdot,\omega) \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ такая, что при всех $t \in \mathbb{R}$

$$z_j(t,\omega) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)[a(s,\omega,z_j(s,\omega)) + b_j(s,\omega,z_j(s,\omega))]ds. \qquad (5.27)$$

Полученное равенство означает, что $z_j(\cdot,\omega)$ — п.п. по Бору решение системы уравнений (5.21), но тогда функция

$$x_j(\cdot,\omega) = x(\cdot,\omega) - z_j(\cdot,\omega), \qquad (5.28)$$

будет п.п. по Бору решением системы (5.20), или, что то же самое, системы (5.18), и т.к. $\|z_j(\cdot,\omega)\|_C \leqslant \beta < r$ при каждом $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant j_0$ и любом $\omega \in \Omega$, то $\overline{\mathrm{orb}}(x_j(\cdot,\omega)) \subset \mathcal{K} \doteq \mathbb{K} + O_\beta[0] \subset G$. Тем самым первое утверждение теоремы 5.3 доказано.

Теперь, как и в [18], воспользовавшись равенствами (5.27), (5.28), леммой 5.3 и неравенством (5.26), получим, что при всех $j \geqslant j_0$ будет выполнено неравенство

$$\sup_{\omega\in\Omega} \|z_j(\cdot,\omega)\|_C \leqslant (1-4q) \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |I_j(t,\omega)|,$$

где (см. (5.23)) $I_j(t,\omega) \doteq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s;\omega)\langle \nu_j(s,\omega), g_1(s,\omega,u)\rangle ds$. Откуда в силу (5.25) получаем равенство (5.19).

Т е о р е м а 5.5. *Пусть в теореме* 5.4 *заданное отображение* $\mu \in S(\mathbb{R}\times\Omega, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ *такое, что* $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0} \mathfrak{m}_\gamma[\mu,\Omega] = 0$. *Тогда при каждом* $j \geqslant j_0$ *, где* $j_0 \in \mathbb{N}$ *взято из теоремы* 5.4 *, отображение* $(t,\omega) \mapsto x_j(t,\omega)$ *(* $x_j(\cdot,\omega)$ *— решение системы* (5.18)) *принадлежит пространству* $B(\mathbb{R}\times\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу доказанного в предыдущей теореме для каждого $j \geqslant j_0$ и всех $\omega \in \Omega$ решение $x_j(\cdot,\omega)$ системы (5.18) удовлетворяет равенству (5.28), где функция $z_j(\cdot,\omega) \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ и является решением системы уравнений (5.21), а т.к. решение $x(\cdot,\omega)$ системы (5.19) принадлежит $B(\mathbb{R}\times\Omega, \mathbb{R}^n)$, то для доказательства теоремы 5.5 достаточно показать, что $z_j \in B(\mathbb{R}\times\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Введем обозначения:

$$\delta(\omega_1,\omega_1) \doteq \|x(\cdot,\omega_1) - x(\cdot,\omega_2)\|_C,$$

$$\mathfrak{q}_\gamma \doteq \operatorname*{supremum}_{\substack{(t,\omega_l)\in\mathbb{R}\times\Omega,\ l=1,2\\ \rho(\omega_1,\omega_2)\leqslant\gamma}} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t,s;\omega_1) - \mathcal{G}(t,s;\omega_2)| ds.$$

Фиксируем далее произвольные число $j \geqslant j_0$ и точки ω_1, ω_2, принадлежащие Ω, такие, что $\rho(\omega_1,\omega_2) \leqslant \gamma$. Тогда, учитывая, что $z_j(\cdot,\omega_l)$, $l=1,2$ при всех $t\in\mathbb{R}$ удовлетворяют равенству (5.27) и $\overline{\mathrm{orb}}(z_j(\cdot,\omega))\subset O_\beta[0]$ $(\omega\in\Omega)$ получаем (здесь см. обозначение (5.22)), при указанных j и $\omega_1,\omega_2\in\Omega$ следующие соотношения:

$$\begin{cases} |z_j(t,\omega_1)-z_j(t,\omega_2)|\leqslant \\ \leqslant |\mathfrak{F}_j[z_j(\cdot,\omega_1),\omega_1](t)-\mathfrak{F}_j[z_j(\cdot,\omega_2),\omega_1](t)|+ \\ +|\mathfrak{F}_j[z_j(\cdot,\omega_2),\omega_1](t)-\mathfrak{F}_j[z_j(\cdot,\omega_2),\omega_1](t)| \overset{(??)}{\leqslant} \\ \leqslant q\|z_j(\cdot,\omega_1)-z_j(\cdot,\omega_2)\|_C+\mathfrak{d}(2+4\beta)\mathfrak{q}_\gamma+ \\ +I_j^{(1)}(t,\omega_1,\omega_2)+I_j^{(2)}(t,\omega_1,\omega_2), \end{cases} \tag{5.29}$$

