УДК 517.977

© **И. Н. Баранова**

К ПРИМЕРУ ПОНТРЯГИНА СО МНОГИМИ УЧАСТНИКАМИ

Введение

В данной работе рассматривается пример Л. С. Понтрягина со многими участниками, при условии, что среди корней характеристического уравнения есть положительный. Получены достаточные условия поимки.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве R^k рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1,\ldots,P_n$ и m убегающих $E_1,\ldots,E_m$, описываемая системой вида

$$z_{ij}^{(l)}+a_1z_{ij}^{(l-1)}+\cdots+a_{l-2}\ddot{z}_{ij}+a_{l-1}\dot{z}_{ij}+a_lz_{ij}=u_i-v_j.$$

Здесь $z_{ij},u_i,v_j\in R^k$, $a_1,\ldots,a_l\in R^1$, V — выпуклый компакт R^k. При $t=0$ заданы начальные условия

$$z_{ij}(0)=z_{ij}^0,\ \dot{z}_{ij}(0)=z_{ij}^1,\ \ldots,\ z_{ij}^{(l-1)}(0)=z_{ij}^{l-1}.$$

Цель группы преследователей — поймать не менее q $(1\leqslant q\leqslant m)$ убегающих.

Обозначим через $\varphi_r(t)$, $r=0,1,\ldots,l-1$ решения уравнения

$$w^{(l)}+a_1w^{(l-1)}+\cdots+a_lw=0$$

с начальными условиями

$$w(0)=0,\ldots,\ w^{(r-1)}(0)=0,\ w^{(r)}(0)=1,\ w^{(r+1)}(0)=0,\ldots,\ w^{(l-1)}(0)=0.$$

П р е д п о л о ж е н и е 1. Уравнение

$$\lambda^l+a_1\lambda^{l-1}+\cdots+a_l=0$$

имеет корень с положительной вещественной частью.

П р е д п о л о ж е н и е 2. $\varphi_{l-1}(t)\geqslant 0$ для всех $t>0$.

Из предположений 1, 2 следует, что среди корней с максимальной вещественной частью существует вещественный корень, который будем обозначать λ_s, а его кратность k_s. Пусть $\gamma=k_s-1$. Определим функцию $\lambda:V\to R^1$ вида

$$\lambda(\xi,v)=\sup\{\lambda|\lambda\geqslant 0,-\lambda\xi\in V-v\},$$

где ξ фиксированный ненулевой вектор R^k.

§ 2. Поимка группы убегающих

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что в игре Γ возможна поимка, если существует момент $T>0$ такой, что для любой совокупности управлений убегающих

$$\{v_j(t),\,t\in[0,\infty),\,j=1,\ldots,m\}$$

найдутся управления преследователей

$$\{u_i(t),\,t\in[0,\infty),\,i=1,\ldots,n\}$$

обладающие следующим свойством: существуют множества индексов $N \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $M \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ мощности q такие, что каждый убегающий E_j, $j \in M$ «ловится» не позднее момента T некоторым преследователем P_i, $i \in N$, причем, если преследователь P_i «ловит» убегающего E_j, то остальные убегающие считаются им непойманными. Выражение P_i «ловит» E_j означает, что существует момент $T_{ij} \in (0, T]$ такой, что $z_{ij}(T_{ij}) = 0$.

Считаем, что $n \geqslant q$.

Введем следующие обозначения

$$\hat{z}_{ij}(t) = \varphi_0(t) z_{ij}^0 + \varphi_1(t) z_{ij}^1 + \cdots + \varphi_{l-1}(t) z_{ij}^{l-1},$$
$$\xi_{ij}(t) = \frac{\hat{z}_{ij}(t) e^{-\lambda_s t}}{(t+1)^{\gamma}},\ \dot{\xi}_{ij}(t) = \frac{\dot{\hat{z}}_{ij}(t) e^{-\lambda_s t}}{(t+1)^{\gamma}}.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены предположения* 1, 2 *и для любых* $p \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, $N \subset \{1, \ldots, n\}$, $|N| = n - p$ *существует множество* $M \subset \{1, \ldots, m\}$, $|M| = q - p$ *такое, что для всех* $\beta \in M$, $t \in [0, \infty)$ *выполнено неравенство*

$$\inf_t \min_{v \in V} \max_{\alpha \in N} \lambda(\xi_{\alpha\beta}(t), v) > \frac{n}{a}.$$

Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

§ 3. «Мягкая» поимка в примере Л. С. Понтрягина

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что в игре Γ происходит «мягкая» поимка, если существуют $T > 0$, функции $u_i(t) = u_i(t, z_{i1}^0, \ldots, z_{i1}^{l-1}, v_t(\cdot))$ такие, что $u_i(t) \in V$, и для любых измеримых функций v_j ($v_j(t) \in V$ для всех t) найдутся момент $\tau \in [0, T]$ и номера α и β такие, что $z_{\alpha\beta}(\tau) = 0$, $\dot{z}_{\alpha\beta}(\tau) = 0$.

П р е д п о л о ж е н и е 3. $\varphi_{l-1}(t) \geqslant 0$, $\dot{\varphi}_{l-1}(t) \geqslant 0$ для всех $t > 0$.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены предположения* 1 , 3 *и существует* j *такой, что справедливо неравенство*

$$\inf_t \min_{v \in V} \max_i \min\{\lambda(\xi_{ij}(t), v), \lambda(\dot{\xi}_{ij}(t), v)\} > \frac{n}{a}.$$

Тогда в игре Γ *происходит «мягкая» поимка.*

Список литературы

1. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами// Кибернетика. 1976. № 3.
2. Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. Т.2. М.:Наука. 1988.
3. Петров Н. Н. Теория игр. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та 1997.
4. Благодатских А. И. Об одном колебательном конфликтно управляемом процессе со многими участниками// Известия РАН. Теория и системы управления. 2005. № 2.
5. Холл М. Комбинаторика. М.:Мир. 1970.

Баранова Ирина Николаевна
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: ibaranova@udm.ru