УДК 517.934

© **А. А. Адрианов**

ИДЕНТИФИКАЦИЯ РАВНОВЕСНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ОДНОМ КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР m ЛИЦ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬЮ

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим бескоалиционную дифференциальную игру $\Gamma(t_0,x_0)$ с неограниченной продолжительностью [1]. Пусть процесс, управляемый игроками $i=\overline{1,m}$ $(m\geqslant 2)$, описывается системой

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,u_1,u_2,\ldots,u_m), \tag{1}$$

$t\in R,\ x\in R^n,\ u_i\in P_i\in \mathrm{Comp}R^{k(i)},\ i\in I=\{1,2,\ldots,m\}$ с начальным условием

$$x(t_0)=x_0, \tag{2}$$

а качество процесса управления каждый из игроков $i\in I$ оценивает своим функционалом

$$H_i\bigl(t_0,x_0|u_1(\cdot),\ldots,u_m(\cdot)\bigr)=\int\limits_{t_0}^{+\infty} h_i\bigl(t,x(t),u_1(t),\ldots,u_m(t)\bigr)dt, \tag{3}$$

где $x(t)=x\bigl(t,t_0,x_0,u_1(\cdot),\ldots,u_m(\cdot)\bigr)$ — решение задачи Коши (1), (2) на интервале $[t_0,+\infty)$ соответствующее измеримому по Лебегу набору программных управлений $u_i(\cdot)\div u_i=u_i(t)\in P_i,\ i=\overline{1,m}$. Предполагается, что каждый из игроков стремится максимизировать свой выигрыш, располагая в каждый момент времени t информацией о начальной позиции (t_0,x_0) и управлениях, реализованных всеми игроками на промежутке $[t_0,t)$.

Будем считать далее, что в отношении правой части системы (1) и подынтегральных функций в (3) справедливы те же предположения, что и в [1].

§ 2. Основные результаты

Как отмечалось в [2], в рассматриваемой игре для любого $\varepsilon>0$ существует ситуация ε-равновесия в смысле Нэша.

О п р е д е л е н и е 1. Под *равновесной траекторией* в игре $\Gamma(t_0,x_0)$ будем понимать функцию $x(t)$, определенную при $t\in[t_0,+\infty)$, которая на любом конечном отрезке $[t_0,T]$ является равномерным пределом последовательности траекторий системы (1) $\{x^{(k)}(t)\}_{k=1}^{\infty}$, каждая из которых порождается некоторой ситуацией $\varepsilon(k)$-равновесия, где $\varepsilon(k)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}+0$.

Т е о р е м а 1. *Множество равновесных траекторий в игре* $\Gamma(t_0,x_0)$ *непусто.*

Обозначим через $v_i(\cdot)$ функцию максиминного выигрыша (потенциал) игрока $i\in I$ [1].

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы траектория* $x(\cdot)=x(\cdot,t_0,x_0,u_1(\cdot),\ldots,u_m(\cdot))$ *была равновесной траекторией в игре* $\Gamma(t_0,x_0)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$v_i(t,x(t))\leqslant\int\limits_{t}^{+\infty} h_i(\tau,x(\tau),u_1(\tau),\ldots,u_m(\tau))d\tau \tag{4}$$

для всех $i\in I$ *и* $t\in[t_0,+\infty)$.

Т е о р е м а 3 (см. [1]). *Для любой позиции* (t_0, x_0) *существует такой набор допустимых управлений* $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_m(\cdot))$, *что каждая из функций*

$$\varphi_i(t) = v_i(t, x(t)) + \int\limits_{t_0}^{t} h_i(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau$$

$(x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot)))$ *является неубывающей на интервале* $[t_0, +\infty)$.

Пусть $X^*(t_0, x_0)$ — множество тех траекторий, о которых идет речь в теореме 3. Такие траектории далее будем называть стабильно равновесными. Как установлено в [1], всякая стабильно равновесная траектория является равновесной.

Пусть $F : (t, x) \mapsto F(t, x)$, $F(t, x) = \{f(t, x, u_1, \ldots, u_m) | u_i \in P_i, \ i \in I\}$ и

$$FH : (t, x) \mapsto FH(t, x), \quad (t, x) \in D,$$

$$FH(t, x) =$$

$$= \{(f, h_1, \ldots, h_m) \in R^{n+m} | f = f(t, x, u_1, \ldots, u_m), \ h_i = h_i(t, x, u_1, \ldots, u_m), \ u_i \in P_i, \ i = \overline{1, m}\}.$$

Если функции $v_i(\cdot), \ i \in I$, дифференцируемы в точке $(t, x) \in D$ по направлению $(1, f) = (1, f_1, \ldots, f_n) \in R^{n+1}$, то их производные в этой точке по соответствующему направлению обозначим, соответственно, $d_i(t, x, f)$.

У с л о в и е 1. В каждой точке $(t, x) \in D$ функции $v_i(\cdot)$ дифференцируемы по любому направлению $(1, f) \in R^{n+1}, \ f \in F(t, x)$ и множество

$$\Phi\mathrm{H}(t, x) = \{(f, h) \in FH(t, x) | d_i(t, x, f) + h_i \geqslant 0, \ i \in I\}$$

непусто.

Если выполнено это условие, то определено многозначное отображение

$$\Phi : (t, x) \mapsto \Phi(t, x) \subset R^n, \quad (t, x) \in D,$$

$$\Phi(t, x) = \{f \in F(t, x) | \exists h \in R^m : (f, h) \in \Phi\mathrm{H}(t, x)\}.$$

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \Phi(t, x). \tag{5}$$

Т е о р е м а 4. *Если выполнено условие* 1 *и функции* $v_i(\cdot), \ i \in I$ *удовлетворяют в некоторой окрестности множества* D *локальному условию Липшица, то каковы бы ни были начальные данные* $(t', x') \in R^{n+1}$ *множество* $X^*(t', x')$ *совпадает со множеством всех абсолютно непрерывных на полуоси* $[t', +\infty)$ *решений дифференциального включения* (5)*, удовлетворяющих начальному условию* $x(t') = x'$.

Список литературы

1. Адрианов А. А., Чистяков С. В. Об одном классе бескоалиционных дифференциальных игр с неограниченной продолжительностью // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2005. Вып. 1. С. 78–93.
2. Gao Hongwei and Chistyakov Sergei V. On a Class of Coalition-Free Differential Games with Infinite Duration // International Congress of Mathematicians. Game Theory and Applications. Satellite Conference. August 14–17, 2002, Qingdao, China. Proceedings Volume, pp. 163–167.

Адрианов Алексей Андреевич
Санкт-Петербургский государственный ун-т,
Россия, Санкт-Петербург
e-mail: alex_adrianov@rambler.ru