где

$$I_j^{(1)}(t,\omega_1,\omega_2)\doteq\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{G}(t,s;\omega_2)|\cdot|b_j(s,\omega_1,z_j(s,\omega_2))- \\ -b_j(s,\omega_2,z_j(s,\omega_2))|ds,$$

$$I_j^{(2)}(t,\omega_1,\omega_2)\doteq\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{G}(t,s;\omega_2)|\cdot|a(s,\omega_1,z_j(s,\omega_2))- \\ -a(s,\omega_2,z_j(s,\omega_2))|ds.$$

Далее, определим $w_\gamma^{(2)}(t)$, $t\in\mathbb{R}$ аналогично $w_\gamma^{(1)}(t)$ (см. (5.15) при $f=f'_x$. Тогда при всех $t\in\mathbb{R}$ имеем следующие соотношения:

$$|b_j(t,\omega_1,z_j(t,\omega_2))-b_j(t,\omega_2,z_j(t,\omega_2))|\leqslant$$

$$\leqslant\mathfrak{d}|\nu_j(t,\omega_1)-\nu_j(t,\omega_2)|(\mathfrak{U})+2w^{(1)}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(t),$$

$$|a(t,\omega_1,z_j(s,\omega_2))-a(t,\omega_2,z_j(s,\omega_2))|\leqslant$$

$$\leqslant|\langle\mu(t,\omega_1),f(t,x(t,\omega_1),u)-f(t,x(t,\omega_2),u)\rangle|+$$

$$+|\langle\mu(t,\omega_1),f(t,x(t,\omega_2)-z_j(t,\omega_2),u)-f(t,x(t,\omega_1)-z_j(t,\omega_2),u)\rangle|+$$

$$+|A(t,\omega_2)-A(t,\omega_1)|\cdot|z_j(t,\omega_2)|+$$

$$+|\langle\mu(t,\omega_1)-\mu(t,\omega_2),f(t,x(t,\omega_2),u)\rangle|+$$
$$+|\langle\mu(t,\omega_1)-\mu(t,\omega_2),f(t,x(t,\omega_2)-z_j(t,\omega_2),u)\rangle|\leqslant$$
$$\leqslant 2w^{(1)}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(t)+2\mathfrak{d}(\beta+1)|\mu(t,\omega_1)-\mu(t,\omega_2)|(\mathfrak{U})+\beta w^{(2)}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(t).$$

Поэтому (см. обозначение в (5.9) при $\mathfrak{r}_j=\tilde{\mathfrak{r}}_j$ и $\sigma_j=\tilde{\sigma}_j$)

$$I^{(1)}_j(t,\omega_1,\omega_2)+I^{(2)}_j(t,\omega_1,\omega_2)\overset{(4.4)}{\leqslant}$$
$$\leqslant \mathfrak{k}\mathfrak{d}\,\mathfrak{m}_\gamma[\nu_j,\Omega]+3\mathfrak{k}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}w^{(1)}_{\delta(\omega_1,\omega_{(1)})}(s)ds+$$
$$+2\mathfrak{d}\mathfrak{k}(\beta+1)\mathfrak{m}_\gamma[\mu,\Omega]+\beta\mathfrak{k}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}w^{(2)}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(s)ds.$$

Теперь, если $\tilde{\mathfrak{k}}\doteq\max(\mathfrak{k}\mathfrak{d},3\mathfrak{k},2\mathfrak{d}\mathfrak{k}(\beta+1),\beta\mathfrak{k})$, из полученного неравенства и (5.29) вытекает, что

$$\begin{cases}(1-q)\|z_j(\cdot,\omega_1)-z_j(\cdot,\omega_2)\|_C\leqslant\mathfrak{d}(2+4\beta)\mathfrak{q}_\gamma+\\+\tilde{\mathfrak{k}}\big(\mathfrak{m}_\gamma[\nu_j,\Omega]+\mathfrak{m}_\gamma[\mu,\Omega]+\\+\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}(w^{(1)}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(s)+w^{(2)}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(s))ds\big).\end{cases}\tag{5.30}$$

