УДК 517.93

© **А. Г. Баскаков, В. В. Обуховский, П. Дзекка**

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ В РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ [1]

Пусть E — банахово пространство; символом $\mathcal{L}_1\big(\mathbb{R}, L(E)\big)$ мы будем обозначать банахову алгебру абсолютно суммируемых и сильно измеримых функций, определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в $L(E)$ с нормой $\|\Phi\|_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \|\Phi(\tau)\|_{L(E)} d\tau$ и умножением, заданным сверткой

$$(\Phi_1 * \Phi_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(t-s)\Phi_2(s)ds.$$

О п р е д е л е н и е 1. Банахово пространство $\mathcal{U}(\mathbb{R}, E)$ локально суммируемых функций $\varphi \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}, E)$ называется *равномерным пространством*, если:
(i) для любых $\varphi \in \mathcal{U}(\mathbb{R}, E)$ и $h \in \mathbb{R}$ функция сдвига $\varphi_h(t) = \varphi(t+h)$, $t \in \mathbb{R}$ принадлежит пространству $\mathcal{U}(\mathbb{R}, E)$ и $\|\varphi_h\| = \|\varphi\|$;
(ii) функция $h \to \varphi_h : \mathbb{R} \to \mathcal{U}(\mathbb{R}, E)$ непрерывна для любого $\varphi \in \mathcal{U}(\mathbb{R}, E)$;
(iii) для каждого $\varphi \in \mathcal{U}(\mathbb{R}, E)$ и $B \in L(E)$ функция $(B\varphi)(t) = B\varphi(t)$ принадлежит $\mathcal{U}(\mathbb{R}, E)$ и, более того, $\|B\varphi\|_{\mathcal{U}} \leqslant \|B\|_{L(E)} \|\varphi\|_{\mathcal{U}}$;
(iv) для любых $\Phi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, L(E))$ и $\varphi \in \mathcal{U}(\mathbb{R}, E)$ свертка $\Phi * \varphi$ принадлежит $\mathcal{U}(\mathbb{R}, E)$ и, более того, $\|\Phi * \varphi\|_{\mathcal{U}} \leqslant \|\Phi\|_1 \, \|\varphi\|_{\mathcal{U}}$.

Примерами равномерных пространств являются: пространство $C(\mathbb{R}, E)$ равномерно непрерывных огранченных функций; пространство $L_p(\mathbb{R}, E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ p-суммируемых по Бохнеру функций; пространство $S_p(\mathbb{R}, E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ функций Степанова; подпространство $\tilde{C}(\mathbb{R}, E) \subset C(\mathbb{R}, E)$, состоящее из функций, имеющих конечный предел в $-\infty$ и $+\infty$. Кроме того, множество всех почти периодических функций из $\mathcal{U}(\mathbb{R}, E)$, то есть таких функций φ, для которых множество сдвигов $\{\varphi_h\}_{h\in\mathbb{R}}$ предкомпактно в $\mathcal{U}(\mathbb{R}, E)$, образует замкнутое подпространство $AP\mathcal{U}(\mathbb{R}, E)$, само являющееся равномерным пространством. Так, в частности, $APC(\mathbb{R}, E)$ и $APS_p(\mathbb{R}, E)$ являются пространствами почти периодических функций по Бору и Степанову, соответственно.

Пусть теперь A — многозначный линейный оператор в E, порождающий (вырожденную) сильно непрерывную полугруппу $U : [0, +\infty) \to L(E)$ (см. [1], [2]). Обозначим $E_0 = \overline{D(A)}$; $\sigma(U(1))$ — спектр линейного оператора $U(1) \in L(E)$ и $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Т е о р е м а 1. *Условие*

$$\sigma\big(U(1)\big) \bigcap S = \varnothing \tag{1}$$

влечет, что дифференциальное включение

$$x'(t) \in Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

имеет единственное интегральное решение $x \in \mathcal{U}(\mathbb{R}, E)$ для любой функции $f \in \mathcal{U}(\mathbb{R}, E)$ и, более того, оно имеет представление

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

[1]Работа поддержана грантами РФФИ 05-01-00100, 04-01-00081 и NATO Grant ICS.NR.CLG.981757.

с функцией Грина $G:\mathbb{R}\to L(E)$ *имеющей вид*

$$G(\tau)=\begin{cases}U(\tau)P_1P, & \tau\geqslant 0\\ U(\tau)P_2P, & \tau<0,\end{cases}$$

где $P=U(0):E\to E_0$ *— проекция, а* $P_1,P_2:E_0\to E_0$ *— спектральные проекторы Рисса, соответствующие спектральным множествам оператора* $U_0(1)=U(1)|_{E_0}$ *:*

$$\sigma_1=\{\lambda\in\sigma(U_0(1)):|\lambda|<1\},\quad \sigma_2=\{\lambda\in\sigma(U_0(1)):|\lambda|>1\}.$$

Т е о р е м а 2. *Если* $\mathcal{U}(\mathbb{R},E)$ *является одним из следующих пространств:* $C(\mathbb{R},E)$; $L_p(\mathbb{R},E)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$; $S_p(\mathbb{R},E)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$; $\tilde{C}(\mathbb{R},E)$; $APC(\mathbb{R},E)$ *или* $APS_p(\mathbb{R},E)$, *то условие* (1) *является и необходимым для однозначной разрешимости дифференциального включения* (2) *в соответствующем пространстве.*

Т е о р е м а 3. *Пусть* A *— секториальный мультиоператор* [3], *удовлетворяющий условию: функционалы из* A^*0^* *разделяются векторами из* $A0$, *то есть для каждого ненулевого* $h\in A^*0^*$ *найдется* $y\in A0$ *такой, что* $h(y)\neq 0$. *Тогда условие*

$$\sigma(A)\bigcap(i\mathbb{R})=\varnothing$$

влечет выполнение заключения теоремы 1.

В качестве приложения в докладе рассматриваются управляемые системы с обратной связью, описываемые следующими соотношениями:

$$\frac{dMx(t)}{dt}=Lx(t)+u(t) \tag{3}$$

$$u\in F(Mx), \tag{4}$$

где L, M — замкнутые линейные операторы в E (M не предполагается обратимым); F — мультиотображение обратной связи в $\mathcal{U}(\mathbb{R},E)$. С помощью методов теории уплотняющих мультиотображений [4] доказывается существование траекторий системы (3), (4) в $\mathcal{U}(\mathbb{R},E)$.

Список литературы

1. Baskakov A., Obukhovskii V., Zecca P. Multivalued linear operators and differential inclusions in Banach spaces // Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. 2003. V. 23. P. 53–74.
2. Favini A., Yagi A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces. New York: Marcel Dekker. 1999.
3. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир. 1985.
4. Kamenskii M, Obukhovskii V, Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2001.

Баскаков Анатолий Григорьевич
Воронежский государственный ун-т,
Россия, Воронеж
e-mail: pmmmmio@main.vsu.ru

Обуховский Валерий Владимирович
Воронежский государственный ун-т,
Россия, Воронеж
e-mail: valerio@math.vsu.ru

Дзекка Пьетро (Zecca Pietro)
Universita di Firenze,
Italia, Firenze
e-mail: zecca@unifi.it