Так как $f\in S(\mathbb{R},C(K_r\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, $f'_x\in S(\mathbb{R},C(K_r\times\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$, а $x\in B(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R}^n)$, то по лемме 1.1 [1]

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}(\sup_{\substack{\omega_1,\omega_1\in\Omega\\ \rho_\Omega(\omega_1,\omega_1)\leqslant\gamma}}(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}(w^{(1)}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(s)+w^{(2)}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(s))ds))=0.\tag{5.31}$$

Далее, поскольку $\nu_j(\cdot,\omega)\doteq\mu(\cdot,\omega)-\delta_{u_j(\cdot,\omega)}$, то, в силу второго утверждения теоремы 3.1 [1] и равенства $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{m}_\gamma[\mu,\Omega]=0$, получаем, что при каждом $j\in\mathbb{N}$ имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{m}_\gamma[\nu_j,\Omega]=0.\tag{5.32}$$

Сейчас покажем, что

$$\lim_{\gamma\downarrow 0} \mathfrak{q}_\gamma = 0. \tag{5.33}$$

Для этого докажем сначала (здесь см. обозначение (5.16)), что если $\omega_1, \omega_1 \in \Omega$ такие, что $\rho_\Omega(\omega_1,\omega_1) \leqslant \gamma$, то для любых точек $t, s \in \mathbb{R}$

$$|\mathcal{G}(t,s;\omega_1) - \mathcal{G}(t,s;\omega_2)| \leqslant \varkappa \mathfrak{v}_\gamma[A,\Omega] e^{-\tilde{\sigma}|t-s|}, \ \varkappa \doteq \frac{2\tilde{\mathfrak{r}^2}}{1-e^{2\tilde{\sigma}}}, \tag{5.34}$$

где $\tilde{\mathfrak{r}} \doteq \max(\tilde{\mathfrak{r}_1}\tilde{\mathfrak{r}_2})$, а $\tilde{\sigma} \doteq \min(\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2})$. Действительно, обозначив $\mathcal{A}(\cdot;\omega_1,\omega_2) \doteq A(\cdot,\omega_1) - A(\cdot,\omega_2)$, при $t \leqslant s$ имеем

$$\int_{-\infty}^{t} |\mathcal{G}(t,\xi;\omega_1)\mathcal{A}(\xi;\omega_1,\omega_2)\mathcal{G}(\xi,s;\omega_2)|d\xi \overset{(4.4)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \tilde{\mathfrak{r}^2} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t-i-1}^{t-i} e^{-\tilde{\sigma}|t-\xi|} \cdot |\mathcal{A}(\xi;\omega_1,\omega_2)| \cdot e^{-\tilde{\sigma}|\xi-s|} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{\mathfrak{r}^2} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\tilde{\sigma}(t+s)} \int_{t-i-1}^{t-i} e^{-2\tilde{\sigma}\xi} |\mathcal{A}(\xi;\omega_1,\omega_2)| d\xi \leqslant \varkappa \mathfrak{v}_\gamma[A,\Omega] e^{\tilde{\sigma}(t-s)},$$

$$\int\limits_{t}^{\infty} |\mathcal{G}(t,\xi;\omega_1)\mathcal{A}(\xi;\omega_1,\omega_2)\mathcal{G}(t,\xi;\omega_2)|d\xi \overset{(4.4)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \tilde{\mathfrak{r}^2} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t+i}^{t+i+1} e^{-\tilde{\sigma}|t-\xi|} \cdot |\mathcal{A}(\xi;\omega_1,\omega_2)| \cdot e^{-\tilde{\sigma}|\xi-s|} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{\mathfrak{r}^2} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\tilde{\sigma}(t+s)} \int_{s+i}^{s+i+1} e^{-2\tilde{\sigma}\xi} |\mathcal{A}(\xi;\omega_1,\omega_2)| d\xi \leqslant \varkappa \mathfrak{v}_\gamma[A,\Omega] e^{\tilde{\sigma}(t-s)}.$$

Таким образом, если $-\infty < t \leqslant s < \infty$, то

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t,\xi;\omega_1)\mathcal{A}(\xi;\omega_1,\omega_2)\mathcal{G}(\xi,s;\omega_2)|d\xi \leqslant \varkappa \mathfrak{v}_\gamma[A,\Omega] e^{\tilde{\sigma}(t-s)}.$$

Аналогично показываем, что при $-\infty < s \leqslant t < \infty$ справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t,\xi;\omega_1)\mathcal{A}(\xi;\omega_1,\omega_2)\mathcal{G}(\xi,s;\omega_2)|d\xi \leqslant \varkappa\mathfrak{v}_\gamma[A,\Omega]e^{\tilde{\sigma}(s-t)}.$$

Из последних двух неравенств и равенства (см. [20. С. 40])

$$\mathcal{G}(t,s;\omega_1) - \mathcal{G}(t,s;\omega_2) = \\ = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,\xi;\omega_1)\mathcal{A}(\xi;\omega_1,\omega_2)\mathcal{G}(\xi,s;\omega_2)|d\xi,$$

справедливого для всех $t,s \in \mathbb{R}$, вытекает неравенство (5.33).

Далее, т.к. (см. обозначение (5.23))

$$\mathfrak{v}_\gamma[A,\Omega] \leqslant \mathfrak{d}\mathfrak{m}_\gamma[\mu,\Omega] + \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} w_\gamma[g_1(s,\cdot,\cdot),\Omega\times\mathfrak{U}]ds,$$

где $w_\gamma[g_1(s,\cdot,\cdot),\Omega\times\mathfrak{U}]$ — γ-колебание на $\Omega\times\mathfrak{U}$ непрерывной функции $(\omega,u) \mapsto g_1(s,\omega,u)$, а по условию теоремы 5.5 $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{m}_\gamma[\mu,\Omega] = 0$ и по лемме 1.1 [1]

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} w_\gamma[g_1(s,\cdot,\cdot),\Omega\times\mathfrak{U}]ds = 0,$$

то из последнего неравенства вытекает, что $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{v}_\gamma[A,\Omega] = 0$. Откуда, в свою очередь, в силу (5.34) получаем (5.33).

Наконец, из (5.30) – (5.33) получаем, что

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Big(\sup_{\substack{\omega_1,\omega_1\in\Omega \\ \rho_\Omega(\omega_1,\omega_1)\leqslant\gamma}} \|z_j(\cdot,\omega_1) - z_j(\cdot,\omega_2)\|_C\Big) = 0,$$

а это и означает [2], что отображение $(t,\omega) \mapsto z_j(t,\omega)$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R}^n)$.

4. В этом пункте, используя результаты предыдущего пункта и четвертого раздела работы [1], приведем ряд утверждений о свойствах нелинейных систем управления, которые непосредственно используются в задачах, связанных с оптимальным управлением п.п. движениями.

Для заданной пары $(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{S} \times \mathrm{APM}_1$, где $\mathfrak{S}$ — заданное множество в $(B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k), \|\cdot\|_C)$, определим п.п. вариации. С этой целью сначала укажем необходимые свойства касательного конуса Кларка $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S} \subset B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ в точке $\widehat{v}(\cdot) \in \mathfrak{S}$. Для этого введем в рассмотрение симплекс

$$\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \doteq \{\vec{\lambda} = (\lambda_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \colon \lambda_{\mathfrak{q}} \geqslant 0, \mathfrak{q} = 1, \ldots, \mathfrak{k}+\mathfrak{m}, \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \lambda_{\mathfrak{q}} = 1\} \subset \mathbb{R}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}},$$

и с фиксированными точками $\tilde{\mathfrak{y}}_1 \ldots \tilde{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \in [0, \rho]$ и заданными векторами $h_1(\cdot) \ldots h_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ свяжем два отображения

$$\vec{\lambda} \mapsto \mathfrak{g}(\vec{\lambda}) \doteq (\lambda_{\mathfrak{q}}\tilde{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \in \Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}, \ \vec{\lambda} \in \Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}, \tag{5.35}$$

$$\vec{\mathfrak{y}} \mapsto h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}}) \doteq \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \lambda_{\mathfrak{q}}\tilde{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{q}} h_{\mathfrak{q}}(\cdot), \ \vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \doteq \mathfrak{g}(\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}). \tag{5.36}$$

Полагаем также

$$V \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\widehat{v}) + O_{\varrho}[0], \ \varrho \doteq \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \tilde{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{q}} \|h_{\mathfrak{q}}(\cdot)\|_C + 1. \tag{5.37}$$

Л е м м а 5.4. *Пусть заданы* $h_1(\cdot), \ldots, h_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ *и последовательность* $\{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$, $\lim\limits_{p\to\infty} \varepsilon_p = 0$. *Тогда найдутся последовательность* $\{v_p(\cdot)\}_{p=1}^{\infty} \subset \mathfrak{S}$, $\lim\limits_{p\to\infty} \|v_p(\cdot) - \widehat{v}(\cdot)\|_C = 0$ *и совокупность функций*

$$\{h_p(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}), \ p \in \mathbb{N}, \vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\}_{p=1}^{\infty} \subset B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$$

такие, что (см. (5.37))

$$\lim_{p\to\infty}(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|h(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})-h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C)=0, \tag{5.38}$$

$$w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\doteq v_p(\cdot)+\varepsilon_p h(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\in\mathfrak{S},\ (p,\vec{\mathfrak{y}})\in\mathbb{N}\times\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}. \tag{5.39}$$

Кроме того,

$$\lim_{p\to\infty}(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|\varepsilon_p^{-1}(w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})-\widehat{v}(\cdot))-h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C)=0. \tag{5.40}$$

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}(\operatorname*{supremum}_{\substack{(p,\vec{\lambda}_l)\in\mathbb{N}\times\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\\ l=1,2,|\vec{\lambda}_1-\vec{\lambda}_2|\leqslant\gamma}}\|h(\cdot,\varepsilon_p,\mathfrak{g}(\vec{\lambda}_1))-h(\cdot,\varepsilon_p,\mathfrak{g}(\vec{\lambda}_2))\|_C)=0. \tag{5.41}$$

Доказательство леммы 5.4 можно получить, если воспользоваться схемами доказательств леммы 2.3 и соответствующих утверждений о свойствах конуса $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, приведенных при доказательстве теоремы 2.2, и мы его опускаем.

Далее (см. обозначения четвертого раздела в [1]) для фиксированного $\vec{\iota}=(\iota_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\in\mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, такого, что $\beta(\vec{\iota})>0$ рассмотрим отображение $t\mapsto\mu(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\in\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, заданное равенством (4.18) в [1], в котором $(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,)\in\mathfrak{X}\doteq[0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})]\times\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$.

В дальнейшем набор $(\vec{\iota},\vec{h}(\cdot),\{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty})$, в котором $\vec{\iota}\in\mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ такое, что $\beta(\vec{\iota})>0$, $\vec{h}(\cdot)\doteq(h_{\mathfrak{l}}(\cdot))_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, $h_{\mathfrak{l}}(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, и последовательность $\{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty}\subset(0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})]$, $\lim\limits_{p\to\infty}\varepsilon_p=0$ называем допустимым.

О п р е д е л е н и е 5.2. Совокупность последовательностей $\{(w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),\mu(\cdot;\varepsilon_p\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}))\}_{p=1}^{\infty}\subset\mathfrak{S}\times\mathrm{APM}_1$, $\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, в которых $w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})$, принадлежащее множеству $\mathfrak{S}$, определено в лемме 5.4 равенством (5.39), отображение $\mu(\cdot;\varepsilon_p\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\in\mathrm{APM}_1$ — равенством (4.18) в [1] при $\varepsilon=\varepsilon_p$, называется последовательностью п.п. вариаций для $(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{S}\times\mathrm{APM}_1$, отвечающей заданному допустимому набору $(\vec{\iota},\vec{h}(\cdot),\{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty})$.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}=\langle\mu(t),f(t,x,v(t),u)\rangle,\ (t,x)\in\mathbb{R}\times G, \tag{5.42}$$

в которой управлениями служат пары $(v(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{S} \times \mathrm{APM}_1$, функция $f : \mathbb{R} \times G \times \mathbb{R}^k \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ при каждом $V \in \mathrm{comp(G)}$ удовлетворяет условию 1), указанному в начале настоящего раздела.

Для п.п. по Степанову системы (5.42) (см. лемму 5.2 в [1]) набор $(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \in B(\mathbb{R}, G) \times \mathfrak{S} \times \mathrm{APM}_1$ называем допустимым, если $x(\cdot)$ — решение этой системы, отвечающее паре $(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$, такое, что $\overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x}(\cdot)) \subset G$. Совокупность допустимых наборов этой системы обозначим $\mathfrak{D}_c$.

Покажем, что каждому набору $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot) \in \mathfrak{D}_c$ при условии, что отвечающая этому набору система (5.3) допускает экспоненциальную дихотомию, можно поставить в соответствие определенную последовательность допустимых наборов — п.п. вариаций этого набора. С этой целью рассмотрим последовательность $\{(w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}), \mu(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}))\}_{p=1}^{\infty} \subset \mathfrak{S} \times \mathrm{APM}_1$ (см. определение 5.2) п.п. вариаций для $(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{S} \times \mathrm{APM}_1$, отвечающую допустимому набору $(\vec{\iota}, \vec{h}(\cdot), \{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty})$. По следствию 4.1 [1. C.79] отображение $(t, \varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}) \mapsto \mu(t; \varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$, заданное равенством (4.18) [1. C.74] принадлежит (см. [1. C.38]) множеству функций $S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, где $\mathfrak{X} \doteq [0, \varepsilon(\rho, \vec{\iota})] \times \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ — компактное относительно метрики $\rho_{\mathfrak{X}}((\varepsilon_1, \vec{\mathfrak{y}}_1), (\varepsilon_2, \vec{\mathfrak{y}}_2)) \doteq |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\vec{\mathfrak{y}}_1 - \vec{\mathfrak{y}}_2|$, $(\varepsilon_k, \vec{\mathfrak{y}}_k) \in \mathfrak{X}$, $k = 1, 2$ пространство. Поэтому [1] множество $\{\mu(\cdot; \varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\ (\varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}) \in \mathfrak{X}\} \subset \mathrm{APM}_1$ и равностепенно п.п. Далее, т.к. $d(w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}), \widehat{v}(\cdot)) \leqslant \|w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}) - \widehat{v}(\cdot)\|_C$, то (см. теорему 4.1 [1. C.75] и лемму 5.4)

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} d(w(\cdot, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}), \widehat{v}(\cdot)) + \sup_{\vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \|\mu(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) - \widehat{\mu}(\cdot)\|_w\Big) = 0.$$

Поэтому в силу теоремы 5.1 найдутся такие $\widehat{p}_1 \in \mathbb{N}$ и множество $\mathcal{K} \in \mathrm{comp}(G)$, что при каждом $p \geqslant \widehat{p}_1$ и любом $\vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ п. п. по Степанову система

$$\dot{x} = \langle \mu(t; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), f(t, x, w(t, \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}), u) \rangle,\ (t, x) \in \mathbb{R} \times G$$

будет иметь единственное п. п. по Бору решение $x(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$ такое, что $\overline{\mathrm{orb}}(x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}))\subset\mathcal{K}$ и

$$\lim_{p\to\infty}(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|\widehat{x}(\cdot)-x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\|_C)=0. \tag{5.43}$$

Поскольку при каждом $m\in\mathbb{Z}$ и всяком $\varepsilon>0$ (см. лемму 4.2 в [1])

$$\mathbb{I}_m(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})\doteq\{t\in[ma,(m+1)a]:\ \widehat{\mu}(t)\neq\mu(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\}=\bigcup_{i=1}^{N}\bigcup_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}),$$

то (см. равенства (4.13)–(4.16) в [1])

$$\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}(\sup_{m\in\mathbb{Z}}(\mathrm{mes}\,\mathbb{I}_m(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})))\leqslant\varepsilon\rho\beta(\vec{\iota}). \tag{5.44}$$

Допустим далее, что функция $f:\mathbb{R}\times G\times\mathbb{R}^k\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}^n$ имеет также частную производную по v такую, что f'_v принадлежит $S(\mathbb{R},C(\mathcal{K}\times V\times\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n))$, где множество V задано равенством (5.37). В этом случае, принимая во внимание, что функция

$$\Delta x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\doteq\widehat{x}(\cdot)-x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$$

(здесь см. доказательство теоремы 5.2) является решением системы (5.10) при $\alpha\doteq\varepsilon_p$ и $\omega\doteq\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, следуя схеме доказательства теоремы 2.3 работы [17], используя при этом равенства (5.38), (5.40) и (5.43), неравенство (5.44) и теорему 4.1 работы [1], можно показать, что найдется такое $\widehat{p}_2\geqslant\widehat{p}_1$, что

$$\sup\{\varepsilon_p^{-1}\|\Delta x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\|_C),\ p\geqslant\widehat{p}_2,\ \vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\}<\infty. \tag{5.45}$$

Следуя схеме доказательства теоремы 2.3 в [17], принимая во внимание ограничения, наложенные на функцию f, неравенства (5.45), (5.44), равенство (5.43) и лемму 5.4, можно показать, что

$$\lim_{p\to\infty}(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|\frac{\Delta x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})}{\varepsilon_p}-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon_p}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(\cdot,s)\langle\Delta\mu(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),f(s,\widehat{x}(s),\widehat{v}(s),u)\rangle ds+y(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C)=0,$$

где функция $y(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ определена равенством (здесь см. обозначение в (5.36))

$$y(t,\vec{\mathfrak{y}})\doteq\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\widehat{\mu}(s),f'_v(s,\widehat{x}(s),\widehat{v}(s),u)\rangle h(s,\vec{\mathfrak{y}})\,ds.$$

Далее, в силу неравенства (см. в [1. С. 78; 79])

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}}(\operatorname{mes}\{t\in[ma,(m+1)a]\colon\ \mu(t;\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'\,\vec{\iota})\neq\mu(t;\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}''\,\vec{\iota})\})\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}k_i^{\mathfrak{q}}\sum_{l=1}^{\mathfrak{q}}|\varepsilon'\vec{\mathfrak{y}}'_l-\varepsilon''\vec{\mathfrak{y}}''_l|\cdot|\vec{\beta}^{\,l}_{k_i^l}|,$$

выполненного для любых $(\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'),(\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}'')\in\mathfrak{X}$, получаем, что

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Big(\underset{\substack{(\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'),(\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}'')\in\mathfrak{X}\\|\varepsilon'-\varepsilon''|+|\vec{\mathfrak{y}}'-\vec{\mathfrak{y}}''|\leqslant\gamma}}{\operatorname{supremum}}\ (\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\mu(s;\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'\,\vec{\iota})-\mu(s;\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}''\,\vec{\iota})|(\mathfrak{U})ds)\Big)=0.$$

В свою очередь, из последнего предельного соотношения в силу теоремы 5.2, принимая во-внимание обозначение в (5.36) и равенство (5.41) получаем, что при каждом $p\geqslant\widehat{p}_1$ отображение $(t,\vec{\lambda})\mapsto\mathfrak{x}_p(t,\vec{\lambda})$, где $\mathfrak{x}_p(t,\vec{\lambda})\doteq x(t;\varepsilon_p,\mathfrak{g}(\vec{\lambda})\,\vec{\iota})$ принадлежит множеству $B(\mathbb{R}\times\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}},\mathcal{K})$.

Таким образом, каждому фиксированному допустимому набору $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)\in B(\mathbb{R},G)\times\mathfrak{S}\times\mathrm{APM}_1$ системы (5.42) при условии, что система (5.3) допускает э.д., отвечает последовательность $\{(x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),w(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),\mu(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}))\}_{p\geqslant\widehat{p}_2}$, допустимых наборов системы (5.42) — п.п. вариаций для $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$, обладающая указанными выше свойствами.

Отметим, что теорема 1.5, неравенства (5.44), (5.45), равенство (5.43) и лемма 5.4 позволяют доказать еще ряд свойств множества $\{(x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),w(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),\mu(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}))\}_{p\geqslant\widehat{p}_3}$, допустимых наборов системы (5.42), аналогичных свойствам, приведенных в [21], которые ввиду громоздкости доказательств здесь опускаем.

Введем при $p\geqslant\widehat{p}_2$ следующие обозначения:

$$\nu_p(\cdot,\vec{\lambda})\doteq\mu(\cdot;\varepsilon_p,\mathfrak{g}(\vec{\lambda})\,\vec{\iota}),\ \ w_p(\cdot,\vec{\lambda})\doteq w(\cdot;\varepsilon_p,\mathfrak{g}(\vec{\lambda})).$$

Используя теорему 4.1 из [1] и равенство (5.43), несложно показать, что

$$\lim_{p\to\infty}(\sup_{\vec{\lambda}\in\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a}|\langle\nu_p(s,\vec{\lambda}),f'_x(s,\mathfrak{x}_p(s,\vec{\lambda}),w_p(s,\vec{\lambda}),u)\rangle -$$
$$-\langle\widehat{\mu}(s),f'_x(s,\widehat{x}(s),\widehat{v}(s),u)\rangle|ds))=0.$$

Откуда (см. теорему 3.1) получаем существование такого $\widehat{p}_3\geqslant\widehat{p}_2$, что при всех $p\geqslant\widehat{p}_3$ и $\lambda\in\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ п.п. по Степанову система уравнений

$$\dot{y}=\langle\nu_p(t,\vec{\lambda}),f'_x(t,\mathfrak{x}_p(t,\vec{\lambda}),w_p(t,\vec{\lambda}),u)\rangle y,\ (t,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

будет э.д., причем существуют такие положительные числа $\tilde{\mathfrak{r}},\tilde{\sigma}$, что для функции Грина $\mathcal{G}(t,s;p,\vec{\lambda})$ этой системы при всех t,s из $\mathbb{R}$ и любых $p\geqslant\widehat{p}_3$, $\vec{\lambda}\in\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ будет выполняться неравенство $|\mathcal{G}(t,s;p,\vec{\lambda})|\leqslant\tilde{\mathfrak{r}}e^{-\tilde{\sigma}|t-s|}$. Поэтому, учитывая принятые обозначения и принимая во внимание указанные выше свойства множества $\{(\mathfrak{x}_p(\cdot,\vec{\lambda}),w_p(\cdot,\vec{\lambda}),\nu_p(\cdot,\vec{\lambda})),\ p\geqslant\widehat{p}_3,\ \vec{\lambda}\in\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\}$ допустимых наборов системы (5.42), получаем, что для системы

$$\dot{x}=\langle\nu_p(t,\vec{\lambda}),f(t,x,w_p(t,\vec{\lambda}),u)\rangle,\ (t,x)\in\mathbb{R}\times G$$

выполняются условия а) и б), приведенные для системы (5.17) при $\Omega\doteq\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$. Следовательно, если для $\nu_p\in S(\mathbb{R}\times\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ $(p\geqslant\widehat{p}_3)$ рассмотреть (см. теорему 3.1 в [1]) аппроксимирующую его последовательность $\{u_{pj}\}_{j=1}^{\infty}\subset S(\mathbb{R}\times\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}},\mathfrak{U})$, то по теореме 5.4 найдется такое $j_1=j_1(p)\in\mathbb{N}$, что для п.п. по Степанову системы

$$\dot{x}=f(t,x,w_p(t,\vec{\lambda}),u_{pj}(t,\vec{\lambda})),\ (t,x)\in\mathbb{R}\times G$$

существует множество таких допустимых наборов

$$\{(x_{pj}(\cdot,\vec{\lambda}),w_p(t,\vec{\lambda}),u_{pj}(\cdot,\vec{\lambda})),\ j\geqslant\hat{j},\vec{\lambda}\in\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\},$$

что
$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{\vec{\lambda}\in\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|\mathfrak{x}_p(\cdot,\vec{\lambda})-x_{pj}(\cdot,\vec{\lambda})\|_C\Big)=0,$$
причем для всех $\vec{\lambda}\in\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ замыкание орбиты п. п. по Бору отображения $t\mapsto\mathfrak{x}_p(t,\vec{\lambda})-x_{pj}(t,\vec{\lambda})$ содержится в $O_r[0]$ и компакт $\mathbb{K}_r\doteq\mathcal{K}+O_r[0]\subset G$. Кроме того, по теореме 5.5 отображение $(t,\alpha)\mapsto x_{pj}(t,\vec{\lambda})$ принадлежит $B(\mathbb{R}\times\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}},\mathbb{K}_r)$.

Список литературы

1. Иванов А. Г. Элементы математического аппарата задач почти периодической оптимизации. I. // Изв. Ин-та матем. и информ./ УдГУ. Ижевск, 2002. Вып. 1. С. 3–100.
2. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 252 с.
3. Энкелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
4. Данилов Л. И. О мерозначных почти периодических функциях //Вестн. Удм. ун-та. 1993. Вып. 1. С. 51–58.
5. Данилов Л. И., Иванов А. Г. К теореме о поточечном максимуме в почти периодическом случае // Изв. вузов. Математика. 1994, Γ́ 6. С. 50–59.
6. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
7. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953. 396 с.
8. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
9. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 256 с.
10. Fink A. M. Almost periodic differential equation // Lect. Notes Math. 1974. V. 377. 336 p.
11. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. шк., 1982. 271 с.
12. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.
13. Тонков Е. Л. Оптимальные периодические движения управляемой системы // Математическая физика. 1977. Вып. 21. С. 45–59.

14. Тонков Е. Л. Устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Изд-во Моск. ин-та хим. машиностр., 1973. 86 с.
15. Массера Х., Шеффер Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М. : Мир, 1970. 456 с.
16. Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология. М.: Высш. шк., 1979. 336 с.
17. Иванов А. Г. К вопросу о непрерывной зависимости почти периодического решения нелинейной системы управления от параметра // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, Ѓ 2. С. 1–12.
18. Иванов А. Г. О корректности расширения задач управления почти периодическими движениями // Изв. вузов. Математика. 2002. Ѓ 6(481). С. 14–25.
19. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений. Воронеж, 1986. 104 с.
20. Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970. 352 с.
21. Иванов А. Г. Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений на средние типа равенств и неравенств. II. // Дифференц. уравнения. 1997 . Т. 33, Ѓ 3. С. 316–323.